大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 11 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.2, 341-349. Dec 2001

무한 개념의 이해와 직관의 역할

이 대 현*

Ⅰ. 서론

무한은 수학, 과학, 철학 등에서 중요한 개념 중의 하나이다. 특히 수학의 역사를 살펴볼 때, 무한은 원하는 목표에 도달할 때까지 수학적 과정을 계속하는 잠재적 무한과 무한 전체를 하나의 완결된 상태로 간주하는 실 무한이라는 매우 다른 두 가지 의미가 우리의 인식에서 갈등을 일으켜 왔다. 이것은 무한 개념 자체와 우리의 지적 쉐마 사이의 깊은 모순에 기인한다고 볼 수 있다.

무한 개념의 경우와 같이, 수학 학습에서 학습자의 사전 경험이나 지식과 형식적 이론 사이에 갈등이 생기면, 이를 극복하여 인지적 평형에 이르도록 학습자의 지식을 재구성해야 한다. 이것은 수학이 본질적으로 형식적이고 공리적으로 조직된 지식 체계이기 때문이다. 학습자의 지적 쉐마는 실제적인 일상 경험을 바탕으로 세워지며, 유한의 대상에 적합하기 때문에 무한 개념을 다룰 때, 학습자가 가지고 있는 무한 개념은 실무한(actual infinity) 개념에 대하여 인식론적 장애가 된다.

새로운 수학 개념의 학습에서 야기되는 인식론적 장애를 확인하는 것은 개념 획득 과정의 학습에서 중요한 요소가 된다. 현대 수학에서 다루는 무한 개념은 궁극적으로 Cantor의 실무한 개념에 근거를 두고 있다. 그러나, 여전히 학습자의 무한 개념은 유한개의 과정을 나타내지만 원하는 만큼 계속할 수 있는 잠재적 무한(potential infinity) 개념에 의한 영향하에 있다. 이것은 무한 개념과 관련된 원시적이고 직관적인 표상이 암묵적으로 그 개념의 사용과 해석에 계속해서 영향을 미치기 때문이다. 실제로 잠재적 무한 개념은 이후 학교 수업에도 별로 변화되지 않는다(Fischbein, Tirosh & Hess, 1979).

이에 본 연구에서는 학교 수학에서 무한 개념의 이해를 어렵게 하는 원인을 파악하고, 학교 수학에서 무한 개념의 이해에 대한 교수학적 시사점을 도출해 보고자 한다. 먼저, Ⅱ장에서는 무한의 이론적 개념에 대하여 알아보고, Ⅲ장에서는 수학 학습에서 학생들의 무한 개념의 이해와 직관을 살펴본다. 마지막으로, Ⅳ장에서는 학생들의 무한 개념의 이해 상태에 대해 학생들에게서 나타나는 반응을 바탕으로 무한 개념 지도와 직관에 대하여 알아본다.

Ⅱ. 무한의 이론적 개념

Aristotle 이후로 많은 수학자들은 잠재적 무한과 실무한을 구별해 왔다. Aristotle에 따르면, 잠재적 무한이란 어떤 것이 임의로 무한히 증

* 전주공고

대될 수 있는 것을 말하며, 실무한은 무한히 증대될 수 있는 것의 총체가 완결되어 실제로 존재함을 의미한다. 그는 수학에는 실무한이 필요하지 않으며, 오직 잠재적 무한만이 존재한다고 보았다(임정대, 1985). 수학에서 실무한을 거부하고 잠재적 무한만을 인정한 사례는 Gauss와 Poincaré에서도 발견된다(Tirosh, 1991). 무한집합에 관하여, Poincaré는 "실무한은 존재하지 않는다. 우리가 무한이라고 부르는 것은, 단지 아무리 많은 대상이 이미 존재하든 관계없이 새로운 대상을 창조하는 끝없는 가능성만을 나타낸다(Klein, 1980; 박세희(역), 1988, p. 278)"라고 믿었다.

수학자들이 실무한을 거부하는 주된 원인은 실무한이 많은 모순과 인식에 어려움을 초래하기 때문이다. 예를 들면, 자연수의 개수가 실무한이라면 자연수만큼 많은 완전제곱수가 존재한다. 그러나, '전체-부분'의 원리를 토대로 해석하면 완전제곱수보다 많은 자연수가 존재한다. 유사한 예가 자연수와 짝수의 집합을 비교할 때 적용된다. 이러한 사실은 실 무한의 존재를 생각했던 Galileo, Dedekind, Bolzano, Hahn, Hilbert, Russell과 같은 수학자들도 실무한이 어렵다는 것을 인정하는 예에서 확인된다(Tirosh, 1991).

무한 개념에 대한 획기적인 변화는 19세기말에 Cantor에 의해, 무한을 하나의 수와 같이 집합론 위에서 생성하고, 그것을 계산할 수 있게 한 실무한 개념의 도입에 있다. 그의 집합론에 있어서는, '자연수 전체의 집합'이라든가 '직선 위의 점 전체의 집합'과 같이 완결된 하나의 무한 집합으로서의 무한을 파악하는 것을 근본 과제로 삼았다. Cantor는 전체와 부분간에 일대일 대응(대등하다)이 가능한 집합을 무한 집합이라고 하였으며, 무한 집합이 아닌 집합을 유한 집합이라고 하였다. 예를 들면, 자연수 집합과 짝수의 집합은 일대일 대응이 가능하므로 자연수 집합은 무한 집합이다.

서로 대등한 집합은 일대일 대응에서 서로 대응하고 있는 원소의 동일시라는 추상에 의하여 추출할 수 있는데, 이를 집합의 농도, 기수(cardinal)라고 한다. 농도의 개념을 이용하면 자연수의 집합은 짝수의 집합이나 홀수의 집합과 대등하다. 이들은 자연수의 집합의 일부분임에도 불구하고 모두 같은 농도를 갖는 것이다. 이와 같이, 유한 집합에서 성립하는 성질(전체는 그 부분보다 크다)이 무한 집합에는 성립하지 않음을 알 수 있다.

Cantor의 실무한 개념은 당대의 수학자들과 철학자들이 받아들이기를 꺼려했으며, Cantor 자신도 이것에서 도출되어지는 결론을 직관적으로 받아들이기 어렵다는 것을 인정하였다(Tirosh, 1991).

III. 학생들의 무한 개념의 이해와 직관

현대 수학에서 다루는 무한 개념은 Cantor의 실무한 개념에 근거하고 있다. 그러나, 무한 개념의 인식에 대한 최근의 여러 연구들은 학생들이 일상의 경험이나 선험 지식에 모순적인 실 무한 개념의 이해에 많은 어려움을 겪고 있음을 보여준다(Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Fischbein, Tirosh & Melamed, 1981; Tirosh, 1991; 1999).

학생들은 무한에 대한 개념을 학습할 때, 여러 가지 무한에 대한 아이디어를 가지고 있으며, 이러한 아이디어들이 실무한 개념을 받아들이기 어렵게 한다. 이러한 아이디어들은 주로 학습자들의 경험에 의하여 형성된 직관에 의한 잠재적 무한 개념에 토대를 두고 있다.

직관의 이러한 경험적 기원과 역할은 직관적인 편견의 존재, 현실에 대한 왜곡된 표상을 부분적으로 설명해 준다(우정호, 2000). 이러한 현상에 대하여, Brousseau(1997)는 "경험론자나 행동주의자의 이론에서 생각하듯이, 무지, 불확실성, 운의 결과가 아니라, 흥미롭고 성공적인 이전의 지식의 결과이며, 이제는 틀린 것이나 단지 부적합한 것으로 밝혀진 것(p. 82)"을 '오류'라고 하고, 이런 유형의 오류들은 예측 가능하며 '장애'를 구성한다고 한다.

장애에 대하여 처음으로 주창한 Bachelard는 장애가 학생들의 지식 획득 과정에서 불가피한 것으로 여기고 다음과 같이 진술하고 있다.

> 그것은 현상의 복잡성이나 일시성과 같은 외적인 장애를 생각하는 문제도 아니고, 인간의 감각이나 정신의 약점과 관련된 문제도 아니다. 일종의 기능적 필요에 의해 지체와 혼란이 나타나게 되는 앎의 행동에서 친숙하게 일어난다.
> (Brousseau, 1997, p. 83에서 재인용)

교수 체계에서 나타나는 장애에 대하여, Brousseau(1997)는 교수학적 장애로 표현하고, 장애의 기원을 개체 발생적 기원을 가진 것, 교수학적 기원을 가진 것, 인식론적 장애의 기원을 가진 것으로 들고 있다. 유사하게 Cornu (1991)도 수학 개념을 가르칠 때 나타나는 장애를 인지적 장애로 명명하고, 인지적 장애의 원인을 학생들의 개인적 발달 과정에서 생기는 발생적 또는 심리적 장애, 교수 방법과 교사의 속성 때문에 생기는 교수학적 장애, 수학 개념 그 자체의 속성으로 인한 인식론적 장애로 구분하고 있다.

인식론적 장애와 관련하여, Cornu(1991)는 형식적인 수업을 받기 전에 형성된 개념을 '자생적 개념'이라고 한다. 자생적 개념은 어떤 개념의 발달의 역사에서 오랜 기간동안 축적되어 온 것과 같이, 수학을 배우는 학생들에게 여전히 남아 있다. 자생적 개념은 학습자가 학습을 통하여 새로운 개념을 습득한다 할지라도 완전히 사라지는 것이 아니고, 새롭게 획득된 개념과 혼합되어, 학문적 의미로 그 개념이나 용어를 이해하는데 장애의 원인이 되기도 한다.

어떤 개념에 관한 자생적 개념은 다양하며, 개념 이미지를 형성한다(Cornu, 1991). Tall (1999)는 수학적 개념과 학생들이 가지고 있는 개념을 구분하여, 각각 '개념 정의'와 '개념 이미지'로 부르고 있다. 개념 이미지는 개인이 그 개념에 대해 가지는 모든 관념의 집합으로 구성되며, 개념 정의는 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의를 의미한다. 개념 이미지 중에는 개념 정의와 갈등을 일으키는 경우가 있다. 예를 들어, 학생들은 0 차원인 점을 적절한 크기가 있는 반점으로 인식한다. 점에 대한 이러한 개념이미지는 "길이가 다른 두 선분 위의 점들이 일대일 대응한다"는 명제를 인식하는데 어려움의 원인이 된다. 따라서, 이러한 개념이미지와 개념 정의간의 갈등 요인들은 교수-학습 상황에서 신중히 고려하여야 한다.

무한 개념의 이해에서, 잠재적 무한 개념에 의한 '개념 이미지'는 실무한 개념에 의한 '개념 정의'와 갈등의 원인이 된다. 여러 연구 결과에 따르면, 직관은 실 무한 개념을 수용하는데 어려움을 느끼게 한다는 것을 보여준다 (Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Fischbein, Tirosh & Melamed, 1981; Tirosh, 1991; 1999). 이러한 연구들의 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다(Tirosh, 1991, pp. 201-202).

- 실무한 개념과 우리의 지적 쉐마 사이에는 깊은 모순이 있다.
- 실무한에 대한 직관은 나이나 학교 교육에도 별로 나아지지 않는다.

· 실무한에 대한 직관은 제기된 문제의 개념적 상황이나 그림으로 표현된 상황에 매우 민감하다.

· 학생들은 여러 가지 무한에 대한 아이디어를 가지고 있으며, 이러한 아이디어들은 실 무한에 대한 문제를 해결하는 능력에 상당히 영향을 끼친다. 이러한 아이디어들은 주로 잠재적 무한 개념을 토대로 한다.

· 아동들의 실무한에 대한 경험들은 무한 농도의 개념과 거의 관련이 없다. 그러나 그들은 커지거나 작아지는 양에 대한 수업을 통하여 무한에 대한 경험을 하게 되는 것이 보통이다.

무한은 특히, 직관의 영향이 크게 작용한다. 우리의 정신은 유한한 구조 체계에 적합하며, 따라서 완결된 총체로서 받아들여지는 실무한 개념보다는 무한히 진행되어 가는 과정으로서 무한을 인식하는데 익숙하다. 이러한 예는 Fischbein, Tirosh & Melamed(1981)의 연구에서 확인되어진다.

선분 $\overline{AB}=1m$가 주어져 있다. 다른 선분 $\overline{BC}=\frac{1}{2}m$를 붙인다. 같은 방법으로 $\overline{CD}=\frac{1}{4}m$, $\overline{DE}=\frac{1}{8}m$ ……를 계속하여 붙여 나가자. 계속해서 선분을 붙여 가는 이 과정의 끝은 있는가, 없는가?

이 문제는 잠재적 무한 개념을 요구하며, 이 문제에 응답자의 84.1%의 학생들이 옳은 답을 하였다. 유사한 결과는 우리 나라의 고등학생들의 반응에서도 확인되어진다(이대현, 2001).

그러나, 실무한 개념이 요구되어지는 문제의 경우에는 정답률이 현저히 낮음을 다음 문항에서 발견할 수 있다.

선분 $\overline{AB}=1m$가 주어져 있다. 다른 선분 $\overline{BC}=\frac{1}{2}m$를 붙인다. 같은 방법으로 $\overline{CD}=\frac{1}{4}m$, $\overline{DE}=\frac{1}{8}m$…를 계속하여 붙여 나가자. 계속해서 선분을 붙여 가는 이 과정에서 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\cdots$의 값은 얼마인가?

이 문제에는 단지 응답자의 5.6%만이 정확히 2m라고 답하였다. 51.4%는 합이 ∞라고 답하였고, 16.8%는 합이 2보다 작다고 응답하였다(Fischbein, Tirosh & Melamed, 1981). 이러한 문제는 반-직관적인 상황을 나타낸다. 즉, 소수의 학생만이 옳은 답에 반응할 뿐이며, 이들은 그들의 답을 확신하지 못한다. 반면에 학생들은 오답에 많이 반응하였으며, 그들은 답에 확신하는 정도가 강하였다.

무한 개념에 대한 이해에서 실 무한 개념보다 잠재적 무한 개념에 학생들이 보여주는 강한 반응은 순환소수 문제의 경우에도 확인되어진다. "0.999…가 1과 같은가 아니면 작은가?" 라는 질문에 고등학생 39.5%가 "1보다 작다"라고 답하였다. 또한, 조사대상 학생과의 면담에서 학생들은 실 무한 개념에 의한 답을 산출한다 할지라도 여전히 잠재적 무한 개념에 의존하고 있음을 알 수 있다(이대현, 2001, pp. 90-92).

면담자 : 같다고 그랬어?
학생 : 네. 그러니까 0.999…는 1인데, 0.333…을 3배한 것과 같으니까, 결국에는 $\frac{1}{3}\times3=1$과 같아요.
면담자 : 답에 대해서 확신이 가니?
학생 : 아닌 것 같아요.
면담자 : 왜?
학생 : 0.999…가 계속 가면 1이 안될 것 같아요.
면담자 : 한없이 가는데도?
학생 : 뭐가 약간 모자라는 것 같아요.
면담자 : 1에 가까이는 가지만? 그런데 1이라는 답을 알 수 있었어?
학 생 : 식으로 하면은 1이 나오니까요.
면담자 : 두 개 중에 하나는 모순이 있겠네. 그

럼 학교에서 배운 이런 방법과 네가 가지는 생각 중 어떤 것에 강하게 비중을 두고 싶어?

학생 : 1이 안 된다는 쪽 이예요.

면담자 : 안 된다 쪽에? 1은 안 된다면 끝은 어떻게 될까?

학생 : 끝은 없죠.

면담자 : 한없이 간다?

학생 : 그렇죠.

위의 예시와 같이 무한 개념의 경우에, 많은 학생들은 실무한 개념을 쉽게 받아들이지 못하였고, 잠재적 무한 개념을 강하게 형성하고 있음을 알 수 있다. 이것은 학교 수학을 통하여 실무한의 개념이 도입되고, 설명된 이후에도 갈등을 일으키는 원인이 되었다. 순환 소수의 경우, 학생들은 교사나 교과서에 의해 제시된 실 무한 개념을 받아들이지만, 그들이 가지고 있는 잠재적 무한 개념은 이를 수용하지 않는 것으로 나타났다. 비록, 실무한의 개념에 근거하여 이 유형의 문제에 옳은 답을 한 학생조차도 자신의 답을 확신하지 못하였고, 잠재적 무한 개념과 갈등을 나타내었다.

학생들의 이러한 반응은 직관의 외삽성과 관련된다. 즉, 직관의 외삽적인 능력이 실제로 주어진 무한집합에 대하여 끊임없는 과정의 마지막 상태를 의미하는 실무한 개념에는 적용되지 않는 경우이다(Fischbein, 1987). 이 경우에, 직관의 외삽성에 의한 잠재적 무한 개념은 문제 해결 과정에서 인식론적 장애의 원인이 되었음을 알 수 있다.

마찬가지로, 무한 량을 비교할 때 학생들이 사용하는 직관적 준거는 잠재적 무한 개념에 의존하고 있음을 Fischbein(1987) 자신이 이러한 유형의 내용에 대한 수업을 하는 동안 나타난 대화의 일부에서도 확인되어진다(pp. 138-139).

학생 : 선생님께서는 두 선분 AB와 CD는 같은 개수의 점을 갖고 있다고 하셨어요?

교사 : 그렇지. 두 집합은 동치라는 것. 다시 말하면, 두 집합의 원소 사이에 일대일 대응이 성립한다는 의미이지.

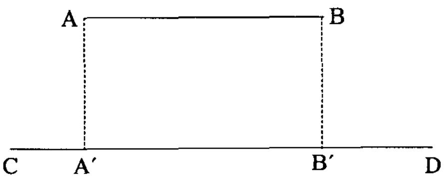
학생 : 선은 점으로, 그리고 점만으로 이루어졌다고 하시는 군요.

교사 : 확실하지.

학생 : 그렇다면, 선분 AB를 선분 CD 위에 놓았을 때는 선분 CA′와 B′D에 들어 있는 점들은 두 선분의 공통 부분에 들어 있지 않습니다.

교사 : 그렇지.

학생 : 그러면, 선분 CA′와 선분 B′D를 긋는데 필요한 점들은 어디서 찾습니까?



<그림> 점의 Spot 모델에 의한 직관적 오류

이 반응에서 알 수 있듯이, '전체-부분'의 원리에 근거한 직관적 사고에 의한 판단은 "길이가 다른 선분 위의 점들이 일대일 대응되는가"에 대한 학습에서, 인식론적 장애의 원인이 됨을 알 수 있다. 유사한 장애는 "짝수는 자연수와 일대일 대응하는가"라는 문제에서도 나타난다.

이와 같이, 무한 개념에 관한 문제에 오류를 보이는 것은 직관에 의한 판단의 결과로써 나타나기 때문이며, 직관의 근원이 일상 생활에 바탕을 둔 경험에 따르기 때문이다. 그런데 우리의 경험은 유한한 대상에 적합하게 작용하며, 이것은 무한에 관련된 개념이 실 무한에 관련된 경우에 오류를 일으키는 주요 원인이 된다.

이에 대해 Fischbein(1987)은 제 2직관의 계발

이 필요하다고 한다. 제 2직관은 본래의 근원이 없는 새로운 직관을 계발할 수 있다는 가정으로 나타나며, 직관 능력에 대한 교육가능성을 함의한다. 만약 수학자들에 의해 "무한집합은 그의 진 부분집합과 동치이다"라는 진술이 하나의 신념으로 받아들여진다면, 이는 그 해석이 신념 속에 학습된 개념으로 변형되어, 제 2직관으로 나타나게 된다. 마찬가지로, 무한 개념에 대한 이해에서 실 무한 개념에 대한 제 2 직관을 세워야 한다. 실 무한에 관한 형식적 지식의 기초를 형성하기 위하여 적절한 직관적 배경을 구성해야 한다. 이를 위해 학생들이 개인적으로 그리고 경험적으로 정신적인 생산적 활동에 참여하는 교수학적 상황을 창조해야 한다. 학생들은 갈등을 경험하고 갈등을 극복하는 노력을 함으로써 특정한 명제나 개념을 지적으로 일관성 있는 것으로 받아들일 수 있게 된다. 비 직관적인 것을 논리적인 바탕 위에서 의미 있는 것으로 수용하는 것은 수학교육에서 기본적으로 획득되어야 한다(우정호, 2000). 이러한 측면에서 수학에서 직관의 사용에 대해 비판했던 Hahn도 "절대적으로 직관은 변할 수 있고, 고등 직관은 적절한 교수에 의하여 형성될 수 있으며, 정확하고 타당한 직관은 과학과 수학교육에서 개념적 구조를 세우는데 필수적"이라고 인정하고 있다(Fischbein, 1987).

Ⅳ. 무한 개념 지도와 직관

Piaget의 발생적 인식론에 따르면, 지식의 획득은 '동화'와 '조절'을 통해 이루어지는 '균형'의 과정이다. 즉, 새로운 개념을 기존의 인지 구조에 통합시키는 동화의 과정과 기존의 인지 구조를 새로운 개념에 맞도록 변화시키는 조절의 과정이 성공적으로 일어날 때, 개념은 획득되어지며, 지식은 구성되어진다.

이러한 Piaget의 관점에 비추어 해석하면, 학생들이 수학의 지식 · 개념 · 원리 · 법칙 등을 이해하려는 상황에서, 동화와 조절을 통한 균형의 과정이 적절히 일어나지 않으면, 학생들에게 새로운 지식의 구성은 불가능하며, 교수-학습 상황은 어려움에 직면하게 된다(이대현, 2001). 따라서 학생들이 가지고 있는 장애를 극복하기 위해서는 학생들의 기존의 인지 구조를 변화시키는 교수학적 노력이 필요하다. 이를 위해 학생들이 기존의 지식으로는 해결할 수 없는 문제를 제시하여 기존의 지식과 정신적인 갈등을 느끼도록 해주어야 한다.

학생들이 무한에 대하여 직관적으로 인식하는 개념은 잠재적 무한 개념에 근거한다. 즉, 우리의 잠재적 무한 개념은 실 무한 개념의 인식에 어려움을 야기 시킨다. 따라서, 실 무한 개념에 적절한 직관을 계발하여야 한다. 이러한 직관은 우리의 인식에 깊이 뿌리내리고 있는 신념(예를 들면, 전체는 부분과 동치가 될 수 없다)에 근본적인 변화를 요구한다.

특히, 학생들의 직관적 판단에 의한 오류가 발생할 수 있는 수학 내용을 학습하기 위해서는 이들 수학 이론에 대한 학생들이 가지고 있는 직관적 판단에 의한 개념을 깊이 이해하여야 한다. 이는 어떤 개념이든지 이 개념이 생성되고 발달해 가는 과정에서 발생하는 인식론적 장애가 존재하기 때문이며, 이러한 장애는 개개인의 학습자에게도 나타나기 때문이다.

따라서, 실 무한 개념에 관한 내용을 이해시킬 때에는 학습자가 가지고 있는 직관적 판단의 근거를 밝혀야 한다. 또한, 학생들이 가지고 있는 직관적 판단이 실 무한 개념과 갈등이 야기됨을 깨닫도록 해 주어야 한다.

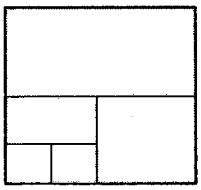
Fischbein(1987)은 심리학적 관점에서 두 종류의 직관을 구분하고 있다. 제 1직관은 체계적

인 교육을 받기 전에 자연스럽게 스스로 계발된 인지적 신념을 말하며, 제 2직관은 체계적인 지적 훈련을 통하여 계발된 직관을 말한다. 무한 개념과 관련하여, 실무한 개념을 받아들이기 위해서는 이에 대한 제 2직관이 계발되어야 한다. 그러나, 수학의 역사가 보여주듯이, 기존의 잠재적 무한 개념을 쉽게 일소하기는 어렵다. 이런 경우에 교사에 의해 제시되는 실무한 개념은 학생들에게 또 하나의 잠재적 갈등 요인이 된다. 따라서, 무한 개념의 이해를 위해서는 이 개념이 무한히 반복되는 과정이 아니라, 하나의 완결된 과정을 나타낸다는 것을 이해하도록 도움을 주어야 한다.

예를 들면, 무한 등비급수의 합

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdot\cdot\cdot=1$$

을 이해시키기 위하여 이를 표현한 시각화 경험은 유용하다. Nelsen(1993)은 이를 위해 정사각형의 분할 모델을 제시하고 있다.



<그림 1> 무한 등비급수의 합의 시각화 경험

이 모델을 통하여, 학생들은 주어진 무한 등비급수의 항이 무한히 반복된다 할지라도, 결국 무한 등비급수의 합은 하나의 완결된 수인 1이 됨을 쉽게 파악할 수 있으며, 무한급수의 합이 무한히 커지는 것은 아니라는 확신을 가질 수 있다.

한편, 직관에 의한 장애를 피하는 것은 가능하지 않으므로, 이에 대처할 교수 전략을 세워야 한다. 수학과 과학의 역사를 통하여 알 수 있듯이, 오랜 기간 동안 옳다고 믿어 왔던 사실들이 더 이상 진리가 아닌 것과 같이, 학생들은 해결중인 또는 해결한 문제가 잘못됐을지도 모른다는 것을 느끼도록 해야 한다. 이를 위해 학생들은 결과를 확인하는 절차를 배워야 하며, 해결하려는 문제에 의해 직접적으로 제기된 것 보다 더 넓은 관점으로 결과를 해석하는 것을 배워야 한다(Fischbein, 1987). 이런 과정에 메타인지 능력이 적절히 융화되어야 한다. 즉, 자신의 활동을 스스로 분석하고 조절하는 것을 통하여 직관적 판단에 의해 잘못된 단계나 과정을 파악해야 한다. 이것은 직관이 새로운 수학적 개념의 이해나 문제해결 과정에서 오류를 일으킬 수 있음을 알고, 직관과 논리의 적절한 균형에 의해 수학 학습이 이루어져야함을 암시한다. 학생들은 제1 직관에 의한 잠재적 무한 개념을 제어하고, 형식적 체계 내에서 정의되는 실 무한 개념을 이해하도록 해야 한다.

Ⅴ. 결론

무한 개념은 원하는 목표에 도달할 때까지 수학적 과정을 계속하는 잠재적 무한 개념과 무한 전체를 하나의 완결된 상태로 간주하는 실 무한 개념이 병존해 왔다. Aristotle이래로 실 무한 개념을 거부하고 잠재적 무한 개념만을 인정해 온 배경에는 무한 개념 자체에 대한 인간의 직관적 판단에 근거한다. 무한 개념의 발달의 역사가 보여주듯이, 이 개념에 나타나는 인식론적 장애는 학습자에게도 유사하게 나타난다. 따라서, 학교 수학에서 실 무한 개념을 학습자에게 제시할 때는 학습자들이 가지고 있는 인식론적 장애를 파악해야 하며, 장애를 극복할 수 있는 방안을 모색해야 한다.

무한 개념의 이해에 대한 많은 연구들은 학습자들이 실 무한 개념을 수용하는데 어려움을

느낀다는 것을 보여준다. 이것은 무한 개념에 대한 직관적 판단이 일상 생활에 근거를 두기 때문이며, 인간의 정신 구조가 유한 체계에 적합하기 때문이다.

따라서, 무한 개념에 대한 학습에서는 실 무한 개념에 적절한 제 2직관을 형성해야 한다. 이것은 우리의 인식에 강하게 형성되어 있는 근본적인 신념의 재조직을 요구한다. 이를 위해 실 무한 개념이 무한히 반복되는 과정이 아니라, 하나의 완결된 과정을 나타낸다는 것을 이해하도록 도움을 주어야 한다. 여기에 학생들이 직관적으로 쉽게 이해할 수 있는 다양한 시각적 자료는 유용하다. 또한, 학생들이 가지고 있는 기존의 지식으로는 해결할 수 없는 상황을 제시함으로써 정신적 갈등을 야기하도록 하고, 다른 대안을 모색해 보도록 유도하는 것이 필요하다. 이때 자신의 사고 과정에 대한 메타인지 능력의 함양은 유용하다.

마지막으로, 수학 학습은 공리와 정의에 의해 규정된 형식적인 개념의 의미를 명확히 파악하도록 지도되어야 한다. 한편, 수학 개념에 내재된 학습자가 가지는 직관적 의미를 고려하여, 직관적 해석이 이 개념의 이해에 미치는 영향을 고려하여야 하며, 수학 학습은 직관과 논리의 적절한 균형에 의해 이루어지도록 해야 한다.

참고문헌

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.

이대현 (2001). 수학 문제해결과정에서 고등학생들의 직관적 사고의 분석. 한국교원대학교 박사학위 논문.

임정대 (1985). 수학적 존재와 인식. 청문각.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking(pp. 153-166).* Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel Publisching Company.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*, 12, 491-512.

Klein, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty.* 박세희(역) (1988). 수학의 확실성. 서울: 민음사.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking.* The Mathematical Association of America.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking(pp. 3-21).* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tirosh, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorian theory. In Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking(pp. 199-214).* Kluwer Academic Publishers.

_____(1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(3), 341-349.

Understanding of the concept of infinity and the role of intuition

Lee, Dae Hyun (Jeon-ju Technical High School)

Infinity is one of the important concept in mathematics, science, philosophy etc. In history of mathematics, potential infinity concept conflicts with actual infinity concept. Reason that mathematicians refuse actual infinity concept during long period is because that actual infinity concept causes difficulty in our perceptions. This phenomenon is called epistemological obstacle by Brousseau.

Potential infinity concept causes difficulty like history of development of infinity concept in mathematics learning. Even though students learn about actual infinity concept, they use potential infinity concept in problem solving process.

Therefore, we must make clear epistemological obstacles of infinity concept and must overcome them in learning of infinity concept. For this, it is useful to experience visualization about infinity concept. Also, it is to develop meta-cognition ability that students analyze and control their problem solving process.

Conclusively, students must adjust potential infinity concept, and understand actual infinity concept that is defined in formal mathematics system.