

# 자외 재료의 탄성파 속도에 관한 연구

## A Study on the Elastic Wave Velocity of Magnetostrictive Materials

강 국 진<sup>\*</sup>, 노 용 래<sup>\*\*</sup>  
(Kukjin Kang<sup>\*</sup>, Yongrae Roh<sup>\*\*</sup>)

<sup>\*</sup>경북대학교 센서공학과, <sup>\*\*</sup>경북대학교 기계공학부

(접수일자: 2001년 1월 30일; 수정일자: 2001년 3월 9일; 채택일자: 2001년 3월 22일)

자외 재료는 비선형 자기-탄성 특성을 갖는다고 알려져 있다. 그러나 비선형 특성을 표현하는 자외 재료의 구조 방정식을 유도한 사례는 아직까지 없다. 본 연구에서는 자외 재료의 비선형 구조 방정식을 4차 텐서를 이용하여 유도하였고, 준선형 (quasi-linear)화시킨 압자 구조 방정식을 이용하여 자외 재료 내의 파동 방정식을 유도하였다. 유도된 식을 바탕으로 자외 재료에서 평면파가 자계 방향을 따라 전파될 때의 탄성파 속도를 구하였다. 나아가 자외 재료 중에서 가장 널리 사용되고 있는 Terfenol-D의 탄성파 속도를 측정하여 본 연구에서 유도한 자외 재료 비선형 구조 방정식의 타당성을 검증하였다.

핵심용어: 자외재료, 구조 방정식, 탄성파 속도, Terfenol-D, 자외 방정식

투고분야: 초음파 및 탄성파 분야 (4.2)

Magnetostrictive materials have nonlinear elasto-magnetic properties. However the constitutive equations to describe the nonlinear properties are not available, yet. In this study we develop the nonlinear constitutive equations by means of fourth rank tensors, and derive the elastic wave equation in magnetostrictive materials by use of piezomagnetic constitutive equation which is quasi-linearized. With the wave equation, we determine the propagation velocity inside the magnetostrictive materials when a plane wave propagates along a given magnetic field. Validity of the calculated velocity is verified through comparison with experimental velocity measurement results for the most representative magnetostrictive material, Terfenol-D.

**Keywords:** Magnetostrictive material, Constitutive equation, Elastic wave velocity, Terfenol-D

**ASK subject classification:** Ultrasonic and elastic waves (4.2)

### I. 서 론

자외 효과 (magnetostriiction)는 전외효과 (electrostriction)와 유사한 2차 효과로서, 강자성 물질이 자화되었을 때 그 내부구조에 변화가 일어나고, 외부 자계에 비선형적으로 비례하여 물질에 변형이 발생하는 현상을 뜻한다. 자외 재료들은 수중청음기 변환기와 수중청음기를

만드는 진동소자로 광범위하게 쓰이고, 자외 재료에 발생되는 탄성 변형은 자계의 제곱에 비례하는 것으로 알려져 있다[1].

대표적인 자외 재료로, 수중 청음기에 많이 사용되던 Nikel은 기계적 인성이 크고, 화학적으로 안정하며, 정수 압에 무관한 특성을 가지고 있지만, 자기기계 결합계수가 매우 작고 작동 주파수 대역이 낮아 전기기계 결합계수가 큰 압전 재료로 대체 되었다. 금속 유리 합금 (metallic glass alloys)은 얇은 적층 구조를 가지고, 자기 기계 결합계수가 압전 재료의 전기기계결합계수보다 매

책임저자: 강국진 (kkj@usound.knu.ac.kr)

702-701 대구광역시 북구 산격동 1370

경북대학교 대학원 센서공학과

(전화: 053-943-8716; 팩스: 053-950-6827)

우크다는 장점을 가지고 있어 수중 청음기에 많은 적용을 시도하고 있다[1]. 1980년 A. E. Clark은 희토류 산화물 (rare-earth compounds)이 매우 큰 자외 변형율을 가지고 있다는 것을 발견하였다. 희토류 산화물로 대표되는 Terfenol-D는 포화 자외 변형 값이 매우 크기 때문에 압전 재료를 대신하여 저주파수의 수중 변환기에 매우 많이 사용되고 있다. 이와 관련하여 실제로 Terfenol-D와 PZT-4를 수중 청음기에 적용하였을 때 Terfenol-D가 PZT-4보다 매우 우수한 음향특성을 나타낸다는 연구 결과도 나와 있다[2].

그러나 지금까지 자외효과에 대한 연구사례들은 자체 포화상태의 포화 자외상수값 (saturation magnetostriiction coefficient)을 이용하거나[3-5], 자체 포화에 대응하는 자체 이하에서 선형적인 특성을 가진다고 가정한 상태, 즉 압자효과 (piezomagnetic effect)로 해석을 행하고 있다[6-7]. 그러나 포화 자체 이하에서 비선형 특성을 가진다고 알려진 자외 재료의 특성을 선형 특성을 가진다고 해석을 행한 것은 정확한 해석을 했다고 볼 수 없다. 더욱이 지금까지 비선형 특성을 표현하는 구조 방정식을 유도한 연구사례는 전무한 실정이다. 또한 비선형 특성을 포함하는 자외 재료 내의 파동 방정식을 유도한 사례도 없다.

따라서 본 연구에서는 자외 재료가 가지는 비선형 특성을 해석하기 위한 기초가 되는 비선형 구조 방정식을 4차 텐서를 이용하여 유도하고, 유도된 구조 방정식으로부터 자외 재료 내에서의 파동 방정식을 유도하고자 한다. 위 결과를 바탕으로 자외 재료 내에서 평면파가 자체 방향을 따라 전파될 때의 자외 재료의 탄성파 속도를 구하고자 한다. 그리고 대표적 자외 재료인 Terfenol-D의 자체에 따른 탄성파 속도를 through transmission법을 이용하여 측정하고자 한다. 나아가 탄성파 속도측정 실험 결과와 본 연구에서 유도한 이론식을 비교하여 본 연구에서 유도한 자외 재료 비선형 구조 방정식과 파동 방정식의 타당성을 검증하고자 한다.

## II. 이론적 배경

일반적으로 압자효과는 선형적인 압전효과와 유사하고, 자외 효과는 2차 효과로서 전외효과 (electrostriction)와 유사한 특성을 갖는다고 알려져 있다. 따라서 자외 구조 방정식은 기존의 압자, 압전, 전외특성 해석 결과

를 바탕으로 유사하게 유도될 수 있다[1,8].

온도 변수를 제외한 열역학 함수로서 자외 재료의 탄성 Gibbs 에너지 G는 식 (1)과 같이 표현된다[9].

$$G = -\frac{1}{2} c_{ijkl}^H S_{ij} S_{kl} + Q_{pqlm} S_{pq} H_i H_m + \frac{1}{2} \mu_{ij}^S H_i H_j \quad (1)$$

여기서  $c_{ijkl}^H$ 는 일정한 자장하의 탄성계수 (stiffness) 텐서,  $S_{ij}$ 는 변형률 (strain) 텐서,  $Q_{pqlm}$ 은 자외 상수 (magnetostriiction coefficient) 텐서,  $H_i$ 는 자계 (magnetic field) 텐서,  $\mu_{ij}^S$ 는 일정 변형율에서 투자율 (permeability) 텐서이다.

압자 재료에서와 마찬가지로 자속 밀도  $B_i$ 는 식 (2)와 같이 표현되고[8],

$$B_i = \left( \frac{\partial G}{\partial H_i} \right)_{S, T} \quad (2)$$

응력 텐서  $T_{ij}$ 는 식 (3)과 같이 표현된다[8].

$$T_{ij} = - \left( \frac{\partial G}{\partial S_{ij}} \right)_{B, H} \quad (3)$$

식 (1)을 식 (2)와 (3)에 적용하면 구조 관계식은 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^H S_{kl} - Q_{pqlm} H_i H_m \\ B_i &= 2Q_{klij} H_j S_{kl} + \mu_{ij}^S H_j \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, 자외상수 텐서는 식 (5)와 같다.

$$2Q_{ijkl} = - \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial H_k \partial H_l} = \frac{\partial^2 B_i}{\partial S_{ij} \partial H_k} \quad (5)$$

## III. 자외 재료 내의 파동 방정식

자외 재료 내에서의 파동 방정식을 유도하기 위한 응력 운동 방정식은 식 (6)과 같다[11].

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \rho_m \ddot{u}_j \quad (6)$$

여기서,  $\rho_m$ 은 밀도,  $\ddot{u}_j$ 는 변위이다.

자기 발산 (magnetic divergence) 방정식은 식 (7)과 같이 표현된다[12].

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

변형율과 변위 관계는 식 (8)과 같다[10].

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (8)$$

자계를 reduced-scalar-potential formulation을 사용하여 나타내면 식 (9)와 같다[12].

$$H_k = H_k^S + H_k^M \quad (9)$$

여기서,  $H_k^S = H_k^{S_0} I$ 는 magnetizing field,  $I$ 는 코일 전류,  $H_k^{S_0}$ 는 Biot and Savart 법칙에 의해서 해석적으로 계산되어지는 항이고[12],  $H_k^M = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ 는 demagnetizing field이다.

본 연구에서는 이미 형성된 자계의 영향에 의한 자외재료 내의 파동 방정식을 유도하고자 한다. 따라서, 추가적인 코일 전류가 없는 상태이기 때문에 식 (9)는 식 (10)과 같이 reduced-scalar-potential  $\phi$ 에 대한 식이 된다 [13-15].

$$H_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (10)$$

앞장에서 언급한 구조 관계식 (4)에 식 (8)과 (10)을 대입하면 식 (11)과 같은 구조 관계식이 된다.

$$T_{ij} = c_{ijkl}^H \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - 2Q_{ijkl} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_m \partial x_j} \\ B_i = -2Q_{klij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - \mu_{ij}^S \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (11)$$

식 (11)을 응력 운동 방정식 (6)과 자기 발산 방정식 (7)에 대입하면 식 (12)가 된다.

$$c_{ijkl}^H \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} \right) - 2Q_{ijkl} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_m \partial x_j} \\ = \rho_m \ddot{u}_i \\ 2Q_{klij} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right) + \mu_{ij}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (12)$$

식 (12)에서 k와 l은 서로 교환될 수 있기 때문에 식

(12)는 식 (13)과 같아 표현된다.

$$c_{ijkl}^H \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} - 2Q_{ijkl} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_m \partial x_j} = \rho_m \ddot{u}_i \\ 2Q_{klij} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \right) + \mu_{ij}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (13)$$

$i=1, 2, 3$ 을 대입하면 식 (13)은 식 (14)와 같이 변위  $u_1, u_2, u_3$ 과 reduced-scalar-potential  $\phi$ 에 대한 파동 방정식으로 표현된다.

$$c_{1jkl}^H \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} - 2Q_{1jlm} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_m \partial x_j} = \rho_m \ddot{u}_1 \\ c_{2jkl}^H \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} - 2Q_{2jlm} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_m \partial x_j} = \rho_m \ddot{u}_2 \\ c_{3jkl}^H \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} - 2Q_{3jlm} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_m \partial x_j} = \rho_m \ddot{u}_3 \\ 2Q_{kilm} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \right) + \mu_{ij}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (14)$$

식 (14)의 비선형 자외재료의 파동 방정식은 너무 복잡한 형태를 가진다. 본 연구에서는 계산의 단순화를 위해서 식 (14)의 비선형 자외재료 파동 방정식을 quasi-linear화 시켜 압자 방정식과 같은 해석을 이루고자 한다. 그러므로 실제 자외재료와의 차이는 있을 것이다.

따라서, 앞장에서 언급한 식 (4)의  $Q_{klji} H_i$ 를 quasi-linear화된  $e_{ijkl}$ 의 압자상수로 표현하면, 구조 관계식은 식 (15)와 같다.

$$T_{ij} = c_{ijkl}^H S_{kl} - e_{ijkl} H_k \\ B_i = 2e_{ijkl} S_{kl} + \mu_{ij}^S H_k \quad (15)$$

식 (15)에서 i와 j, k와 l의 대칭조건에 의해 4차 텐서  $Q_{klji}$ 를 Voigt notation (또는 matrix notation)을 사용하여 간략히 나타내면[10].

$$Q_{klji} = Q_{ij} \quad (16)$$

여기서,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ 이고,  $I, J = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 이다.

따라서 식 (15)의  $e_{ijkl}$ 은  $e_{ij}$ 로 표현되고, 이를 행렬로 표현하면 식 (17)과 같다.

$$[e] = [Q][H] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서,  $e_{11} = Q_{11}H_1 + Q_{16}H_2 + Q_{15}H_3$ ,

$$e_{12} = Q_{21}H_1 + Q_{26}H_2 + Q_{25}H_3,$$

$$e_{13} = Q_{31}H_1 + Q_{36}H_2 + Q_{35}H_3,$$

$$e_{14} = 2(Q_{41}H_1 + Q_{46}H_2 + Q_{45}H_3),$$

$$e_{15} = 2(Q_{51}H_1 + Q_{56}H_2 + Q_{55}H_3),$$

$$e_{16} = 2(Q_{61}H_1 + Q_{66}H_2 + Q_{65}H_3),$$

$$e_{21} = Q_{16}H_1 + Q_{12}H_2 + Q_{14}H_3,$$

$$e_{22} = Q_{26}H_1 + Q_{22}H_2 + Q_{24}H_3,$$

$$e_{23} = Q_{36}H_1 + Q_{32}H_2 + Q_{34}H_3,$$

$$e_{24} = 2(Q_{46}H_1 + Q_{42}H_2 + Q_{44}H_3),$$

$$e_{25} = 2(Q_{56}H_1 + Q_{52}H_2 + Q_{54}H_3),$$

$$e_{26} = 2(Q_{66}H_1 + Q_{62}H_2 + Q_{64}H_3),$$

$$e_{31} = Q_{15}H_1 + Q_{14}H_2 + Q_{13}H_3,$$

$$e_{32} = Q_{25}H_1 + Q_{24}H_2 + Q_{23}H_3,$$

$$e_{33} = Q_{35}H_1 + Q_{34}H_2 + Q_{33}H_3,$$

$$e_{34} = 2(Q_{45}H_1 + Q_{44}H_2 + Q_{43}H_3),$$

$$e_{35} = 2(Q_{55}H_1 + Q_{54}H_2 + Q_{53}H_3),$$

$$e_{36} = 2(Q_{65}H_1 + Q_{64}H_2 + Q_{63}H_3) \text{ 이다.}$$

식 (15)의 압자 관계식에 변형율과 변위 관계식과 자계를 대입하면 식 (18)과 같다.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^H \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + e_{ikl} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \\ B_i &= 2e_{ikl} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - \mu_{ik}^S \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)을 응력 운동 방정식 (6)과 자기 발산 방정식 (7)에 대입하면 식 (19)가 된다.

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^H \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} \right) + e_{ikl} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} &= \rho_m \ddot{u}_i \\ 2e_{ikl} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} \right) - \mu_{ik}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에서  $k$ 와  $l$ 은 서로 교환될 수 있기 때문에 식 (19)는 식 (20)과 같이 압자 방정식을 이용한 파동 방정식이 된다.

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^H \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} + e_{ikl} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} &= \rho_m \ddot{u}_i \\ 2e_{ikl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} - \mu_{ik}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

#### IV. 평면파가 자계 방향으로 전파될 때의 탄성파 속도

$x_1, x_2, x_3$  가 각각 직교 좌표계의  $x, y, z$  방향을 나타내고 평면파가  $z$  축을 따라 전파할 때 quasi-linear화된 압자 방정식을 이용한 자외 재료의 종파와 횡파속도는 다음의 전개과정에 의해 구할 수 있다.

평면파가  $z$ 축을 따라서만 전파하기 때문에  $\partial/\partial x_1 = 0, \partial/\partial x_2 = 0$ 이다. 따라서 식 (20)에  $\partial/\partial x_1 = 0, \partial/\partial x_2 = 0$ 을 적용하고, 4차 탄성계수 텐서는 대칭이기 때문에 Voigt notation을 사용하면 [10], 식 (21), (22), (23), (24)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} c_{35}^H \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + c_{54}^H \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + c_{53}^H \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + e_{35} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ = \rho_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} c_{45}^H \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + c_{44}^H \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + c_{43}^H \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + e_{34} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ = \rho_m \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} c_{35}^H \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + c_{34}^H \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + c_{33}^H \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ = \rho_m \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{2}{\mu_{33}^S} \left\{ e_{35} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + e_{34} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right\} \quad (24)$$

그리고 평면파 해를 식 (25)와 같이 가정하였다.

$$\begin{aligned} u_j &= U_j e^{[i(\omega t - kz)]} ; j = x, y, z \\ \phi &= \Phi e^{[i(\omega t - kz)]} ; i = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서,  $U_j$  와  $\Phi$  는 상수,  $k$ 는 파수,  $\omega$ 는 각주파수이다.

식 (24)와 (25)를 식 (21), (22), (23)에 대입하여 행렬 형태로 나타내면 식 (26)과 같다.

$$k^2 \begin{bmatrix} (c_{55}^H + \frac{2e_{35}^2}{\mu_{33}^S}) & (c_{54}^H + \frac{2e_{35}e_{34}}{\mu_{33}^S}) & (c_{53}^H + \frac{2e_{35}e_{33}}{\mu_{33}^S}) \\ (c_{45}^H + \frac{2e_{34}e_{35}}{\mu_{33}^S}) & (c_{44}^H + \frac{2e_{34}^2}{\mu_{33}^S}) & (c_{43}^H + \frac{2e_{34}e_{33}}{\mu_{33}^S}) \\ (c_{35}^H + \frac{2e_{33}e_{35}}{\mu_{33}^S}) & (c_{34}^H + \frac{2e_{33}e_{34}}{\mu_{33}^S}) & (c_{33}^H + \frac{2e_{33}^2}{\mu_{33}^S}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \rho_m \omega^2 \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

식 (26)을 간략하게 나타내면 식 (27)과 같다.

$$k^2 [I][U] = \rho_m \omega^2 [U] \quad (27)$$

여기서,  $[I]$ 은 stiffened Christoffel 행렬[10],  $[U]$ 는 변위 행렬이다.

식 (27)의 해를 갖기 위한 조건은 식 (28)와 같으며,

$$\det |k^2 [I] - \rho_m \omega^2 [I]| = 0 \quad (28)$$

식 (29)와 같이 표현된다.

$$\begin{vmatrix} \left(c_{55}^H + \frac{2e_{35}^2}{\mu_{33}^S}\right)k^2 - \rho_m \omega^2 & \left(c_{54}^H + \frac{2e_{35}e_{34}}{\mu_{33}^S}\right)k^2 & \left(c_{53}^H + \frac{2e_{35}e_{33}}{\mu_{33}^S}\right)k^2 \\ \left(c_{45}^H + \frac{2e_{34}e_{35}}{\mu_{33}^S}\right)k^2 & \left(c_{44}^H + \frac{2e_{34}^2}{\mu_{33}^S}\right)k^2 - \rho_m \omega^2 & \left(c_{43}^H + \frac{2e_{34}e_{33}}{\mu_{33}^S}\right)k^2 \\ \left(c_{35}^H + \frac{2e_{33}e_{35}}{\mu_{33}^S}\right)k^2 & \left(c_{34}^H + \frac{2e_{33}e_{34}}{\mu_{33}^S}\right)k^2 & \left(c_{33}^H + \frac{2e_{33}^2}{\mu_{33}^S}\right)k^2 - \rho_m \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

주어진 주파수에 대해서 식 (29)를 만족시키는 파수  $k$ 를 구하게 되면, 결국 이 값이 자외 재료 내를 전파하는 탄성파의 속도를 계산할 수 있도록 한다. 그러나 식 (29)는 재료의 이방성에 따른 여러 개의 재료상수를 포함하고 있고, 따라서 이 식을 만족시키는 파수  $k$ 는 상당히 복잡한 형태를 가진다.

## V. 육방정계 (Hexagonal system) 6mm 재료내의 탄성파 속도

식 (29)에 의한 속도 값 도출의 간단한 예로서, 육방정계 6mm 재료에 대해서[10], 외부에서 인가되는 자계가  $H_3$ 뿐일 때의 탄성파 속도를 구하였다. 육방정계 6mm 재료의 자외상수 행렬  $[Q]$ 는 식 (30)과 같다.

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{13} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ Symmetry & & Q_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & Q_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{12}) & \end{bmatrix} \quad (30)$$

식 (30)과 외부에서 인가되는 자계가  $H_3$ 뿐이라는 조건 ( $H_1 = H_2 = 0$ )을 식 (17)에 적용하면, 식 (17)은 식 (31)이 된다.

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2(Q_{44}H_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(Q_{44}H_3) & 0 & 0 \\ Q_{13}H_3 & Q_{13}H_3 & Q_{33}H_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

육방정계 6mm재료의 탄성계수 행렬  $[c^H]$ 는 식 (30)과 동일한 형태를 가지므로,  $[c^H]$ 와 식 (31)을 식 (29)에 대입하여 정리하면 식 (32)와 같다.

$$\left\{ \left( c_{33}^H + \frac{2e_{33}^2}{\mu_{33}^S} \right) k^2 - \rho_m \omega^2 \right\} \times \left( c_{44}^H k^2 - \rho_m \omega^2 \right)^2 = 0 \quad (32)$$

따라서 육방정계 6mm 자외 재료의 종파 속도( $v_t$ ) 및 횡파 속도( $v_s$ )는 식 (33), (34)와 같이 간단한 형태로 구하여진다.

$$v_t = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_{33}^H + \frac{2e_{33}^2}{\mu_{33}^S}}{\rho_m}} = \sqrt{\frac{c_{33}^H + \frac{2(Q_{33}H_3)^2}{\mu_{33}^S}}{\rho_m}} \quad (33)$$

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_{44}^H}{\rho_m}} \quad (34)$$

그러나 식 (33), (34)는 자외 관계식을 quasi-linear화 시킨 압자 방정식을 이용하여 구한 값이므로 실제 상황과는 차이가 있을 것이다. 본 연구에서는 자외재료 중에서 가장 널리 사용되고 있는 Terfenol-D의 탄성파 속도를 측정하고, quasi-linear화시킨 압자 방정식을 이용하여 구한 탄성파 속도와 비교하여 자외재료의 비선형 구조 방정식의 타당성을 검증하고자 한다.

## VI. Terfenol-D 탄성파 속도 측정 실험

본 연구에서는 앞서 유도한 자외 재료의 비선형 구조 방정식의 타당성을 검증하기 위하여 자외 재료 중에서 가장 대표적인 Terfenol-D의 탄성파 속도를 측정하고 문현상의 물성을 대입한 이론적인 속도값과 비교하였다. Terfenol-D는 결정학적으로 육방정계 6mm 구조를 가지며, 문현에서 제공하는 Terfenol-D 시편의 물성을 표 1에 나타내었다[12]. 따라서 본 연구에서 유도한 육방정계 6mm 구조에서 유도한 식 (33)과 (34)을 이용해 Terfenol-D 내의 파동 속도를 구할 수 있다.

표 1의 물성으로부터 식 (35)를 이용하여  $e_{33}$ 을 구하였다[16].

$$e_{33} = 2 d_{31} c_{13}^H + d_{33} c_{33}^H \quad (35)$$

여기서,  $d_{31}$ ,  $d_{33}$ 은 압자 상수이다.

그리고 계산된  $e_{33}$ 으로부터 압자효과에 의한 식 (31)에 의해서  $Q_{33}$ 을 근사화 하였다. 이때,  $H_3$ 는 문현상의 값인 60 kA/m 이다[12]. 표 1의 물성을 본 연구에서 유도한 식 (33)과 (34)에 대입한 결과, 자계가 인가되지 않았을 때 ( $H_3 = 0$ ) 종파속도는 3,301 m/s이고, 횡파속도는 812 m/s이다.

이렇게 계산된 파동 속도의 타당성을 검증하기 위하여, 본 연구에서는 Johnson Matthey사의 길이 50 mm, 직경 10 mm인 원통형 Terfenol-D 시편과 Panametrics 사의 5 MHz 종, 횡파 초음파 트랜스듀서를 이용하여 through transmission법에 의하여 탄성파 속도를 측정하였다. 실험 측정 장치를 그림 1에 나타내었다. 사용된 Terfenol-D 시편의 밀도는  $9,246 \text{ kg/m}^3$ 으로 표 1의 물성과 약간 차이가 났다. 자계가 가해지지 않은 상태에서 종파속도는 3,416 m/s로서 이론적인 종파속도 3,301 m/s와 약 3.5 %정도의 오차를 가짐을 알 수 있다. 이는 표 1에서 제공하는 밀도와 본 연구에서 사용한 시편의 밀도 차이에서도 알 수 있듯이, 실제 시편과 문현상 물성의 불일치 때문에 발생한 오차와 트랜스듀서 직경과 시편의 직경이 거의 같음으로 인해 발생하는 edge 효과에 따른 오차라 판단된다.

다음으로 Terfenol-D 시편에 코일을 250회 감고 전류를 인가하여 자계가 시편의 길이 방향으로 형성되게 한 다음, 인가되는 전류가 변화할 때의 종파속도를 측정하여 이론적인 값과 비교한 결과를 그림 2에 나타내었다. 식 (33)에 의하면 자외 재료 내의 종파 속도는 인가 자장

표 1. Terfenol-D 재료 물성[12]

Table 1. Material properties of the Terfenol-D[12].

$\rho_m$	$9,000 \text{ kg/m}^3$
$c_{11}^H$	$10.70 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
$c_{12}^H$	$7.48 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
$c_{13}^H$	$8.21 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
$c_{33}^H$	$9.81 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
$c_{44}^H$	$0.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
$c_{55}^H$	$1.61 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
$d_{31}$	$-0.52 \times 10^{-8} \text{ m/A}$
$d_{33}$	$1.04 \times 10^{-8} \text{ m/A}$
$d_{15}$	$2.80 \times 10^{-8} \text{ m/A}$
$\mu_{11}^H$	$3.16 \mu_0$
$\mu_{33}^H$	$2.28 \mu_0$
$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

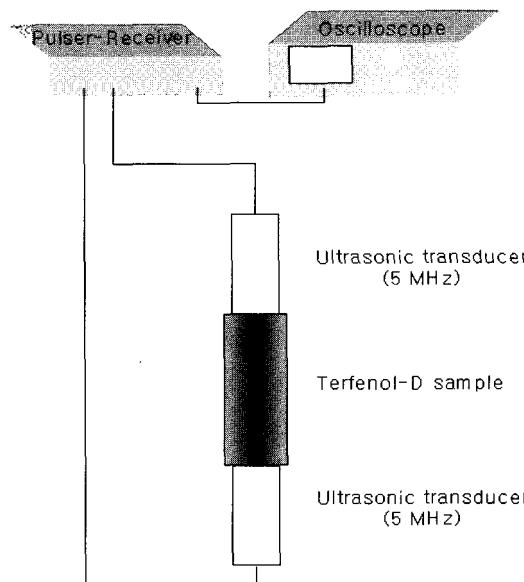


그림 1. Through transmission법에 의한 Terfenol-D 음속 측정 장치

Fig. 1. Schematic sound velocity measurement system for the Terfenol-D by use of the through transmission method.

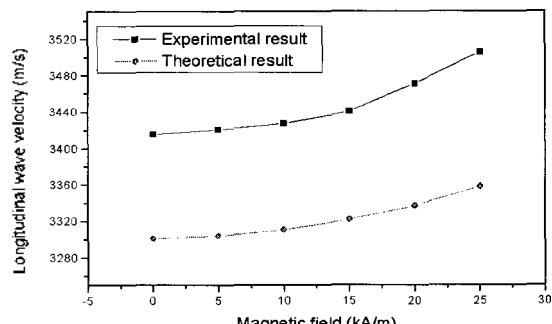


그림 2. 자계에 따른 Terfenol-D의 종파속도

Fig. 2. Longitudinal wave velocity of the Terfenol-D in relation to the magnetic field.

의 함수로서 나타나는데, 이러한 경향은 그림 2의 실험결과에서도 확인된다. 그러나 그림 2를 보면 실험치와 측정치의 크기에 어느 정도의 차이를 보이고 있고, 자계에 따른 경향성은 자계값이 15 kA/m까지는 거의 일치하다가 20, 25 kA/m에서는 약간 차이남을 알 수 있다. 이는 실제 시편과 문현상 물성의 불일치로 인한 오차, 실험에서 시편의 크기 제한으로 인한 edge 효과에 의한 오차와 본 연구에서 비교하고자 한 자계값의 범위가 25 kA/m 이하인 데, 이론적인 결과는  $Q_{33}$ 값을 60 kA/m에서 균사화하였기 때문에 발생한 오차, 그리고 quasi-linear화시킨 압자 방정식으로부터 이론적인 속도 값을 구하여 비교하였기 때문에 발생한 오차로 판단된다. 따라서 이상의 원인들에 의해 정량적으로는 이론치와 실험치간에 어느 정도의 오차를 보이나, 전체적인 이론 식의 타당성은 밝혀졌다고 할 수 있다.

그리고 횡파 속도의 경우 자계가 가해지지 않았을 때 840 m/s, 5 kA/m 일 때 839 m/s, 10 kA/m 일 때 842 m/s, 15 kA/m 일 때 834 m/s, 20 kA/m 일 때 837 m/s, 25 kA/m 일 때 841 m/s로 자계가 가해지지 않은 상태와 거의 차이가 없었고, 이론적인 값과 약 3~4 %정도의 오차를 가짐을 알 수 있었다. 따라서 Terfenol-D의 횡파 속도는 식 (34)에 나타난 것처럼 자계와 무관한 경향을 나타내고 이론값과의 오차 원인은 실제 시편과 문현상 물성의 불일치와 edge 효과 때문인 것으로 판단된다.

대표적 자웨 재료인 Terfenol-D에 의한 이상의 실험 결과들은 본 연구에서 유도한 자웨 재료의 비선형 구조 방정식과 quasi-linear화시킨 압자 방정식으로부터 유도한 파동 방정식의 타당성을 밝혀준다고 할 수 있다.

## VII. 결 론

본 연구에서는 자웨 재료의 비선형 구조 방정식을 유도하고, 유도된 구조 방정식을 이용하여 자웨 재료 내의 파동 방정식을 유도하였다. 나아가 quasi-linear화시킨 압자 방정식을 이용하여 자웨재료내에서 평면파가 자계 방향을 따라 전파될 때의 탄성파 속도를 구하였고, 유도된 식의 타당성은 실험 결과와의 비교를 통해 검증하고자 하였다. 그 결과 대표적인 자웨재료인 Terfenol-D에서는 자계가 증가함에 따라 종파속도는 증가하였고 반면에 횡파속도는 자계에 무관하게 일정한 값을 보였다. 이러한 경향성은 유도된 이론식과 일치하는 결과이다. 따라서

본 연구에서 유도한 자웨 재료 비선형 구조 방정식과 quasi-linear화시킨 압자 방정식을 이용하여 유도한 파동 방정식의 타당성이 입증되었고, 이 식들은 향후 일반적인 자웨 재료의 파동 특성에 이용될 수 있을 것이다.

## 감사의 글

본 연구는 수중음향특화센터의 지원을 받아 수행된 과제의 일부이며, 동 센터의 지원에 감사 드립니다.

## 참 고 문 헌

- O. B. Wilson, *Introduction to theory and design of sonar transducers*, Peninsula, Los Altos, chap. 7, pp. 126~134, 1988.
- M. B. Malfelt, A. E. Clark, M. Wun-Fogle, J. Linberg, J. P. Teter, and E. A. McLaughlin, "Characterization of Terfenol-D for magnetostrictive transducers," *J. Acoust. Soc. Am.* **89**(3), pp. 1448~1455, 1991.
- M. Ali and R. Walts, "Measurement of saturation magnetostriiction using novel strained substrate techniques and the control of the magnetic anisotropy," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **202**, pp. 85~94, 1999.
- H. Szymczak, "From almost magnetostriction to giant magnetostrictive effects: recent results," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **200**, pp. 425~438, 1999.
- Y. Chen, J. E. Snyder, C. R. Schwichtenberg, K. W. Dennis, D. K. Falzgraf, R. W. McCallum, and D. C. Jiles, "Effect of the elastic modulus of the matrix on magnetostrictive strain in composites," *Applied physics letters*, **74**(8), pp. 1159~1161, 1999.
- L. Kvarnsjö and G. Engdahl, "Differential incremental measurements of magnetoelastic parameters of highly magnetostrictive materials," *Proceedings of the first international meeting on magnetoelastic effects and applications*, Naples, Italy, 24~26, May, 1993.
- F. Claeysen, N. Lhermet, and G. Grossi, "Giant magnetostrictive alloy actuators," *Proceedings of the first international meeting on magnetoelastic effects and applications*, Naples, Italy, 24~26, May, 1993.
- "IEEE standard on magnetostrictive materials: piezomagnetic nomenclature," *IEEE Standard*, 319, 1971.
- C. L. Hom, S. M. Pilgrim, N. Shankar, K. Bridger, M. Massuda, and S. R. Winzer, "Calculation of quasi-static electromechanical coupling coefficients for electrostrictive ceramic materials," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **41**(4), pp. 542~550, 1994.
- J. F. Nye, *Physical properties of crystals*, Clarendon Press · Oxford, chap. 7~8, pp. 110~149, 1985.
- V. M. Ristic, *Principles of acoustic devices*, John Wiley & Sons, chap. 6~7, pp. 174~237, 1983.
- F. Claeysen, R. Bossut, and D. Boucher, "Modeling and characterization of the magnetostrictive coupling," *Proceeding of the international workshop*, Toulon, France, 12~13 June, 1990.

13. A. N. Abd-Alla and G. A. Maugin, "Nonlinear phenomena in magnetostrictive elastic resonators," *Int. J. Engng Sci.*, 27(12), pp. 1613–1619, 1989.
14. A. N. Abd-Alla and G. A. Maugin, "Harmonic generation and anisochronism in magnetostrictive materials," *Int. J. Solids Structures*, 25(6), pp. 683–705, 1989.
15. L. Kvarnsjö and G. Engdahl, "Nonlinear 2-D transient modelling of Terfenol-D rods," *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(6), pp. 5349–5351, 1991.
16. "IEEE standard on piezoelectricity," IEEE Standard, 176, 1987.

---

### 저자 약력

---

● 강 국 진 (Kukjin Kang)

한국음향학회지 제19권 4호 참조

● 노 용 래 (Yongrae Roh)

한국음향학회지 제20권 3호 참조