

研究論文

불확정 모형하에서 가속수명시험의 최적 설계

서순근 · 하천수

동아대학교 기계·산업시스템공학부 산업시스템공학 전공

김갑석

WithGold.com

Optimal Design of Accelerated Life Tests under Model Uncertainty

Sun-Keun Seo · Chen-Soo Ha

Department of Industrial and Systems Engineering, Dong-A University

Kab-Seok Kim

WithGold.com

Keywords: Accelerated Life Tests(ALTs), Compromise ALT Plan, Simple Linear/Quadratic Model, Exponential/Weibull/Lognormal Distribution

Abstract

This paper presents new compromise ALT plan which is applied to situations that true relationship between stress and parameters is not known exactly. The assumed failure distribution of this study is one of location-scale family, i. e., exponential, Weibull, and lognormal distributions which have been ones of the popular choices of failure distributions. The method of applying the stress is constant, and the censoring mechanism is Type I censoring.

Compared with existing compromise plans under true simple linear model in terms of statistical efficiency, the efficiency of new compromise plan is better than the corresponding other compromise ones in most cases. For case when true model is quadratic, this plan can be used without any severe loss in statistical efficiency.

The proposed new compromise ALT plan is illustrated with a numerical example and sensitivity analyses are conducted to study effects of pre-estimates of design parameters.

1. 서론

설계 및 생산기술의 발달로 인하여 장비나 제품 혹은 부품들의 수명은 점점 길어지지만

소비자들의 다양한 요구에 따라 제품의 수명 사이클은 감소되고 있는 실정이다. 이러한 여건하에서 제품 혹은 장비의 수명을 일반적인 사용조건하에서 실험할 경우 시험 단위들이 장시간 동안 거의 고장나지 않거나 혹은 심각하게 열화되지 않으므로, 대부분의 신뢰성 시험에서는 단시간 내에 해당 제품 및 장비의 수명을 파악하기 위하여 사용조건보다 가혹한 부하(stress)를 가하여 고장 가능성이 높도록 시험하는 가속수명시험(Accelerated Life Test ; ALT)을 이용하고 있다. 이때 ALT를 통해 얻어진 자료는 물리적으로 스트레스와 수명과의 관계를 설명할 수 있는 적절한 통계적 가속모형을 통해서 외삽하여 정상 사용조건하의 수명을 평가한다 「Nelson, 1990」.

지금까지 수행된 가속수명시험에 관한 연구들은 시험의 수행전에 규명되어야 하는 스트레스와 수명과의 관계를 단순선형으로 가정하여 통계적 효율을 최대화 할 수 있는 두 스트레스하에서 시험하는 최적계획에 관한 연구들과 단순선형성의 여부를 판단하기 위하여 세 스트레스 이상에서 시험하는 실용적 혹은 절충형 계획들에 관한 연구들로 구분된다.

일반적으로 최적계획은 통계적으로 효율성은 높지만 두 스트레스에서만 시험하기 때문에 모수와 스트레스 사이의 이차 이상의 다항모형에 관한 적정성 여부에 대한 검토가 불가능하며 저 스트레스 수준이 높아서 외삽의 효과가 클 경우가 발생할 수 있고, 저 스트레스 수준에서 시험종료시까지 고장이 관측되지 않을 수도 있다. 이러한 최적계획의 단점들을 보완하기 위하여 개발된 3 혹은 4

스트레스 수준에서 시험되는 절충형 계획은 통계적 효율성 측면에서 최적계획보다 낮지만 저 스트레스 수준이 사용조건에 보다 가깝게 설정되므로 스트레스에 의한 외삽량이 줄어들고, 시험단위의 수를 저 스트레스에서 고 스트레스 순으로 할당하므로 각 스트레스에서 고장개수가 증가하게 되고, 가정된 단순선형모형의 적합성을 확인할 수 있다.

그러나 지금까지 개발된 대부분의 절충형 계획에서는 수명과 스트레스 사이의 모형이 단순선형(이하 선형)이라고 가정하고 있으므로 실제 모형이 선형이 아닐 경우 모형의 가정에 대한 적합성을 판별할 수는 있지만 적절한 시험계획이라고는 볼 수 없다.

따라서 본 연구에서는 모형의 판정이 불확정적일 때 일차와 이차 모형을 동시에 고려할 수 있는 새로운 절충형 계획을 제시하고자 한다.

2. 신 절충형 가속수명시험 계획의 설계

가속수명시험의 설계에 관한 최초의 연구로서 수명과 스트레스사이의 관계가 선형일 때 Nelson과 Kielpinski(1976)과 Nelson과 Meeker(1978)는 수명이 각각 대수정규분포와 Weibull 분포를 따르며 정시종결인 경우에 연속검사하에서 최적계획을 제시하였으며, Meeker와 Hahn(1985)은 수명이 Weibull 분포와 대수정규분포를 따를 때 세 스트레스 수준에서 시험하는 절충형 계획을 제시하였다. 또한 Yum과 Choi(1989)는 수명자료가 지수분포이고 정시종결인 경우 정기검사하의

최적계획을 설계하였으며, Seo와 Yum(1991)은 Yum과 Choi의 연구를 확장하여 가속모형이 선형인 경우에 와이블분포를 따르고 간헐적 검사일 때 검사시각이 설계변수에 포함된 최적계획을 설계하였으며, 세 스트레스 수준에서 시험하는 실용적 계획을 제시하였다.

그러나 이러한 절충형 계획들에서 가정된 선형모형이 실제와 적합하지 않을 때에는 선형-이차 판별기준(linear-quadratic discriminator criterion)에 적합시키면 가정된 선형모형의 타당성을 검토할 수 있으므로, Meeker(1884)는 Weibull과 대수정규수명분포하에서 이차모형의 이차항의 계수에 대한 추정량의 점근적 분산이 최소가 되도록 중간 및 저 스트레스 수준과 이들 스트레스 수준에 할당되는 시험제품의 할당비율을 결정하였다. 한편 Choi와 Yum(1988)은 수명이 지수분포를 따를 때 대수평균수명과 스트레스의 관계가 실제 이차 모형이지만 가정된 모형이 선형모형인 경우에 사용조건하의 대수평균수명 추정치의 평균제곱오차(mean squared error ; MSE)가 최소가 되도록 고스트레스 표본 할당수만을 결정할 수 있는 방법을 제시하였다.

일반적으로 가속수명시험을 실시함에 있어서 스트레스와 수명사이의 관계가 대수 선형 혹은 이차 관계에 있다고 정확하게 판단할 수 없는 경우가 종종 발생된다. 따라서 본 연구에서는 시험자가 시험제품의 가속모형을 정확히 판단할 수 없을 경우에 적용할 수 있는 선형과 이차 모형을 동시에 고려할 수 있는 새로운 절충형 시험계획을 설계하고자 한다.

2.1 가정 및 모형

본 연구에서 제시하고자 하는 절충형 가속수명시험 계획의 가정 사항은 다음과 같다.

1. 임의의 스트레스(s)에서 대수수명 ($Y = \ln T$)은 위치척도군 형태의 수명분포(지수, 와이블분포일 때는 극소치(smallest extreme value) 분포를, 대수정규분포일 때는 정규분포)를 따르며 각각의 확률밀도함수는 다음과 같다.

지수분포:

$$f_T(t) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \quad (1)$$

$$f_Y(y) = \exp[(y - \mu) - \exp(y - \mu)]$$

단, $\mu = \ln \theta$

와이블분포 :

$$f_T(t) = \frac{\delta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\delta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\delta\right] \quad (2)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[\frac{y-\mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

단, $\mu = \ln \theta, \sigma = \frac{1}{\delta}$ (지수분포이면, $\sigma=1$)

대수정규분포 :

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} \exp\left[-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

2. 척도모수 σ 는 스트레스에 관계없이 일정하다.

3. 위치모수는 식 (4)과 (5)와 같이 스트레
스 s 의 일차 또는 이차함수이다.

$$\mu(s) = \ln \theta = \beta_0 + \beta_1 s: \text{선형모형} \quad (4)$$

$$\mu(s) = \ln \theta = \beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2: \text{이차모형} \quad (5)$$

4. N 개의 시험단위 중에서 각 스트레스에
서 시험되는 n_i 는 스트레스 수준에 대
해 독립적으로 시험되며 t_{c_i} 까지 관측된
다. 그리고 시험제품 할당비율 α_i 는 다
음과 같다.

$$\alpha_i = n_i / N, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0$$

5. 시험단위의 수명은 서로 독립이다.

그리고 본 연구에서 제시하고자 하는 가속
수명시험은 다음과 같은 조건 하에서 수행된
다.

1. 시험되는 스트레스 수준수(m)는 저·중
간·고 스트레스($s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$)로 최대 3
개이고, 각 수준에서 스트레스는 일정하
게 가해진다.
2. 각 스트레스에 할당되는 시험단위는 동
시에 각 스트레스 별로 규정된 시험종결
시간(t_{c_i})까지 시험된다.
3. 고 스트레스수준(s_3)은 모든 ALT 계획
에서 시험이 실시되며 스트레스와 모수
의 관계식(즉, 식(4)와 (5))이 성립되는
범위를 고려하여 미리 정해진다.

가속상황하에서 일반적으로 관심의 대상이
되는 사용 스트레스(s_0)하에서 수명의 분위
수 t_q 나 대수수명의 분위수 y_q 는 다음과
같이 구할 수 있다.

지수분포 :

$$y_q = \ln t_q = \sum_{k=0}^p \beta_k s_0^k + \ln[-\ln(1-q)] \quad (6)$$

와이블분포 :

$$y_q = \ln t_q = \sum_{k=0}^p \beta_k s_0^k + \sigma \ln[-\ln(1-q)] \quad (7)$$

대수정규분포 :

$$y_q = \ln t_q = \sum_{k=0}^p \beta_k s_0^k + z_q \sigma \quad (8)$$

단, $p=1$ 이면 선형모형, $p=2$ 이면 이차모형
 z_q : 표준정규분포의 제 $100 \times q$ 분위수

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma$ 의 추정방법으로 일치성
(consistency), 점근적 효율성(asymptotic
efficiency), 정규성(normality)의 바람직한 대
표본 성질을 가지는 최우추정법(maximum
likelihood estimation)이 이용되며, 스트레스
 s_i 와 주어진 시험종결시간(t_{c_i})하에서의 j 번
째 시험단위의 대수우도방정식은 다음과 같
다.

$$L_{ij} = I(t_{ij}) \ln f(t_{ij}) + [1 - I(t_{ij})] \ln [1 - F(t_{c_i})] \quad (9)$$

$$\text{단, } I(t_{ij}) = \begin{cases} 1, & t_{ij} \leq t_{c_i} \\ 0, & t_{ij} > t_{c_i} \end{cases}$$

따라서 N 개의 독립 관측치들의 표본 대

수우도함수는 다음과 같다.

$$L_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} L_{ij} \quad (10)$$

통계적 효율성을 나타내는 설계기준으로서 식 (10)을 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma$ (지수분포는 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 만)에 대하여 편미분하여 음의 기대값을 취하여 최우추정량에 대한 Fisher 정보량을 이용한 \hat{y}_q (y_q 의 최우추정량)의 점근적 분산(asymptotic variance)이 선택될 수 있으므로 세 수명분포의 모수에 대한 최우추정량의 Fisher 정보량 행렬은 대칭행렬이 되며 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = \frac{N}{\sigma^2} \begin{bmatrix} f_{kl} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$f_{kl} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_i A(t_{c_i}) s_i^{k+l}, & k=0, 1, 2, l=k, \dots, 2 \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i B(t_{c_i}) s_i^l, & k=3, l=0, 1, 2 \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i C(t_{c_i}), & k=l=3 \end{cases}$$

단, 지수분포인 경우: F 는 3×3 ($k, l=0, 1, 2$) 행렬이 되며

$$A(t_{c_i}) = 1 - \exp\left(-\frac{t_{c_i}}{\theta_i}\right).$$

Weibull 분포의 경우:

$$A(t_{c_i}) = G(z_{c_i})$$

$$B(t_{c_i}) = \int_{-\infty}^{z_{c_i}} (1+z)g(z) dz$$

$$C(t_{c_i}) = \int_{-\infty}^{z_{c_i}} (1+z)^2 g(z) dz$$

$$\text{단, } z_{c_i} = \frac{\ln t_{c_i} - \mu(s_i)}{\sigma}$$

$G(\cdot)$ 는 극소치분포의 누적분포함수

대수정규분포의 경우 :

$$A(t_{c_i}) = \Phi(z_{c_i}) - \phi(z_{c_i}) \left[z_{c_i} - \frac{\phi(z_{c_i})}{1 - \Phi(z_{c_i})} \right]$$

$$B(t_{c_i}) = -\phi(z_{c_i}) \left[1 + z_{c_i} \left\{ z_{c_i} - \frac{\phi(z_{c_i})}{1 - \Phi(z_{c_i})} \right\} \right]$$

$$C(t_{c_i}) = 2\Phi(z_{c_i}) - z_{c_i} \phi(z_{c_i}) \left[1 + z_{c_i}^2 - \frac{z_{c_i} \phi(z_{c_i})}{1 - \Phi(z_{c_i})} \right]$$

단, $\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률 밀도함수 및 누적분포함수

Fisher 정보량을 이용하여 사용스트레스에서의 대수수명의 분위수에 관한 점근적 분산을 식 (12)와 같이 구할 수 있다.

$$Avar(\hat{y}_q) = HF^{-1}H^T \quad (12)$$

$$\text{단, } H = \begin{cases} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial y_q}{\partial \beta_0} & \frac{\partial y_q}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial \beta_p} \end{array} \right] \\ : \text{지수분포} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial y_q}{\partial \beta_0} & \frac{\partial y_q}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial \beta_p} & \frac{\partial y_q}{\partial \sigma} \end{array} \right] \\ : \text{Weibull 또는 대수정규분포} \end{cases}$$

$Avar(\hat{y}_q)$ 에 N/σ^2 을 곱하여 N 과 σ 에 의존하지 않는 식 (13)과 같은 표준화한 점근적 분산이 일반적으로 가속수명시험의 최적화 기준이 된다.

$$v_0 = \left(\frac{N}{\sigma^2}\right) \cdot Avar(\hat{y}_q) \quad (13)$$

2.2 최적화 기준

스트레스와 모수에 관한 가속모형이 선형이나 혹은 이차라는 것이 알려져 있다면 가속수명시험의 최적설계를 위한 최적화 기준으로 일반적으로 사용조건하에서 대수수명의 저분위수의 점근적 분산이 사용된다.

일정스트레스 및 연속검사하에서 정시관측 중단인 경우 수명과 스트레스가 식 (4)와 같이 선형관계일 때 식 (11)~(13)으로부터 v_0 를 구할 수 있으며, 특히 지수분포일 경우 절충형 계획의 최적화 기준이 되는 사용조건하의 표준화된 점근적 분산을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_L &= \frac{N}{\sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}^T \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i s_i Q_i / \{ \alpha_1 \alpha_2 (s_1 - s_2)^2 Q_1 Q_2 \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_3 (s_1 - s_3)^2 Q_1 Q_3 + \alpha_2 \alpha_3 (s_2 - s_3)^2 Q_2 Q_3 \} \\ \text{단, } Q_i &= A(t_{c_i}) = 1 - \exp(-t_{c_i}/\theta_i). \end{aligned}$$

모수와 스트레스의 관계가 식 (5)와 같이 이차모형일 때 v_0 는 Fisher Information 행렬을 이용하여 식 (11)~(13)으로부터 구할

수 있으며, 특히 지수분포의 통계적 최적계획의 최적화 기준이 되는 사용조건하의 표준화된 점근적 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_Q &= \frac{N}{\sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}^T \\ &= \frac{s_2^2 s_3^2}{\alpha_1 (s_1 - s_2)^2 (s_1 - s_3)^2 Q_1} \\ &\quad + \frac{s_1^2 s_3^2}{\alpha_2 (s_1 - s_2)^2 (s_2 - s_3)^2 Q_2} \\ &\quad + \frac{s_1^2 s_2^2}{\alpha_3 (s_1 - s_3)^2 (s_2 - s_3)^2 Q_3} \end{aligned}$$

그러나 모형이 선형인지 이차인지 정확히 알려져 있지 않다면 선형 혹은 이차 모형으로 가정하여 점근적 분산을 최소화하는 것은 타당한 최적화 기준이 될 수 없다. 모형이 정확하게 알려져 있지 않을 때의 기존 연구로는 단계스트레스(step stress) 가속수명시험계획을 제시한 Khamis & Higgins(1996)의 연구와 베이지안 접근법을 이용한 Chaloner & Larntz(1992)의 연구가 있다. Khamis & Higgins(1996)는 최적화 기준으로 모형이 선형일 경우 최적계획과 절충형 계획의 점근적 분산비와 모형이 이차일 경우의 최적계획과 절충형 계획의 점근적 분산비를 곱하여 통계적 효율로 설정하고 이를 최대화하는 단계 스트레스 가속수명시험 계획을 설계하였다. Chaloner & Larntz(1992)는 수명분포와 가속모형이 모두 정확하게 알려져 있지 않을 때 적용할 수 있는 가속수명시험 계획을 제시하였는데, 수명분포로는 대수정규와 와이블분포를, 가속모형에 대해서는 선형과 이차모형을 절충하기 위하여 각각의

사전분포가 제시되면 사전분포의 기대값들을 가중값으로 하여 점근적 분산을 최소로 하는 시험계획을 도출하였다.

본 연구에서는 이상의 두 연구를 확장시켜 모형이 불확실한 상황에서 선형 혹은 이차 모형을 동시에 고려하기 위하여 식 (16)과 같은 통계적 효율을 일정스트레스 ALT 계획의 최적화 기준으로 설정하였다.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \\ & \text{eff}(s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2) = [\text{eff}_L]^{w_1} \cdot [\text{eff}_Q]^{w_2} \quad (16) \\ & \text{subject to} \quad 0 < s_1 < s_2 < 1 \\ & \quad \quad \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1 \\ & \quad \quad \quad s_3 = 1 \\ & \quad \quad \quad \alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned}$$

단, w_1, w_2 : 선형과 이차모형의 가중인자

$$\text{eff}_L = \frac{v_{LO}^*}{v_{LC}(s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2)}$$

$$\text{eff}_Q = \frac{v_{QO}^*}{v_{QC}(s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2)}$$

v_{LC} : 선형 모형하의 3-스트레스 절충형 계획의 점근적 분산

v_{QC} : 이차 모형하의 3-스트레스 절충형 계획의 점근적 분산

v_{LO}^* : 선형 모형하의 2-스트레스 최적 계획의 점근적 분산

v_{QO}^* : 이차 모형하의 3-스트레스 최적 계획의 점근적 분산

최적계획의 분산은 통계적으로 가장 적은

분산을 가지므로 식 (16)에서 v_{LO}^* 와 v_{QO}^* 는 각각 v_{LC} 와 v_{QC} 보다는 적은 값을 가지게 되어 eff_L 과 eff_Q 는 0과 1사이에서 존재하게 된다. 따라서 선형 혹은 이차모형의 가중인자를 적절히 선택함으로써 제시된 설계 기준의 효율 eff 를 최대로 하는 결정변수 $s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2$ 를 선정할 수 있다.

w_1 과 w_2 는 시험자가 판단하여 설정하여야 하는 가중인자(weight factor)로서 $w_1 + w_2 = 1$ 이 성립하여야 하며, $w_1 = 1, w_2 = 0$ 으로 설정했을 때, 선형모형하의 3-스트레스 절충형 계획에 대응되는 최적계획은 2-스트레스 최적계획이 되므로 v_{LC} 는 v_{LO}^* 와 같게 되어 제안된 절충형 계획은 선형모형하의 2-스트레스 최적계획과 동일하게 된다. 또한 $w_1 = 0, w_2 = 1$ 로 설정하게 되면 이차모형하의 3-스트레스 절충형 계획의 최적계획은 3-스트레스 최적계획이 되므로 v_{QC} 은 v_{QO}^* 와 같게 되어 제안된 절충형 계획은 이차모형하의 3-스트레스 최적계획과 동일하게 된다.

2.3 신 절충형 계획의 설계 절차

제시된 신 절충형 계획의 설계절차를 구체적으로 기술하면 다음과 같다.

<단계 1> 모형모수들에 대한 사전추정과 적절한 가중인자를 선정하며 각 스트레스에서 동일한 시험중결시간을 적용한다($t_c = t_c$).

<표 1> 신 절충형 가속수명시험 계획 ($P_u=0.001, q=0.1$)

분 포		지수분포				Weibull				대수정규분포			
w_1	P_m	0.4955	0.4505	0.2505	0.1005	0.4955	0.4505	0.2505	0.1005	0.4955	0.4505	0.2505	0.1005
	P_h	0.99	0.90	0.50	0.20	0.99	0.90	0.50	0.20	0.99	0.90	0.50	0.20
1.0	s_1^*	0.6269	0.6247	0.5909	0.5192	0.6764	0.6834	0.6620	0.6153	0.3999	0.4403	0.4745	0.4717
	a_1^*	0.7893	0.8163	0.8482	0.8700	0.7117	0.7058	0.6821	0.6549	0.7656	0.7412	0.6957	0.6431
	v_0	64.212	90.212	178.65	347.30	76.78	119.95	280.17	643.54	9.65	14.90	33.37	73.73
0.8	s_1^*	0.3914	0.3886	0.3713	0.3188	0.3968	0.3970	0.3841	0.3472	0.2857	0.2693	0.2589	0.2439
	s_2^*	0.6647	0.6717	0.6542	0.6300	0.7056	0.7157	0.7151	0.7044	0.5388	0.5378	0.5799	0.6127
	a_1^*	0.3344	0.3597	0.4541	0.5985	0.2683	0.2791	0.3239	0.3751	0.5396	0.4465	0.4206	0.4355
	a_2^*	0.4914	0.4849	0.4224	0.3010	0.4926	0.4765	0.4153	0.3373	0.2656	0.3427	0.3313	0.2681
	eff	0.7650	0.7748	0.7927	0.8158	0.7830	0.7946	0.8183	0.8438	0.7566	0.7632	0.7948	0.8343
0.5	s_1^*	0.3437	0.3348	0.3094	0.2527	0.3562	0.3488	0.3303	0.2879	0.2311	0.2176	0.2091	0.1915
	s_2^*	0.6943	0.6982	0.6948	0.6801	0.7300	0.7385	0.7435	0.7441	0.6190	0.6189	0.6551	0.6898
	a_1^*	0.5421	0.5594	0.6277	0.7196	0.4529	0.4569	0.4769	0.4944	0.6081	0.5773	0.5550	0.5355
	a_2^*	0.3243	0.3193	0.2708	0.1992	0.3583	0.3496	0.3143	0.2730	0.2377	0.2584	0.2513	0.2254
	eff	0.7630	0.7773	0.8028	0.8340	0.7858	0.8010	0.8300	0.8576	0.7506	0.7536	0.8051	0.8491
0.2	s_1^*	0.3058	0.2993	0.2727	0.2188	0.3253	0.3191	0.3020	0.2618	0.1942	0.1868	0.1817	0.1669
	s_2^*	0.7152	0.7167	0.7163	0.7060	0.7456	0.7495	0.7550	0.7599	0.6734	0.6723	0.6981	0.7298
	a_1^*	0.6601	0.6665	0.7098	0.7697	0.5602	0.5596	0.5590	0.5553	0.6466	0.6374	0.6143	0.5803
	a_2^*	0.2360	0.2352	0.2018	0.1585	0.2893	0.2872	0.2765	0.2657	0.2296	0.2342	0.2369	0.2349
	eff	0.8753	0.8852	0.9020	0.9209	0.8892	0.8989	0.9150	0.9289	0.8668	0.8771	0.9024	0.9256
0.0	s_1^*	0.2862	0.2803	0.2577	0.2060	0.3786	0.3753	0.3696	0.3516	0.1753	0.1717	0.1699	0.1571
	s_2^*	0.7269	0.7267	0.7257	0.7186	0.7594	0.7596	0.7632	0.7665	0.6998	0.6961	0.7135	0.7405
	a_1^*	0.7076	0.7118	0.7435	0.7849	0.5536	0.5536	0.5469	0.5375	0.6638	0.6604	0.6402	0.6033
	a_2^*	0.2020	0.1987	0.1725	0.1457	0.3050	0.3038	0.3041	0.3114	0.2290	0.2310	0.2401	0.2560
	v_0	148.34	154.44	240.55	461.64	244.73	263.86	477.71	1170.2	39.55	37.45	52.81	97.11

<단계 2> 전절에서 제시된 모형에 $p=1, m=2$ 로 설정하여 적용하고자

하는 분포에 따라서 식 (13)을 이용하여 선형모형하의 2-스트레스 최적계획의 접근적 분산을

구한다.

<단계 3> $p=2, m=3$ 로 하여 적용하고자 하는 분포에 따라서 식 (13)을 이용하여 이차모형하의 3-스트레스 최적계획의 점근적 분산을 구한다.

<단계 4> $p=1, m=3$ 과 $p=2, m=3$ 으로 설정하여 v_{LC} 와 v_{QC} 를 찾고 이를 동시에 고려한 최적 절충형 계획을 얻기 위하여 식 (16)의 통계적 효율을 최대로 하는 $s_1^*, s_2^*, a_1^*, a_2^*$ 를 Powell (1964)의 conjugate direction method를 이용하여 찾는다.

이상의 단계에 따라서 Fortran으로 프로그래밍하여 일반적으로 널리 사용되고 있는 사용조건(s_0), 특정 중간 스트레스($s_2 = (s_1 + s_3)/2$), 고 스트레스(s_3) 수준에서 시험종결시간까지의 고장확률(P_u, P_m, P_h)에 대한 사전추정치들의 다양한 값들에 대해 각 분포별로 실험자가 용이하게 활용할 수 있도록 도출한 결과(s_1^* 과 s_2^* 는 0과 1사이의 표준화값) 중에서 일부분($q=0.1, P_u=0.001, P_h=0.2, 0.5, 0.9, 0.99, P_m$ 은 P_u 와 P_h 의 평균으로 설정)을 <표 1>에 정리하였다.

세 가지 분포에 대한 신 절충형 계획의 결

과를 요약 정리하면 다음과 같다.

1. 선형모형 쪽으로 더 많은 가중치가 부여될 수록 저 스트레스 수준 s_1^* 은 높아지고 중간 스트레스 수준 s_2^* 는 낮아짐을 알 수 있고, 할당비율은 저 스트레스에 보다 적은 할당을 하게 되며 중간 스트레스에 보다 많은 할당을 하고 있다.
2. P_h 가 높아지면 s_1^* 는 증가하는 경향을 보이고 있으며, s_2^* 는 증가하다가 감소하는 경향을 보이고 있다. 그리고 지수와 Weibull 분포인 경우 a_1^* 는 낮아지나 a_2^* 는 높아지지만 대수정규분포의 경우는 반대 현상이 발생된다.
3. 통계적 효율 eff 는 P_h 가 높을수록 낮아지고, 표에는 포함되어 있지 않으나, 거의 대부분의 경우에 P_u 가 높을수록 높아진다.
4. <표 1>에는 P_u 가 0.001인 경우만 제시되어 있으나, 0.0001, 0.01일 경우와 비교하였을 경우에, P_u 가 높을수록 스트레스 수준 s_1^*, s_2^* 는 모두 낮아진다. 그리고 저 스트레스 할당비율 a_1^* 는 높아지지만 중간스트레스 할당비율 a_2^* 는 낮아진다.

3. 신 절충형 계획의 비교 고찰 및 수치에

3.1 신 절충형 계획의 비교

본 연구에서 제시한 신 절충형 계획의 유용성을 입증하기 위하여 본 절에서는 기존에 널리 활용되고 있는 3-스트레스 절충형 계획들과 통계적 효율 측면에서 비교분석하였다. 비교하고자 하는 대상은 기존의 저·중간·고 스트레스 수준의 시험단위 할당비율이 4:2:1인 계획(Meeker와 Hahn(1985))과

7:2:1, 5:3:2 절충형 계획(Seo와 Yum(1991))과 본 연구에서 제시한 신 절충형 계획 중 가중인자 w_1 이 각각 0.8, 0.5, 0.2 인 경우, 그리고 모형이 이차인 경우이고 각각 지수, Weibull, 대수정규분포를 따를 때의 최적계획이다.

비교분석 방법은 각 가속수명시험 계획에 따라 시험을 실시할 때 실제 모형이 선형 혹은 이차일 경우 사용조건하에서 추정하고자 하는 분위수(지수분포의 경우 평균)의 점근적 분산의 일부결과를 <표 2>~<표 4>에 정리하였다.

<표 2> 지수분포하에서 3-스트레스 ALT 계획의 비교($P_u=0.001$, $P_h=0.9$, $q=0.1$)

		4:2:1	7:2:1	5:3:2	신 절충형			최적 (이차모형)
					$w_1=0.8$	$w_1=0.5$	$w_1=0.2$	
	s_1	0.6294	0.6009	0.6495	0.3886	0.3348	0.2993	0.2803
	s_2	0.8147	0.8005	0.8248	0.6717	0.6982	0.7167	0.7267
	α_1	0.5714	0.7000	0.5000	0.3597	0.5594	0.6665	0.7118
	α_2	0.2857	0.2000	0.3000	0.4849	0.3193	0.2352	0.1987
v_0	선형	122.0	112.7	128.9	108.3	133.7	158.8	175.0
	이차	2042.4	1858.3	2501.9	265.9	172.4	156.2	154.4

<표 3> Weibull 분포하에서 3-스트레스 ALT 계획의 비교($P_u=0.001$, $P_h=0.9$, $q=0.1$)

		4:2:1	7:2:1	5:3:2	신 절충형			최적 (이차모형)
					$w_1=0.8$	$w_1=0.5$	$w_1=0.2$	
	s_1	0.6770	0.6664	0.6834	0.3973	0.3517	0.3201	0.3062
	s_2	0.8385	0.8332	0.8417	0.7160	0.7382	0.7493	0.7524
	α_1	0.5714	0.7000	0.5000	0.2793	0.4556	0.5593	0.6090
	α_2	0.2857	0.2000	0.3000	0.4763	0.3509	0.2882	0.2636
v_0	선형	171.0	174.3	166.9	141.6	169.7	197.0	188.3
	이차	4020.2	4608.7	4090.5	303.4	205.9	188.6	186.7

<표 4> 대수정규분포하에서 3-스트레스 ALT 계획의 비교($P_u=0.001, P_h=0.9, q=0.1$)

		4:2:1	7:2:1	5:3:2	신 절충형			최적 (이차모형)
					$w_1=0.8$	$w_1=0.5$	$w_1=0.2$	
s_1		0.4383	0.4256	0.4465	0.2693	0.2176	0.1868	0.1717
s_2		0.7191	0.7128	0.7233	0.5378	0.6189	0.6723	0.6961
α_1		0.5714	0.7000	0.5000	0.4465	0.5773	0.6374	0.6604
α_2		0.2857	0.2000	0.3000	0.3427	0.2584	0.2342	0.2310
v_0	선형	20.49	20.60	20.42	17.92	22.62	27.33	30.35
	이차	196.8	217.4	206.8	69.11	42.30	37.91	37.45

<표 2>~<표 4>의 분석결과를 고찰하면, 실제 모형이 선형일 때 가중인자 w_1 을 너무 작게 부과할 경우 선형모형하에서 설계된 기존의 절충형 계획들보다 당연히 우수하지 못한 결과를 주지만, w_1 을 선형에 가깝게 큰 값을 부여할 경우 기존의 절충형 계획들보다 더 우수한 결과를 주고 있다. 이러한 이유는 기존의 절충형 계획들이 주어진 저 및 중 스트레스 할당비율 α_1 과 α_2 하에서 단지 저 스트레스 수준 s_1 만을 결정한 후 s_2 를 고 스트레스와 구하여진 저 스트레스 수준의 중간으로 삼고 있는 반면에, 신 절충형 계획은 $s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2$ 를 동시에 최적화하고 있기 때문이다.

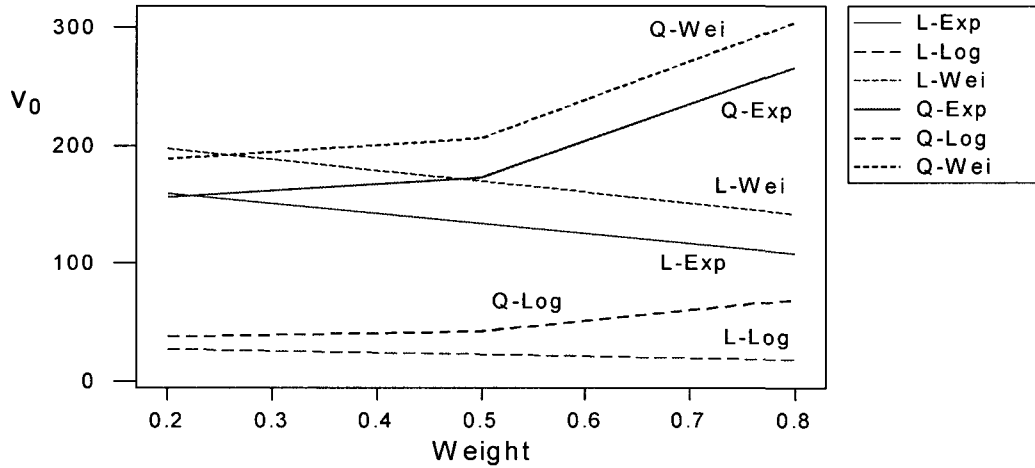
그리고 실제 모형이 이차일 경우 w_1 을 작게 추정하여 이차인 경우에 더 가중치를 부여한다면 본 연구의 신 절충형 계획들이 이차인 경우의 최적계획에 그렇게 떨어지지 않는 효율을 주고 있음을 알 수 있다. 그러나 선형모형을 가정한 기존의 절충형 계획들은 모두 저 스트레스 수준을 너무 높게 설정하고 있기 때문에 매우 낮은 효율을 나타내고

있음을 알 수 있다.

이상의 결과를 정리해보면 실제 수명과 스트레스 사이의 관계가 선형인지 이차인지 정확히 알려져 있지 않을 때, 본 연구에서 제시한 신 절충형 계획을 활용하여 가속수명시험을 할 경우 기존의 절충형 계획들에 비해서 통계적 측면에서 훨씬 효율적으로 수행할 수 있음을 알 수 있다.

<그림 1>은 <표 2>~<표 4>의 결과 중에서 신 절충형 계획의 가중인자에 따른 점근적 분산을 나타낸 것으로 단순선형(L), 이차모형(Q) 그리고 지수(Exp), Weibull(Wei), 대수정규(Log) 분포를 기호로 표시하였으며 (예를 들면, L-Exp : 단순선형-지수분포), 선형모형일 경우 가중인자가 커질수록 지수와 Weibull 분포일 경우 점근적 분산의 감소 패턴이 대수정규분포일 경우보다 크며, 이차모형일 경우에는 가중인자가 커질수록 세 가지 분포의 점근적 분산이 천천히 증가하다가 0.5를 초과하면 점근적 분산이 크게 증가함을 알 수 있다.

3.2 수치예



<그림 1> 신 절충형 계획의 수명분포와 가중인자에 따른 점근적 분산
($P_u=0.001$, $P_h=0.9$, $q=0.1$, L: 선형, Q: 이차)

본 논문에서 제시한 신 절충형 계획의 유용성을 파악하기 위하여 Meeker와 Hahn(1986)의 수치예를 대상으로 설정하였다.

스트레스 변수는 온도로서 정상 사용 온도는 50°C 이고 120°C 까지는 대수수명과 스트레스 사이의 관계가 선형 혹은 이차인지 정확하게 알려져 있지 않으나 과거의 경험으로부터 시험자는 선형일 가능성이 50% 정도라고 예측하고 있다. 가속수명시험을 통하여 사용조건하에서 제 10백분위수(지수분포의 경우 평균)를 추정하고자 한다. 과거의 자료로부터 이 제품이 6개월만에 사용조건(50°C)하에서 고장날 확률(P_u)은 0.001이며, 120°C 에서 고장날 확률(P_h)은 0.9로, 50°C 와 12

0°C 의 중간온도인 85°C 에서 고장날 확률이 0.4505로 추정된다. 대상 시험단위수는 100개이며, 총 시험종료시간을 6개월로 설정하였을 경우에 <표 1>로부터 도출된 신 절충형 가속수명시험계획 및 모형이 선형과 이차인 경우의 최적계획들의 결과를 <표 5>에 정리하였다.

3.3 민감도분석

본 논문에서 제시한 신 절충형 계획은 실제 수명과 스트레스의 관계가 정확하게 알려져 있지 않을 때 가중인자를 적절히 선택하여 두 모형(선형과 이차)을 절충하고 있지만 실제 모형은 선형과 이차 중의 한쪽일 가능성이 높다. 그리고 신 절충형 계획도 다른

<표 5> 수치예의 가속수명시험 계획

분포	지수분포			와이블분포			대수정규분포		
	최적(선형)	신 절충형	최적(이차)	최적(선형)	신 절충형	최적(이차)	최적(선형)	신 절충형	최적(이차)
s_1^* ¹⁾	0.6247	0.3848	0.2803	0.6834	0.3488	0.3753	0.4403	0.2176	0.1717
s_2^*	-	0.6982	0.7267	-	0.7385	0.7596	-	0.6189	0.6961
α_1^*	0.8163	0.5594	0.7118	0.7058	0.4569	0.5536	0.7412	0.5773	0.6604
α_2^*	-	0.3193	0.1987	-	0.3496	0.3038	-	0.2584	0.2310
ν_0 또는 eff	90.212	0.7773	154.44	119.95	0.8010	263.86	14.90	0.7536	37.45
저스트레스 ²⁾ 수준(°C)	94	77	70	98	74	76	81	64	62
중간스트레스 수준(°C)	-	99	101	-	102	103	-	93	99
저스트레스 할당수	82	56	71	71	46	55	74	58	66
중간스트레스 할당수	-	32	20	-	35	31	-	26	23

(주) 1) 표준화 값, 2) 실제 적용되는 값

최적계획들과 마찬가지로 P_u , P_h 및 P_m 의 정확한 추정이 가능하다는 가정하에서 도출한 준최적계획(Chernoff(1962))이기 때문에 실제로 P_u , P_h 및 P_m 을 오추정(\hat{P}_u , \hat{P}_h , \hat{P}_m)하여 모수들의 추정에 오차가 발생할 경우에 실제 적용한 계획이 최적이지 아닐 수도 있다. 즉, 본 연구의 신 절충형 계획은 가중인자에 의하여 두 모형을 절충하고 있으므로 실제 모형이 선형 혹은 이차 중의 하나일 때 신 절충형 계획은 최적계획이 아니며, P_u , P_h 및 P_m 의 오추정으로 인하여 모수들을 잘못 추정할 경우 실제 적용한 계획은 최적이지 될 수 없다. 따라서 본 절에서는 실제 모형이 선형일 경우 세 스트레스 수준에서 시험되는 신 절충형 계획에 대응되는 최

적계획은 두 스트레스 수준에서 시험되므로 적합한 민감도 분석대상이 되지 못하여 이 경우를 제외하고 실제 모형이 이차인 경우만 두 종류의 위험도에 대한 신 절충형 계획의 민감도 분석을 실시하였다.

민감도 분석은 사전 추정값들을 \hat{P}_u , \hat{P}_h (\hat{P}_m 는 두 추정값의 평균이라고 가정)로 오추정한 후 적절한 가중인자를 선택하여 신 절충형 계획을 수립한 다음 실제 참값이 P_u , P_h 이고 모형이 이차인 상황에서 가속 수명시험을 수행했을 때의 사용조건하에서의 추정하고자 하는 \hat{y}_q 의 점근적 분산과 사전 추정값들을 정확하게 P_u , P_h 로 추정하고 모형도 실제 이차모형일 때의 최적계획에 따

<표 6> 지수분포일 경우의 민감도 분석($\hat{P}_u=0.001$, $\hat{P}_h=0.9$)

P_u	P_h		0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
	w_1						
0.0003	0.2		1.02918	1.03210	1.03559	1.03877	1.04600
	0.5		1.09064	1.08521	1.08030	1.07859	1.07963
0.0005	0.2		1.01198	1.01207	1.01293	1.01428	1.01813
	0.5		1.09959	1.09146	1.08412	1.08076	1.07878
0.001	0.2		1.02130	1.01567	1.01135	1.00948	1.00812
	0.5		1.14469	1.13051	1.11780	1.11119	1.10412
0.003	0.2		1.14761	1.12374	1.10367	1.09315	1.08027
	0.5		1.34026	1.30489	1.27415	1.25790	1.23844
0.005	0.2		1.28626	1.24510	1.21083	1.19321	1.17230
	0.5		1.52535	1.46915	1.42147	1.39691	1.36837

<표 7> Weibull 분포일 경우의 민감도 분석($\hat{P}_u=0.001$, $\hat{P}_h=0.9$, $q=0.1$)

P_u	P_h		0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
	w_1						
0.0003	0.2		1.02280	1.02716	1.03191	1.03538	1.04191
	0.5		1.06646	1.06902	1.07193	1.07410	1.07810
0.0005	0.2		1.00773	1.00990	1.01254	1.01455	1.01834
	0.5		1.07010	1.07162	1.07266	1.07346	1.07479
0.001	0.2		1.01248	1.01096	1.01012	1.00984	1.00961
	0.5		1.10425	1.10112	1.09860	1.09701	1.09404
0.003	0.2		1.10921	1.09729	1.08706	1.08116	1.07245
	0.5		1.25913	1.24399	1.23053	1.22235	1.20942
0.005	0.2		1.21845	1.19704	1.17852	1.16811	1.15354
	0.5		1.40748	1.38088	1.35735	1.34365	1.32357

라 도출된 계획하에서 시험을 수행할 경우의 점근적 분산의 비(오추정인 경우/참인 경우)로서 분석하였다. 각각 지수, Weibull, 대수 정규분포를 따를 경우의 결과를 <표 6>~<표 8>에 정리하였다.

분석결과를 요약하면 P_u , P_h 의 참값이 오추정치 \hat{P}_u 와 \hat{P}_h 의 약 500%와 20% 범 위내에 있다면 가중인자를 크게 추정 ($w_2=0.8$ 이상)하여 이차인 경우에 높은 가

<표 8> 대수정규분포일 경우의 민감도 분석($\hat{P}_u=0.001, \hat{P}_h=0.9, q=0.1$)

P_u	w_1	P_h				
		0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
0.0003	0.2	1.02407	1.02211	1.02183	1.02382	1.03260
	0.5	1.08668	1.08482	1.08341	1.08330	1.08643
0.0005	0.2	1.01106	1.00971	1.00926	1.01007	1.01451
	0.5	1.09668	1.09564	1.09425	1.09309	1.09225
0.001	0.2	1.01411	1.01325	1.01247	1.01188	1.01139
	0.5	1.13305	1.13265	1.13096	1.12836	1.12259
0.003	0.2	1.09120	1.08959	1.08772	1.08560	1.08107
	0.5	1.27770	1.27605	1.27257	1.26787	1.25728
0.005	0.2	1.17797	1.17461	1.17176	1.16962	1.16713
	0.5	1.40966	1.40535	1.40005	1.39492	1.38623

중치를 부여하였다면 세 가지 수명분포 모두 오추정에 상당히 둔감하게 나타나고 있음을 알 수 있다. 그리고 가중인자를 낮게 추정하여 상대적으로 선형모형의 가중치가 크더라도 P_u 를 너무 낮게 오추정하지 않는다면 신 절충형 계획을 가속수명시험 계획으로 적절히 활용할 수 있음을 파악할 수 있다. 또한 민감도 분석결과의 특징을 살펴보면 P_u 의 과추정에 둔감한 이유는 P_u 와 P_h 의 차가 클수록 결정되는 저 스트레스 수준은 높아지고 저 스트레스 할당비율은 낮아짐으로서 사용조건에서의 관심있는 분위수의 점근적 분산이 커지므로 참인 경우에 비해 오추정인 경우의 점근적 분산비의 증가폭이 상대적으로 작아지기 때문이다.

4. 결론

본 연구에서 제시한 신 절충형 계획은 실제 모형이 선형 혹은 이차인지 정확히 판정할 수 없을 때 시험자가 사전 경험이나 과거 혹은 동종업체 등으로부터 획득할 수 있는 자료를 바탕으로 적절히 두 모형에 가중치를 부여(가중 기하평균 형태의 최적화 기준)하여 가속수명시험 계획을 수립할 수 있도록 설계하였다.

신 절충형 계획의 유용성을 파악하기 위하여 단순선형모형하에서 개발된 기존의 절충형 계획들과 통계적 효율측면에서 비교분석해 본 결과 실제 모형이 단순선형이더라도 선형 가중인자를 너무 낮게 추정하지 않는다면 기존의 계획들보다 오히려 우수하거나 대등함을 파악하였다. 반면에 실제 모형이 이차인 경우 신 절충형 계획들은 이차 모형의 최적계획에 비해서 통계적 효율이 크게 차이 나지 않으나 기존의 절충형 계획들보다는 훨씬 우수한 효율을 보여주고 있었다. 마지막으로 제시된 신 절충형 계획은 세 스트레스

수준에서 시험되므로 두 스트레스 수준에서 시험하는 것이 최적인 단순선형 모형의 경우를 제외하고 본 연구와 동일하게 세 스트레스 수준에서 시험되는 실제 모형이 이차인 경우에 대해 모형 모수들의 오추정에 따른 민감도 분석을 실시하여 본 결과 모형 모수의 오추정의 폭이 상당히 크더라도 가중인자를 너무 이차모형에서 위배되지 않게 추정한다면 통계적 효율이 크게 떨어지지 않음을 파악할 수 있었다. 따라서 본 연구결과를 기초로 일차와 이차모형을 절충하는 새로운 설계기준과 이에 부과되는 가중치를 합리적으로 설정하는 방법 등에 관한 후속연구가 요망된다.

참고문헌

- [1] Chaloner, K. and K. Larntz(1992), "Bayesian Design for Accelerated Life Testing", *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 31, pp. 1-15.
- [2] Chernoff, H.(1962), "Optimal Accelerated Life Designs for Estimation," *Technometrics*, Vol. 4, pp. 381-408.
- [3] Choi, Y.S. and Yum, B.J.(1988), "Optimal Allocation of Test Items in an Accelerated Life Test under Model Uncertainty," *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, Vol. 14, pp. 91-97.
- [4] Khamis, I. H. and J. J. Higgins(1996), "Optimum 3-Step Step-Stress Tests," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 45, pp. 341-345.
- [5] Meeker, W.Q.(1984), "A Comparison of Accelerated Life Test Plans for Weibull and Lognormal Distributions and Type I Censoring," *Technometrics*, Vol. 26, pp. 157-171.
- [6] Meeker, W.Q. and Hahn, G.J.(1985), *How to Plan an Accelerated Life Test-Some Practical Guidelines*, ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques, Vol. 10.
- [7] Nelson, W.(1990), *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*, Wiley, New York.
- [8] Nelson, W. and Kielpinski, T.J.(1976), "Theory for Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions," *Technometrics*, Vol. 18, pp. 105-114.
- [9] Nelson, W. and Meeker, W.Q.(1978), "Theory for Optimum Accelerated Censored Life Tests for Weibull and Extreme Value Distributions," *Technometrics*, Vol. 20, pp. 171-177.
- [10] Powell, M.J.D.(1964), "An Efficiency Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives," *Computer Journal*, Vol. 7, pp. 155-162.
- [11] Seo, S.K. and Yum, B.J.(1991), "Accelerated Life Test Plans under

- Intermittent Inspection and Type-I Censoring : The Case of Weibull Failure Distribution,” *Naval Research Logistics*, Vol. 38, pp. 1-22.
- [12] Yum, B.J. and Choi, S.C.(1989), “Optimal Design of Accelerated Life Tests under Periodic Inspection,” *Naval Research Logistics*, Vol. 36, pp. 779-793.