

## 입자가 균일하게 분포된 복합체의 기계적 성질과 혼합률에 관한 수치적 연구

김형섭\*

(2001년 5월 22일 접수)

### A Numerical Investigation on the Rule of Mixtures for the Mechanical Properties of Composites with Homogeneously Distributed Particles

H. S. Kim

#### Abstract

The concept of the mixtures can be used not only in the composites but also in the materials with precipitates and matrix. In this investigation, the finite element method of axisymmetric unit cell models and the rule of mixtures of the Voigt and the Reuss models are used to analyze the overall mechanical response of composites with homogeneously distributed particles. The calculations have been carried out by taking the materials as i) hardening and ii) perfect plastic materials. The plastic properties are predicted for various volume fractions of the soft and hard particles. The computational results are compared with the results of the rule of mixtures. It is found that the plastic flow curves agree well with the Voigt model when the volume fraction of the particles is high. On the other hand, the calculated flow curves exist between the Voigt model and the Reuss model when the volume fraction of the particles is low.

**Key Words** : Particulate Composite, Rule of Mixtures, FEM, Stress Analysis

#### 1. 서론

최근 복합재료에 대한 산업적 응용이 증대함에 따라 그 기계적 성질에 대한 연구가 많이 진행되고 있다<sup>(1)</sup>. 특히 구성 성분 각각의 성질과 복합재료의 유효한 성질과

의 관계를 연결시키려는 시도가 많이 있다<sup>(2)</sup>. 구성 성분의 기계적 성질로부터 유효기계적 성질을 구할 수 있는 가장 간단하면서도 직관적인 법칙은 혼합률이다.

혼합률에는 등변형률가정으로부터 유도된 Voigt혼합률<sup>(3)</sup>과 등응력가정으로부터 유도된 Reuss혼합률<sup>(4)</sup>이 주로

\* 충남대학교 금속공학과

사용된다. 또한 N개의 등방성 재료로 무질서하게 구성된 복합체의 열물성값을 구하기 위하여 Budiansky의 "Self-Consistent"방법<sup>(5)</sup>이 사용되기도 한다. 혼합률은 다공질체의 유효성질<sup>(6)</sup>, 복합체의 밀도, 확산계수, 포아송비 및 탄성계수의 해석 등<sup>(7)</sup>에 이용이 되었다. 하지만 혼합률의 타당성에 대해서는 아직도 논란의 여지가 있다<sup>(8)</sup>. 유효성질은 제 2상의 입자가 균일하게 분포된 일반적인 복합재료에서 뿐아니라 복합재료의 개념을 사용할 수 있는 나노결정재료나 나노미터 크기의 석출물이 분산된 비정질 합금의 기계적 성질의 해석에도 필요하다<sup>(9)</sup>. 이 연구에서는 복합재료의 유효기계적 성질과 혼합률에 대하여, 유한요소해석 결과와의 비교를 통하여, 고찰하고자 한다.

## 2. 해석방법

제 2상의 입자가 균일하게 분포된 복합재료의 기계적 성질의 해석을 위해 탄소성유한요소해석을 실시하였다. 본 연구에서는 증분이론에 기초하여 변위로 방정식을 표시하기로 한다. 변형 중의 기준상태를 현 변형 상태에 두는 Updated Lagrangian 접근법의 유한요소식은 가상일의 원리<sup>(10)</sup>에서 출발한다. 외부응력  $\sigma$ 와 외력  $f$ 가 평형을 이루어 임의의 가상변위  $\delta d$ 와 이에 적합한 변형률  $\delta \epsilon$ 가 발생하는 고체영역  $d\Omega$ 를 생각하면, 가상일의 원리는 다음 식(1)과 같다.

$$\delta \epsilon \sigma d\Omega - \delta d f = 0 \quad (1)$$

일반적인 유한요소 이산화 과정을 따르면, 어떤 요소 안에서 변위와 변형률과의 관계는 아래 식(2)와 같이 표시된다.

$$\delta \epsilon = B \delta d \quad (2)$$

여기서  $B$ 는 변형률-변위 행렬이다. 각 요소를 조합하면

$$\delta d B \sigma d\Omega - \delta d f = 0 \quad (3)$$

위 식은 임의의  $\delta d$ 에서 외력의 증분이 작용할 경우에도 성립해야 하므로

$$B \Delta \sigma d\Omega - \Delta f = 0 \quad (4)$$

탄소성 증분 응력-변형률 관계는 아래와 같다.

$$d\sigma = C^{EP} d\epsilon \quad (5)$$

식 (5)의  $\delta \sigma$ 를 식 (4)에 대입하면

$$K \delta d = \Delta f \quad (6)$$

여기서

$$K = B C^{EP} B d\Omega \quad (7)$$

앞에서  $K$ 는 강성행렬이고  $d$ 가 구하고자 하는 변위벡터이다. 식 (6)에서 Newton의 반복법을 이용하여  $d$ 를 구한다. 변위로부터  $B$ 행렬을 이용하여 변형률을 구하고, 변형률로부터 식 (8)을 이용하여 응력을 구한다.

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + C^{EP} d\epsilon \quad (8)$$

많은 입자가 균일하게 분포된 복합재료에서는 단위포의 해석이 가능하다<sup>(11)</sup>. 입자의 분산양상은 단순배열, 교차배열 등 여러 가지가 있을 수 있는데, 본 연구에서는 단순배열만을 고려하였다. 단위포로는 육면체를 근사시킨 원통형을 택하였다. Fig. 1은 단위포 모델의 개략도이다. 대칭을 고려하여 지름 2mm×높이 2mm 원통의 1/4을 해석계로 삼았다. Fig. 2에 요소망과 경계조건을 표시하였다. 원통형 좌표계이므로 축대칭의 형상이 된다. 많은 입자를 가진 재료를 단위포로 단순화시키기 위해서는 단위포의 수직 외곽면이 변형 후에도 직선을 유지해야하므로 단위포의 외곽면 상의 절점들의 반지름 방향 변위가 같도록 구속조건을 부여하였다. 기지와 입자와의 물성 차이를 고려하기 위해 강한 기지에 연한 입자가 있는 경우와 약한 기지에 강한 입자가 있는 경우를 해석하였다. 강한 재료의 물성으로는 304SS, 약한 재료로는 Al1100을 택하였다. 303SS의 탄성계수는  $23 \times 10^3$  MPa, Al1100의 탄성계수는  $15.3 \times 10^3$  MPa이다. 두 금속의 포아송비는 0.3으로 하였다. 이 재료들의 유동곡선은 다음 식<sup>(12)</sup>과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{304SS} &= 1451 \epsilon^{0.6}, \text{ MPa} \\ \sigma_{Al100} &= 119 \epsilon^{0.297}, \text{ MPa} \end{aligned} \quad (9)$$

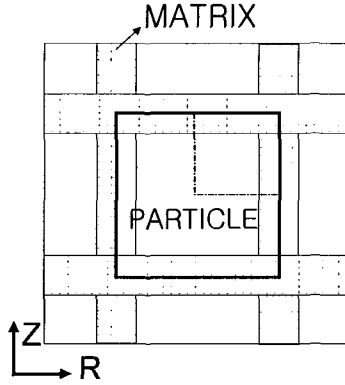


Fig. 1 Schematic diagram showing (a) an array of repeat unit cells and (b) a unit cell used for calculations

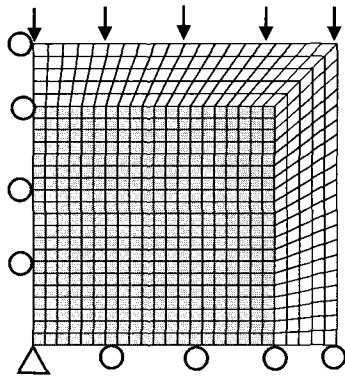


Fig. 2 Initial mesh, boundary conditions and loading

이들 재료의 선택은 Fig. 3의 유동곡선에서 보듯이 304SS가 Al1100의 최대 20배 이상이 되는 유동응력의 재료로서 충분히 물성의 차이를 보이므로, 이의 해석 결과는 강한 상과 약한 상의 혼합재료에 일반적으로 적용될 수 있다. 복합재료에서 각 성분의 소성거동은 단일재료일 경우의 각각의 유동곡선을 따른다고 가정하였다. 304SS와 Al1100의 유동곡선은 Fig. 3의 탄소성거동을 보이지만, 나노결정과 비정질 재료에서는 전위가 변형거동에 역할을 하지 못하여 탄성완전소성 재료로 볼 수 있으므로 항복 후 가공경화가 없는 재료에 대한 해석이 필요하다. 그러므로 해석대상은 (1)조대한 입자의 해석을 위한 탄소성거동 재료와 (2)나노재료나 비정질의 경우에

적용될 완전소성재료로 하였다. 입자와 기지와의 분리나 입자의 파괴는 고려하지 않았다. 입자의 부피비를 10, 25, 50, 75, 90%로 변화시키며 계산하였고, 계산결과와 신뢰도를 알아보기 위해 단일재료의 경우도 계산하여 입력 물성과 비교하였다. 변형은 높이비로 50% 압축하였고 수렴조건으로는 에너지노름 (norm)을 0.0001로 하였으며 계산시간은 Pentium90 PC에서 300초 정도였다.

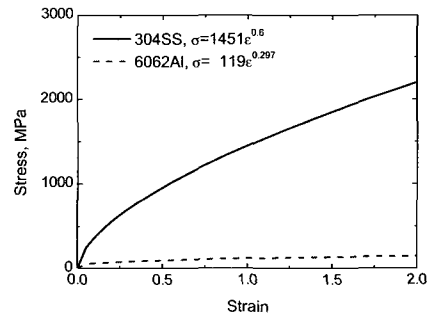


Fig. 3 Flow curves of 304SS and Al1100 from reference (12)

유한요소해석은 복잡한 형상이나 물성의 비선형성이 있는 경우에도 좋은 결과를 주는 방법이지만, 단순화시킨 모델에서나 빠른 결과를 원할 경우에는 간단한 해석해가 필요할 때도 있다. 이 경우에 사용되는 식이 혼합물인데, 복합체의 경우에는 유효응력  $\sigma_{eff}$ 을 위하여 탄성에서의 같이 부피비를 사용하여 등변형률 가정에 기초한 Voigt혼합률 식(10)이나 등응력 가정에 기초한 Reuss혼합률 식(11)을 사용할 수 있다.

$$\sigma_{eff} = f_p \sigma_p + f_m \sigma_m \quad (10)$$

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\frac{f_p}{\sigma_p} + \frac{f_m}{\sigma_m}} \quad (11)$$

여기서  $\sigma_p$ 와  $\sigma_m$ 은 각각 입자와 기지의 유동응력,  $f_p$ 와  $f_m$ 은 각각 입자와 기지의 부피분율이다. 위 혼합률들의 타당성을 조사하기 위하여 유한요소해석의 결과와 비교, 고찰하였다.

### 3. 결과 및 고찰

Fig. 4에 Voigt모델과 Reuss모델로 계산한 유동곡선을 보였다. Voigt 모델은 상계값을 Reuss모델은 하계값을 나타내기때문에(13) Voigt모델의 결과가 Reuss모델의 결

과보다 항상 크며, 실제 복합재료의 응력상태는 등변형률도 등응력도 아니므로 실제값은 양 극단인 두 모델 사이에 위치한다.

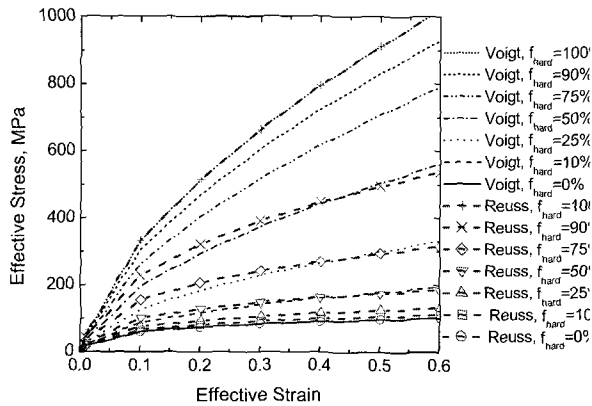


Fig. 4 Stress-strain curves obtained from the rule of mixtures based on the Voigt model and the Reuss model with various volume fractions of hard phase

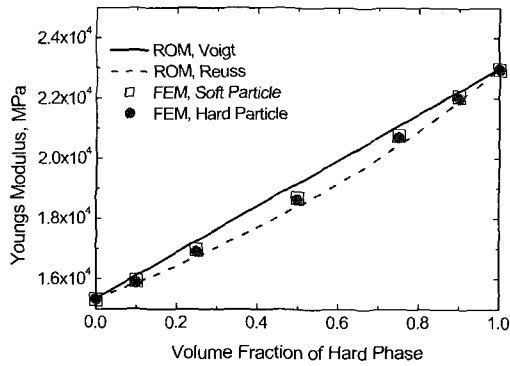
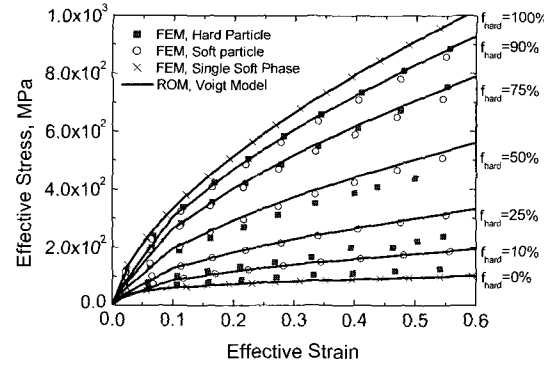


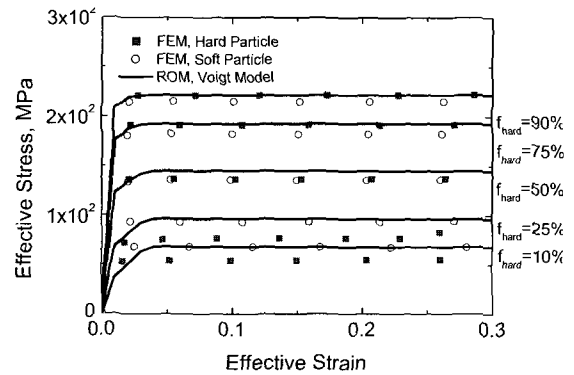
Fig. 5 Elastic modulus of the composites with soft particle and hard particle as a function of the volume fractions of the particles. The symbols are results calculated by FEM and the lines are by the rule of mixtures

Fig. 5에 탄성계수에 대하여 경질입자의 부피비에 따른 혼합률과 유한요소해석 결과를 비교하였다. 유한요소 해석 결과는 경질입자재료와 연질입자재료의 차이는 거의 없고 Voigt모델과 Reuss모델의 사이에 위치함으로써 복합재료의 응력상태는 균일변형률과 균일응력 사이의 응력상태임을 알 수 있다.

Fig. 6에 0, 10, 25, 50, 75, 90%의 부피분율을 가진 복합체의 변형거동의 유한요소해석 결과와 부피비에 기초한 Voigt혼합률의 결과의 유동곡선을 나타내었다. Fig. (a)는 가공경화가 있는 탄소성재료, (b)는 완전소성 재료



(a) Hardening Materials



(b) Perfect Plastic Materials

Fig. 6 Flow curves of the composites for volume fractions 10, 25, 50, 75, and 90% of soft particle and hard particle. (a) Hardening materials, and (b) perfect plastic materials

로 가정된 경우이다. 단일금속은 부피분율 0%에 해당한다. 단일금속의 계산결과가 각 재료의 입력 유동곡선과 완전히 일치하는 것으로 보아 계산의 결과는 정확함을 알 수 있다.

Fig. (a)를 보면 대체적으로 Voigt모델인 단순혼합물에 일치하고, Reuss모델의 결과는 그림에 표시하지 않았으나 유한요소해석 결과보다 낮은 값을 보이므로 유동응력의 하한값을 나타낸다고 보인다. 경질입자의 재료에서는 경질재의 부피비가 큰 경우에 혼합률과 잘 일치하고, 연질입자의 재료에서는 연질재의 부피비가 큰 경우에 잘 일치하는 것으로 보아 입자의 부피비가 클수록 Voigt모델이 복합재의 소성거동을 잘 표현함을 알 수 있다. 또한 경질재료가 50% 이하일 경우에는 경질입자복합재의 유동응력이 경질기지복합재의 유동응력보다 낮은 값을 보이지만, 경질재료가 75% 이상에서는 경질입자복합재의 유동응력이 경질기지복합재의 유동응력보다 높다.

Fig. (b)의 경우도 가공경화만 없고 (a)에 비교하여 위의 설명과 양상은 다르지 않다. 따라서 지금부터는 가공경화가 있는 경우만을 설명하고자 한다.

Fig. 7에 입자부피비 50%의 (a) 강한 입자의 경우와 (b) 연한 입자의 경우에서 40% 압축 시 변형형상을 보였다. 두 경우 모두 입자보다 기지재료의 변형이 크며, 경질입자복합재의 경우 연결기지의 변형이 연질입자복합재에서 경질기지의 변형보다 크다. 그러나 하중의 큰 부분을 담당하는 경질재의 변형을 비교하면 경질기지재에서의 경질기지 변형이 연질기지재에서의 경질입자 변형보다 더 크다. 따라서 같은 부피비의 재료에서는 연질입자복합재의 유동곡선이 경질입자복합재의 유동곡선보다 높다. 이는 경질재의 부피분율이 작을 경우에도 계속 해당된다. 입자의 부피분율이 적으면 기지재가 대부분의 변형률을 담당하므로 등변형률의 조건에서 크게 벗어나게 되어 Voigt모델식과의 차이가 클 것이고 반대로 입자분율이 크면 변형이 입자에까지 미쳐 등변형률에 가까워지므로 Voigt혼합률에 잘 일치하게 되는 것이다. 이는 Fig. 6의 결과로부터 확인 할 수 있다.

경질입자분율이 작을 경우 응력의 큰 부분을 담당하는 경질입자의 변형이 적으므로 Voigt혼합률과의 차이는 크지만 하중을 덜 부담하는 연질입자분율이 작을 경우에는 Voigt혼합률과의 차이가 크지 않게 된다. 이는 유효변형률을 비교한 Fig. 8을 보면 자세히 알 수 있는데, 경질입자복합재에서는 경질입자가 모서리의 아주 작은 영역 (Fig. (a)에서 요소 한 개 이내)의 심한 변형을 제외하고는 유효변형률이 0.307~0.658을 보이는 반면 연질입자복합재에서 경질기지의 유효변형률은 0.313~0.743의 값을 보인다. 즉 부피비 하중의 많은 부분을 담당하는 경질재료에서 큰 변형을 하는 연질입자복합재의 변형이 어려울 것이므로, 같은 변형률을 얻기 위해서는 연질입자복합재에 더 큰 하중이 소요됨을 예측할 수 있다. 경질입자복합재료에서는 연결기지의 변형이 큰데, 이의 극단적인 예로서는 기지만이 변형하는 “젖은 모래효과 (Wet Sand Effect)<sup>8)</sup>”를 들 수 있다. 경질재의 분율이 클 경우는 경질입자재에서는 모서리의 불균일한 변형으로 경질기지재보다 높은 유효응력상태가 된다.

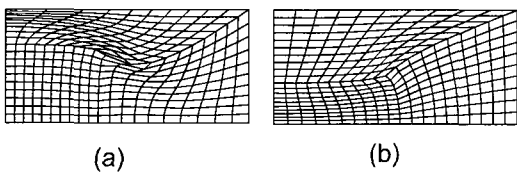


Fig. 7 Deformed meshes of the composites with 50% volume fraction of (a) hard particle and soft particle

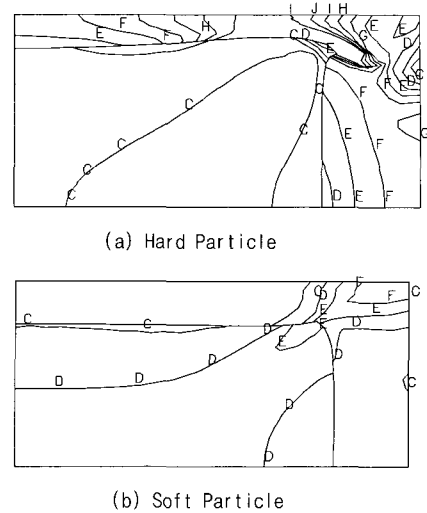


Fig. 8 Contour plots of effective strain of the composites with 50% volume fraction of (a) hard particle and (b) soft particle at an advanced state of deformation of 40% in height. A=0.2, B=0.289, C=0.378, D=0.467, E=0.556, F=0.644, G=0.733, H=0.822, I=0.911, J=1.0

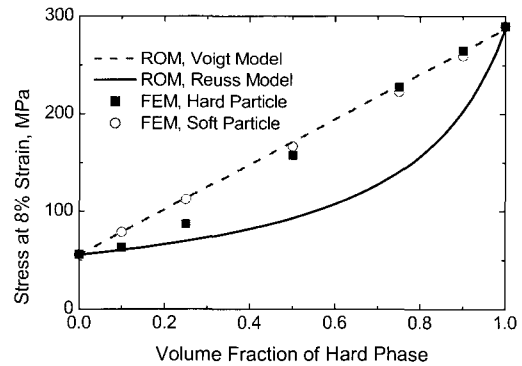


Fig. 9 Effective stress of the composites with soft particle and hard particle as a function of the volume fraction of the particle at an advanced state of deformation of 8 % in height

Fig. 9는 유동응력과 경도와의 관계에 이용되는 8% 변형률에서의 유동응력의 비교이다. 8% 변형률에서의 유동응력도 역시 연질입자복합재는 전범위의 부피분율에서 Voigt혼합률에 잘 일치하고, 경질입자복합재는 입자의 부피분율이 클 경우는 Voigt혼합률에 잘 일치하나 입자의 부피분율이 작을 경우는 Voigt모델과 Reuss모델의 사이에 위치하며 Voigt모델과는 약 20%의 오차를 보인다. 따라서 입자가 균일하게 분포된 복합재료의 경도값은 연질입자복합재나 부피분율이 큰 경질입자복합재의

경우에 Voigt혼합률을 이용하여 구할 수 있으며, 파괴분율이 적은 경질입자복합체의 경우 Voigt혼합률과 Reuss혼합률 사이에 있다.

#### 4. 결 론

입자가 균일하게 분포된 복합체의 유효기계적 성질을 구하기 위하여 단위포에 대한 유효요소해석과 혼합률에 관한 연구를 실시한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 복합체의 유효곡선은 입자부피분율이 크면 변형이 입자에까지 미쳐 등변형률 모델인 Voigt혼합률에 일치한다. 그러나 입자부피분율이 적을 때는 기지재의 국부적 심한 변형으로 등변형률모델인 Voigt혼합률보다 낮은 유효응력을 나타내며, 연질입자복합체에서는 Voigt혼합률과의 차이가 크나 경질입자복합체에서는 작다. 입자의 기지의 상대적인 변형거동에 있어서 가공경화가 있는 재료와 없는 완전소성재료의 차이는 보이지 않는다.

(2) 복합체의 유효탄성계수는 경질입자와 연질입자에 관계없이 전범위의 입자부피분율에 대해 Voigt와 Reuss혼합률 사이에 위치한다.

(3) 복합체의 유효변형률 8%에서의 유효응력은 연질입자에서는 Voigt혼합률을 잘 만족하고 경질입자에서는 부피분율이 클 경우에 Voigt혼합률을 만족하며 부피분율이 적을 때는 Reuss혼합률에 더 가깝다.

#### 후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(2000-1-30100-007-3) 지원으로 수행되었음.

#### 참 고 문 헌

- (1) Arsenault, R. J., 1993, : "Advanced composites '93, International conference on advanced composite materials", Chandra, T. and Dhingra, A. K. Eds., TMS, p. 19.
- (2) Hashin, Z., 1970, "Mechanics of composite materials, Proceedings of the fifth symposium on naval structural mechanics", Wendt, F. W., Liebowitz, H. and Perrone, N. Eds., Pergamon Press, p. 201.
- (3) Clyne, T. W. and Withers, P. J., 1993, "An introduction to metal matrix composites", Cambridge Univ. Press, p. 2.
- (4) Barrett, C. R., Nix, W. D. and Tetelman, A. S., 1973, "The principles of engineering materials", Prentice Hall, p. 318.
- (5) Budiansky, B., 1970, "Thermal and thermoelastic properties of isotropic composites", J. Composite Maters., Vol. 4, pp. 286~295.
- (6) Han, H. N., 1995, "Analysis of deformation of porous metals and compaction of metal powders", Ph.D Thesis, Seoul National University.
- (7) Agarwal, B. D. and Broutman, L. J., 1990, "Analysis and performance of fiber composites", 2nd ed., John Wiley & Sons, p. 61.
- (8) Greer, A. L., 2001, "Partially or fully devitrified alloys for mechanical properties", Mater. Sci. Eng., in print.
- (9) Kim, H. S., Suryanarayana, C., Kim, S. J. and Chun, B. S., 1998, "A finite element analysis of mechanical behavior of nanocrystalline copper", Powder Metall., Vol. 41, pp. 217~220.
- (10) Chakrabarty, J., 1987, "Theory of plasticity", McGraw-Hill, p. 41
- (11) Huang, H. and Bush, M. B., 1997, "Finite element analysis of mechanical properties in discontinuously reinforced metal matrix composites with ultrafine microstructure", Mater. Sci. Eng., Vol. A232, pp. 63~72.
- (12) Altan, T., Oh, S. I. and Gegel, H. L., 1983, "Metal forming, fundamentals and applications", ASM, p. 58.
- (13) Aboudi, J., 1991, "Mechanics of composite materials, a unified micromechanical approach", Elsevier, p. 16.