

대표응답을 이용한 건축구조물의 비선형 지진응답 분석 및 내진성능평가

Evaluation of Nonlinear Seismic Performance Using Equivalent Responses of Multistory Building Structures

이 동 권* 최 원 호**
Lee, Dong Guen Choi, Won Ho

국문요약

지진하중을 받는 구조물의 시스템 연성요구도 산정과 비선형 지진거동 예측에 대한 연구는 성능에 기초한 내진설계에서 구조물의 내진성능을 평가하는데 있어서 매우 중요한 분야이다. 본 연구에서는 철골 모멘트골조 구조물에 대하여 비선형 시간이력해석에 의한 비선형 지진응답과 시스템 연성요구도를 산정하고, 그 결과를 비선형 정적해석을 이용한 능력스펙트럼법과 비교하였다. 예제구조물에 대한 내진성능평가는 ATC-40에서 제시된 능력스펙트럼법과 본 연구에서 제안한 다자유도 시스템으로부터 직접 산정된 대표응답을 이용한 개선된 능력스펙트럼법과 비교하였다. 본 연구에서 제안된 방법의 정확성과 타당성은 ATC-40에서 제시된 방법과 제안된 방법에 의한 결과를 비선형 시간이력해석에 의한 비선형 지진응답과 비교함으로써 검증하였다.

주요어 : 시스템 연성요구도, 대표응답, 비선형 시간이력해석, 비선형 정적해석, 능력스펙트럼법

ABSTRACT

Determination of ductility demand and prediction of nonlinear seismic responses of a structure under the earthquake ground motions have become a very important subject for evaluation of seismic performance in the performance based seismic design. In this study, the system ductility demand and nonlinear seismic responses of the steel moment framed structures by the nonlinear time history analysis are estimated and compared with those obtained from the capacity spectrum method using nonlinear static analysis. Evaluation of seismic performance of the example structures are compared to capacity spectrum method suggested in ATC-40 and proposed method that is an improvement on the capacity spectrum method using the equivalent responses derived directly from a multi degrees of freedom system. The adequacy and validity of the proposed method is verified by comparing the results evaluated by the method proposed in this study and the results obtained from the method suggested in ATC-40 to the nonlinear seismic responses of the example structures from the nonlinear time history analysis.

Key words : system ductility demand, equivalent responses, nonlinear time history analysis, nonlinear static analysis, capacity spectrum method

1. 서 론

건축구조물의 내진성능을 평가하기 위해서는 지진하중에 의한 비선형 응답을 명확하게 파악하여야 한다. 그리고 구조물이 보유하고 있는 연성도 능력과 지진하중에 의하여 부과되는 연성요구도를 비교하여야 한다. 일반적으로 내진설계에서는 인명안전이나 붕괴방지를 위하여 구조물의 비선형 거동에 의한 변형을 허용범위 내로 제한한다. 그러므로 지진하중을 받는 구조물의 내진성능과 지진응답을 파악하기 위해서는 연성요구도의 산정과 구조물의 연성도 능력에 대한 예측이 매우 중요하다고 할 수 있다. 구조물의 연성도 능력은 구조부재에 대하여 실험적으로만 평가되지만 연성요구도는 구조물의 비선형 지진해석에 의하여 산정될 수 있다.

비선형 지진해석에 의한 연성요구도를 평가하는 방법으로는 비선형 시간이력해석에 의한 지진응답을 이용하는 방법과 비선형 정적해석의 지진응답을 이용하는 방법이 있다.

특히 후자의 방법 중에서 가장 대표적인 것이 ATC-40(1996)⁽¹⁾과 FEMA-273⁽²⁾, 274⁽³⁾(1997)에서 제시하고 있는 능력스펙트럼법(capacity spectrum method, 이하 CSM)이다. 이 방법은 구조물의 보유능력(capacity)과 지진요구(demand)를 매우 효과적으로 분석할 수 있기 때문에 성능에 기초한 내진설계에서 구조물의 내진성능을 평가하는데 가장 활발하게 적용되고 있다.⁽⁴⁾ 그러나 기존의 능력스펙트럼법(CSM)은 몇 가지 문제점을 가지고 있다. 첫째, 구조물의 보유능력을 파악하기 위해서 사용되는 최상층 변위와 밀면전단력의 관계는 구조물의 비선형 지진응답을 대표하기에는 적절하지 못한 경우가 많다. 최상층 변위는 구조물의 변형형상에 따른 여러 가지 영향을 제대로 나타내지 못하기 때문에 구조물 전체에 대한 목표변위로서 사용할 수 없다. 그리고 밀면전단력 또한 구조물의 비선형 거동을 대표하기에는 여러 가지로 부적절하다.⁽⁵⁾ 둘째, 구조물의 등가감쇠에 의한 이력에너지와 실제 지진하중의 최대 진폭에서 소산된 이력에너지와의 관계를 명확하게 규명하기가 힘들다.⁽⁶⁾ 셋째, 높은 감쇠비를 가지는 응답스펙트럼에서 평가된 구조물 능력곡선에서의 성능점은 실질적으로 비선형 시스템의 동적 거동을 정확하게 반영하기가 어렵다.^{(6),(7)} 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 변위

* 정회원 · 성균관대학교 건축공학과, 교수(대표저자 : dglee@yurim.skku.ac.kr)

** 학생회원 · 성균관대학교 건축공학과, 박사과정

본 논문에 대한 토의를 2002년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.
(논문접수일 : 2001. 10. 12 / 심사종료일 : 2001. 11. 21)

연성계수를 이용하여 지진하중에 대한 응답스펙트럼의 비탄성 특성을 평가하는 방법들에 대한 연구⁽⁷⁾가 진행되었으며 비선형 정적해석을 수행하는 경우에 정확한 비선형 동적거동을 반영할 수 있는 하중 분포형태에 관한 연구 등이 있었다.⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾

본 연구에서는 건축구조물의 시스템 연성요구도를 평가하기 위한 해석적 방법들에 관하여 살펴보았다. 비선형 시간이력해석의 응답을 이용한 두 가지 방법과 비선형 정적해석의 응답에 근거한 능력스펙트럼법(CSM) 원리를 철골 모멘트골조 구조물의 비선형 지진거동 분석과 내진성능평가에 적용하였다. 본 연구에서 제안한 방법은 비선형 정적해석에 의한 정적응답으로부터 대표응답을 산정함으로써 구조물의 보유능력을 평가하고 이를 능력스펙트럼법(CSM)의 원리에 새롭게 적용한 것이다. 본 연구에서 제안된 방법을 이용한 내진성능평가 방법은 기존의 ATC-40에서 제시된 능력스펙트럼법(CSM) 보다 일관성이 있으며 구조물의 비선형 지진응답과 내진성능을 정확하고 명확하게 평가할 수 있는 것으로 나타났다. 제안된 방법에 대한 정확성과 타당성은 비선형 시간이력해석에 의한 소성힌지분포, 비선형 층간변위 및 지진에너지 성분 등의 지진응답들과 비교·분석을 통하여 검증하였다.

2. 비선형 지진해석에 의한 시스템 연성요구도 산정

비선형 시간이력해석의 응답을 이용한 연성요구도 평가 방법에는 다자유도 시스템의 동적특성이 반영된 등가단자유도(equivalent single degree of freedom, ESDOF) 시스템의 응답을 이용하는 방법과 다자유도계 동적응답으로부터 직접 산정되는 구조시스템의 대표응답을 이용하는 방법이 있다. 그리고 비선형 정적해석의 응답을 이용하는 방법으로는 구조물의 저항능력과 지진하중에 대한 요구수준을 서로 비교함으로써 시스템 연성요구도를 평가하는 능력스펙트럼법(CSM)이 있다.

2.1 등가단자유도 시스템의 응답을 이용하는 방법

등가단자유도계의 응답을 이용한 구조물의 시스템 연성요구도 평가는 일반적으로 가장 많이 적용되고 있는 방법이다. 이 방법은 다자유도계 구조물을 등가의 단자유도계 구조물로 치환하는 원리를 이용한다. 등가단자유도계를 유도하는 방법은 여러 가지 방법이 있지만 본 연구에서는 철골 구조물에 적용 가능한 방법인 Lee 모델⁽¹¹⁾의 원리를 이용하였다. 힌과 변위의 비선형 관계는 근사화된 이선형(bilinear)관계로부터 산정된다. 등가단자유도계의 비선형 동적응답은 지진하중에 의한 비선형 시간이력해석으로부터 구해지며 힘과 변위에 대한 시간이력으로부터 구조물의 시스템 연성요구도가 평가된다.

2.2 다자유도 시스템의 대표응답을 이용하는 방법

구조시스템을 대표할 수 있는 대표응답이 다자유도 구조물에서 직접 유도될 수 있다면 내진설계를 위한 시스템 연

성요구도를 효과적으로 파악할 수 있다. 그리고 등가단자유도 시스템으로의 전환 과정이 필요 없이 다자유도 구조물의 비선형 동적응답으로부터 직접 시스템 연성요구도를 평가하는 것이 보다 더 적절하고 정확하다고 할 수 있다. 이 방법은 Lee 등(1997)에 의하여 제안된 방법으로 건축구조물의 시스템 연성요구도를 평가하는데 있어 매우 효과적인 방법인 것으로 증명되었다.⁽⁵⁾ 이 방법에서는 구조물의 지진응답을 대표할 수 있는 변위와 저항력이 다자유도 구조물의 비선형 시간이력해석의 응답으로부터 다음과 같은 과정에 의하여 평가된다. 먼저, 지진하중을 받는 건축구조물의 선형 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -M1\ddot{x}_g \quad (1)$$

여기서 X 는 지반에 대한 상대변위벡터, M 은 질량행렬, C 는 감쇠행렬, K 는 강성행렬, 그리고 1 은 구조물의 자유도에 대하여 입력지반가속도(\ddot{x}_g)에 연관된 단위벡터이다. 이때 구하고자 하는 각 층의 변위(X), 속도(\dot{X}) 및 가속도(\ddot{X}) 응답은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$X = \Phi_i u \quad \dot{X} = \Phi_i \dot{u} \quad \ddot{X} = \Phi_i \ddot{u} \quad (2)$$

여기서 Φ_i 는 i 번째 탄성 모드형상 벡터, u, \dot{u}, \ddot{u} 는 일반 모드 좌표계에서의 변위, 속도 및 가속도 함수이다. 식 (1)에서 각 항에 i 번째 탄성 모드형상 벡터 Φ_i 를 전승하고 식 (2)를 식 (1)에 대입한 후에 직교조건(orthogonality relationship)을 적용하면 식 (3)과 같은 운동방정식이 유도된다.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m^*\ddot{x}_g \quad (3)$$

여기서 $m = \Phi_i^T M \Phi_i$, $c = \Phi_i^T C \Phi_i$, $k = \Phi_i^T K \Phi_i$, $m^* = \Phi_i^T M 1$ 이다. 이 식에서 우변항 m^* 가 m 과 동일하다면 식 (3)은 일반적인 단자유도계 운동방정식이 성립되며, 이때 모드참여계수(modal participation factor)는 1.0이 된다. 이러한 조건을 만족시킬 수 있도록 정규화(normalization)된 모드형상벡터를 $\overline{\Phi}_i$ 라고 정의하면 다음과 같은 식이 성립된다.

$$\overline{\Phi}_i^T M \overline{\Phi}_i = -\overline{\Phi}_i^T M 1 \quad (4)$$

지진하중을 받는 건축구조물의 거동은 주로 1차 진동모드에 의하여 지배되므로 변위, 속도 및 가속도 응답벡터는 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$X \approx \overline{\Phi}_1 u \quad \dot{X} \approx \overline{\Phi}_1 \dot{u} \quad \ddot{X} \approx \overline{\Phi}_1 \ddot{u} \quad (5)$$

2.2.1 대표변위(equivalent displacement, D_e)의 산정

지진하중을 받는 비선형 다자유도 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + R(X) = -M1\ddot{x}_g \quad (6)$$

식 (5)에서의 가정은 식 (6)에서도 근사적으로 적용될 수 있으며, 정규화된 모드형상벡터 $\overline{\Phi}_1$ 를 전승한 후에 직교조건을 적용하면 다음과 같은 비선형 등가 단자유도 시스템(ESDOF)에 대한 동적평형방정식을 유도할 수 있다.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + r(u) \approx -m\ddot{x}_g \quad (7)$$

여기서 $m = \overline{\Phi}_1^T M \overline{\Phi}_1$, $c = \overline{\Phi}_1^T C \overline{\Phi}_1$, $r(u) = \overline{\Phi}_1^T R(X)$ 이다. 그러므로 식 (7)에서 산정되는 등가변위 u 와 등가저항력 $r(u)$ 은 단자유도 시스템을 대표하는 대표변위(equivalent displacement, D_e)와 대표저항력(equivalent force, V_e)으로 평가될 수 있다. $X \approx \overline{\Phi}_1 u$ 관계식에서 양변에 $\overline{\Phi}_1^T M$ 을 곱한 후에 정리하면 구조시스템을 대표하는 대표변위를 식 (8)과 같이 구할 수 있다.

$$D_e \approx \frac{\overline{\Phi}_1^T M X(t)}{\overline{\Phi}_1^T M 1} \quad (8)$$

여기서 응답벡터 $X(t)$ 는 비선형 시간이력해석으로부터 구해지는 변위응답을 나타낸다. 비슷한 방법으로 구조시스템의 대표속도(\dot{D}_e)와 대표가속도(\ddot{D}_e)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{D}_e \approx \frac{\overline{\Phi}_1^T M \dot{X}(t)}{\overline{\Phi}_1^T M 1} \quad \ddot{D}_e \approx \frac{\overline{\Phi}_1^T M \ddot{X}(t)}{\overline{\Phi}_1^T M 1} \quad (9)$$

2.2.2 대표저항력(equivalent force, V_e)의 산정

비선형 등가 단자유도 시스템(ESDOF)에서의 등가저항력 $r(u)$ 응답으로부터 단자유도 시스템을 대표하는 대표저항력(V_e)을 평가하면 다음과 같은 구조물의 1차모드 특성이 반영된 식으로 유도될 수 있다.

$$V_e \approx \overline{\Phi}_1^T R(X) = \overline{\Phi}_1^T K X(t) \approx \overline{\Phi}_1^T K \overline{\Phi}_1 D_e = k_1 D_e \quad (10)$$

여기서 $R(X)$ 는 단자유도 시스템의 비선형 시간이력해석으로부터 구해지는 저항력 응답, k_1 는 1차모드에 의한 구조물의 강성행렬, D_e 는 식 (8)에 의하여 산정되는 구조물의 대표변위를 나타낸다.

2.2.3 대표응답(equivalent responses)에 대한 정확성의 검증

일반적으로 지진하중을 받는 구조물의 비선형 거동에 대한 정보는 에너지 방정식을 사용함으로써 효과적으로 얻어질 수 있다. 본 연구에서는 대표응답에 대한 정확성과 타당성을 비선형 시간이력해석에 의한 다자유도계의 지진에너지 성분들과 비교함으로써 검증하였다. 에너지 방정식은 Uang과 Bertero(1990)⁽¹²⁾에 의하여 제안된 절대에너지(absolute energy) 방정식을 이용하였다. 지진하중을 받는 구조물의 에너지 성분은 식 (11)와 같이 구성된다.

$$E_K + E_D + E_S + E_H = E_I \quad (11)$$

여기서 E_K , E_D , E_S , E_H 와 E_I 는 각각 운동에너지, 감쇠에너지, 탄성 변형에너지, 비탄성 소산에너지와 지진하중에 의한 입력에너지를 나타낸다. 지진에너지 성분을 근거로 하여 단자유도 및 다자유도 구조물의 절대에너지 방정식을 정리하면 식 (12) 및 (13)과 같다.

$$\frac{m(\dot{x}_a)^2}{2} + \int c \dot{x} dx + \int r(x) dx = \int m \ddot{x}_a dx_g \quad (12)$$

$$\int_0^t \dot{X}_a^T M \ddot{X}_a dt + \int_0^t \dot{X}^T C \dot{X} dt + \int_0^t \dot{X}^T R(X) dt = \int_0^t 1^T M \ddot{X}_a dx_g \quad (13)$$

여기서 x_a 와 X_a 는 절대변위를 나타낸다. 대표응답에 의한 지진에너지 성분은 단자유도 시스템에서 직접 대표변위, 대표저항력, 대표속도 및 대표가속도를 산정한 후에 이 응답들을 식 (12)에 대입함으로써 평가할 수 있다. 그림 1은 비선형 시간이력해석에 의한 다자유도계의 지진에너지 성분과 대표응답을 이용한 지진에너지 성분을 비교한 것이다.

예제구조물은 본 연구에서 사용된 강기둥-약보 구조물이며, 하중은 EI Centro(NS, 1940) 지진을 적용하였다. 다자유도계의 지진에너지 성분과 대표응답에 의한 지진에너지 성분이 비교적 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 특히, 구조물의 비선형 거동을 나타내는 감쇠 및 소산에너지 성분을 비교하여 보면 본 연구에서 사용되는 구조물의 대표응답은 지진하중을 받는 다자유도계의 비선형 지진 응답을 잘 반영하고 있다는 것을 알 수 있다.

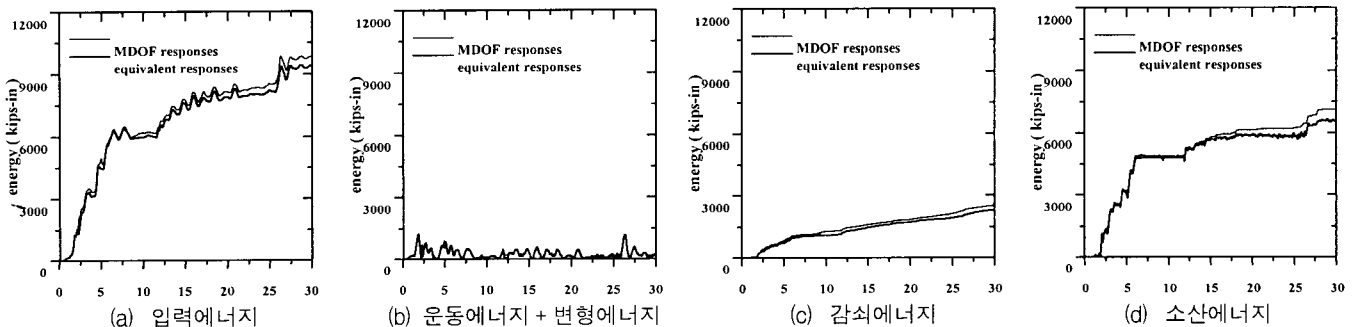


그림 1 다자유도계 응답과 대표응답에 의한 지진에너지 성분 비교

2.3 능력스펙트럼법(CSM)에 의한 방법(ATC-40)

능력스펙트럼법(CSM)은 비선형 정적해석을 이용하여 구조물의 시스템 연성요구도를 평가하는 대표적인 방법이다. 이 방법에서는 구조물이 보유하고 있는 저항능력(capacity)과 지진하중에 의한 지진요구(demand)를 스펙트럼 형식으로 서로 비교하여 성능점을 산정한 후에 시스템 연성요구도를 평가한다.

2.3.1 능력스펙트럼(capacity spectrum)의 산정

구조물의 횡방향에 대한 저항능력을 나타내는 능력곡선은 밀면전단력과 최상층 변위 관계로부터 산정된다. 그리고 ATC-40에서 구조물의 능력곡선은 그림 2와 식 (14)의 과정에 의하여 1차 진동모드의 특성이 반영된 응답가속도(S_a)와 응답변위(S_d) 관계로 전환된다.⁽¹⁾

$$S_a = \frac{V}{\alpha_1 W} \quad S_d = \frac{\Delta_{roof}}{PF_1 \times \phi_{1, roof}} \quad (14)$$

$$\text{여기서 } \alpha_1 = \frac{\left[\sum_{i=1}^N m_i \phi_{i1} \right]^2}{\left[\sum_{i=1}^N m_i \right] \left[\sum_{i=1}^N m_i \phi_{i1}^2 \right]}, \quad PF_1 = \left[\frac{\sum_{i=1}^N m_i \phi_{i1}}{\sum_{i=1}^N m_i \phi_{i1}^2} \right]$$

이며, 각각 1차모드에 대한 유효질량계수와 모드참여계수를 의미한다. Δ_{roof} 는 최상층 변위, W 는 총중량을 나타낸다.

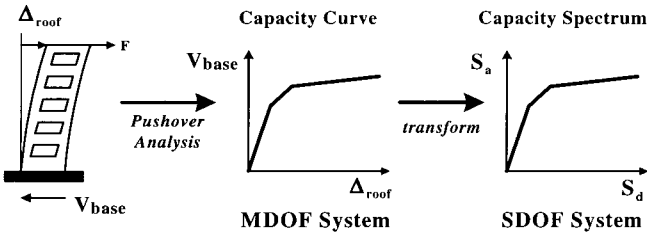


그림 2 비선형 정적해석에 의한 능력곡선과 능력스펙트럼

2.3.2 요구스펙트럼(demand spectrum)의 산정

지진하중에 대한 요구스펙트럼은 그림 3과 같이 응답변위(S_d)와 응답가속도(S_a)의 좌표계로 변환된 ADRS(acceleration displacement response spectrum)형식으로 표현된다. 응답변위(S_d)와 응답가속도(S_a)의 관계는 동역학 이론에 근거하여 식 (15)와 같이 정의된다.⁽¹⁾

$$S_d = \frac{T_n^2}{4\pi^2} S_a \quad (15)$$

ATC-40에서는 유효감쇠(effective damping)의 원리를 이용하여 지진하중에 대한 요구스펙트럼의 비탄성 특성을 고려한다. 그러나 이러한 유효감쇠를 이용한 요구스펙트럼의 평가는 근본적으로 등가 선형 시스템(equivalent linear system)의 원리에 근거를 두고 있기 때문에 실제 구조물의 비선형 지진 응답을 정확하게 반영하지 못한다. 그리고 구조물의 비선형 최대 내력을 의미하는 성능점을 계산하는데 있어서 반복

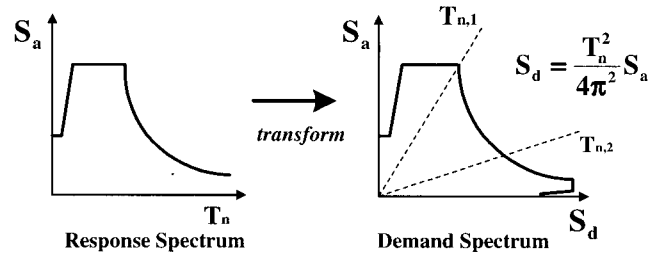


그림 3 응답스펙트럼과 요구스펙트럼

과정이 요구되며, 수렴하지 못하는 문제점을 발생시키는 것으로 연구되어진 바 있다.⁽⁷⁾

3. 제안된 방법에 의한 시스템 연성요구도 산정

본 연구에서는 앞서 설명한 능력스펙트럼법(CSM)에서 능력스펙트럼과 요구스펙트럼을 평가하는 방법을 수정하여 새로운 방법을 제안하였다. 구조물의 보유능력을 평가하기 위해서 비선형 정적응답으로부터 산정된 각 층변위와 층전단력으로부터 대표변위와 대표저항력을 산정하였다. 이 두 응답의 관계로부터 새로운 능력곡선과 능력스펙트럼을 평가하였다. 그리고 지진하중에 대한 요구스펙트럼은 Newmark와 Hall (1982)⁽¹³⁾에 의하여 제안된 변위연성계수(displacement ductility factor)를 적용함으로써 비탄성 응답스펙트럼을 평가하였다.

3.1 대표응답에 의한 능력스펙트럼의 산정

제안된 방법에서 능력스펙트럼을 평가하는 방법은 두 가지 특징을 가지고 있다. 첫 번째 특징은 비선형 정적해석을 수행하는 경우에 적용되는 하중분포형상이다. 본 연구에서는 고차모드 효과를 고려할 수 있는 하중분포형상을 선택하였다. 이 방법은 구조물의 응답스펙트럼 해석에 의한 모드별 층전단력을 조합한 후에 조합된 층전단력으로부터 각 층에 분배될 층하중을 평가하는 것이다. 이 하중분포형상을 적용하여 비선형 정적해석을 수행하면 소성힌지분포와 층간변위 등의 비선형 지진응답이 비선형 시간이력해석의 결과와 잘 일치하는 것으로 연구되어졌다.^{(9),(10)} 두 번째 특징은 구조물의 저항능력을 나타내는 능력스펙트럼은 본 연구에서 제안한 하중분포를 이용하여 비선형 정적해석을 수행한 후에 각 층에서 발생하는 정적 변위응답과 전단력으로부터 대표변위와 대표저항력을 산정하고 이러한 대표응답들의 관계로부터 평가하였다. 기존의 ATC-40에서 제시된 방법에서는 최상층 변위와 밀면전단력의 관계로부터 구조물의 능력곡선을 산정하고 단자유도계 형식인 능력스펙트럼을 평가하기 위해서는 구조물의 1차 단성모드에 대한 특성치를 적용하는 전환식을 이용하였다. 그러나 본 연구에서 제안한 방법은 이러한 다자유도계에서 단자유도계로의 전환 과정이 필요 없이 구조물의 다자유도계에서 직접 정적 대표변위와 대표저항력을 산정하고 이 두 응답의 관계로부터 구조물의 능력스펙트럼에 대한 평가가 직접 이루어진다. 앞서 설명된 대표응답의 원리를 적용한다면 비선형 정적해석에 의하여 산정되는 각 층 변위응

답과 전단력으로부터 구조물을 대표할 수 있는 정적 대표변위와 대표저항력을 식 (16)과 같이 평가할 수 있다.

$$S_d = D_e \approx \frac{\Phi_1^T M X_{static}}{\Phi_1^T M 1}$$

$$S_a = V_e / M_{eff} \approx \Phi_1^T R_{static} / M_{eff} \quad (16)$$

여기서 X_{static} , R_{static} 는 비선형 정적해석으로부터 구해지는 각 층 변위 및 저항력 응답을 나타낸다. M_{eff} 은 구조물의 1차모드에 대한 유효질량을 나타내며, 응답변위와 응답가속도로 표현되는 D_e 와 V_e / M_{eff} 는 각각 다자유도계에서 구조물의 비선형 정적응답을 이용하여 평가된 스펙트럼상에서의 정적 대표응답을 의미한다.

3.2 변위연성비에 의한 요구스펙트럼의 산정

Newmark와 Hall(1982)의 변위연성비를 이용한 비탄성 응답스펙트럼의 평가는 설정된 목표 변위연성비에 대하여 각 주기마다 탄성 거동에서의 수평강도와 항복강도에 대한 비를 변화시켜가면서 목표연성비를 만족하는 값을 찾는 것이다. 그리고 비탄성 설계응답스펙트럼은 가속도, 속도 및 변위의 민감 구간에 대하여 변위연성비와 관련된 계수를 적용함으로써 구할 수 있다. 그림 4와 5는 본 연구에서 사용된

지진하중(EI Centro, NS 1940)에 대한 비탄성 응답스펙트럼과 이에 대한 비탄성 설계응답스펙트럼을 나타낸 것이다.

4. 철골 모멘트골조 구조물의 비선형 지진응답 평가

본 연구에서는 구조물의 비선형 지진응답 분석과 내진성능 평가를 위하여 철골 모멘트골조를 선택하였다. 예제구조물은 설계 개념이 서로 다른 강기둥-약보(strong-column weak-beam, 이하 SCWB)와 약기둥-강보(weak-column strong-beam, 이하 WCSB) 구조물이다. UBC와 같은 대부분의 내진설계기준에서는 설계지진하중을 산정하는데에 강기둥-약보와 약기둥-강보 구조물의 차이를 반영하고 있지 않다.⁽¹⁴⁾ 일반적으로 내진설계기준에서는 강기둥-약보의 구조물 형식을 권장하고 있지만 시공상의 이유 등 기타 여러 가지 이유로 인하여 강기둥-약보의 연결부를 만들 수 없는 경우에 대해서는 약기둥-강보의 구조 형식도 허용한다. 본 연구에서는 구조물의 형식에 따른 거동의 차이가 비선형 지진응답과 내진성능에 미치는 영향을 분석하기 위하여 두 가지 형식의 예제구조물을 선정하였다.

4.1 예제구조물

예제구조물은 그림 6에 나타난 바와 같이 3경간 8층 철골 보통 모멘트골조 구조물이다. 본 연구에서는 기둥과 보 부재에서 발생하는 비선형 지진응답과 이에 따른 구조시스템의 거동을 파악하기 위해서 접합부 패널존에서는 파괴가 발생하지 않는다고 가정하였다. 강기둥-약보(SCWB)와 약기둥-강보(WCSB) 구조물의 부재크기는 표 1에서 제시하였다. 비선형 해석프로그램은 Drain-2D+⁽¹⁵⁾를 이용하여 예제구조물의 정적 및 시간이력해석에 사용하였다. 보와 기둥에서 발생하는 소성힌지는 부재의 단부에 집중된다고 가정하였으며, 부재의 이력거동은 항복 후에 2%의 변형경화 효과를 가지는 이선형(bilinear)곡선으로 가정하였다. 중력하중에 의한 P-Δ 효과는 고려하지 않았다. 비선형 시간이력해석에 적용된 하중은 EI Centro(NS, 1940)지진이며 유효최대가속도(effective peak acceleration, EPA)를 0.4g로 조정하여 해석에 사용하였다.

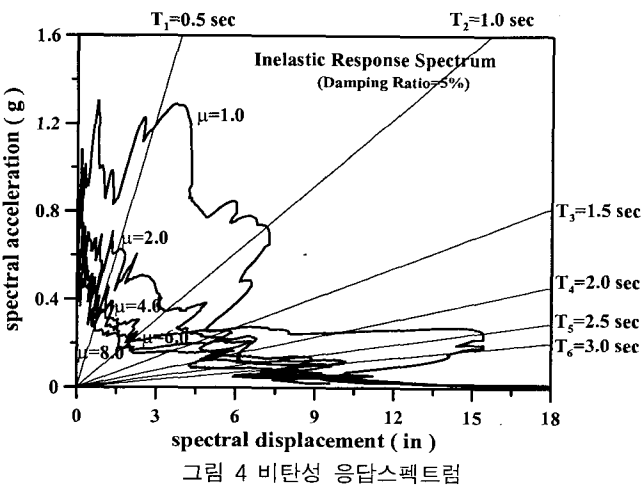


그림 4 비탄성 응답스펙트럼

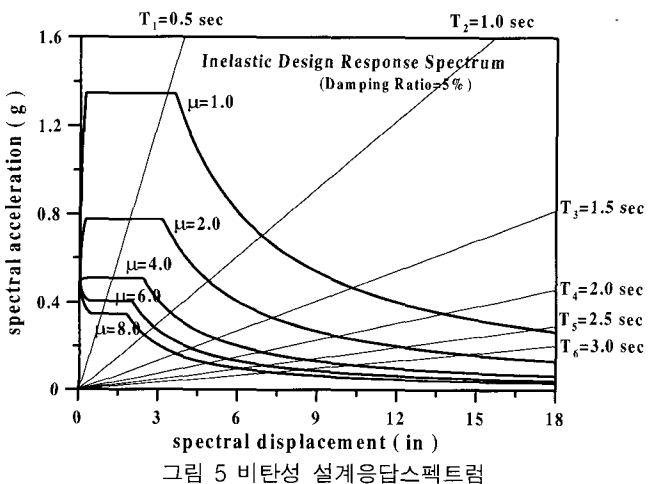


그림 5 비탄성 설계응답스펙트럼

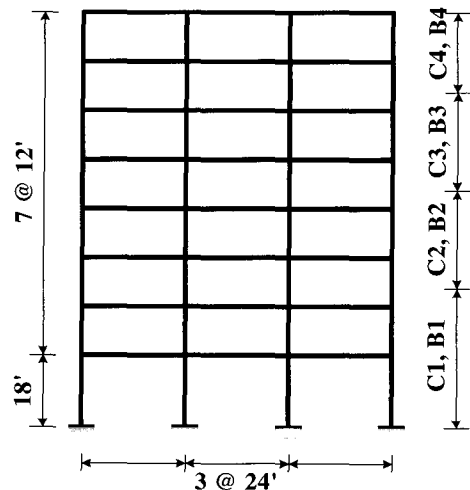


그림 6 예제 구조물

표 1 예제구조물에 사용된 부재단면

부재명		SCWB	WCSB
내부 기둥	C4	W 24×55	W 18×40
	C3	W 24×84	W 18×60
	C2	W 24×94	W 18×76
	C1	W 24×131	W 21×131
외부 기둥	C4	W 14×48	W 14×43
	C3	W 14×74	W 14×48
	C2	W 14×90	W 14×61
	C1	W 14×99	W 14×82
보	B4	W 18×40	W 24×68
	B3	W 21×50	W 24×68
	B2	W 24×55	W 24×76
	B1	W 24×68	W 24×102

4.2 예제구조물의 비선형 지진응답 평가

예제구조물에 대한 고유치 해석을 수행하여 구조물의 고유진동주기, 모드참여계수, 유효질량계수를 산정하였다. 표 2에서는 전체모드 중에서 3차 모드까지의 결과를 나타내었다.

4.2.1 구조물의 대표응답에 의한 평가

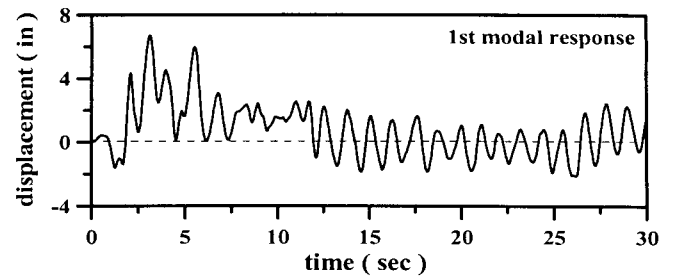
예제구조물 중에서 강기둥-약보(SCWB) 구조물에 대하여 비선형 시간이력해석을 수행한 후에 첫 번째 3개 진동모드에 대한 진동모드별 변위 응답을 비교하고, 그 기여 정도를 그림 7에서 나타내었다. 예제구조물이 같은 정형구조물의 경우에는 대부분의 동적 응답이 첫 번째 진동모드 형상에 의하여 지배된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 구조시스템을 대표하는 대표변위와 대표저항력은 식 (8)과 식 (10)을 이용하여 평가할 수 있다. 그림 8에서는 강기둥-약보(SCWB) 구조물의 대표변위와 대표저항력을 산정하고 각각 구조물의 최상층 변위와 밀면전단력과 비교하였다.

4.2.2 최대 회전연성요구도와 소성힌지분포에 의한 평가

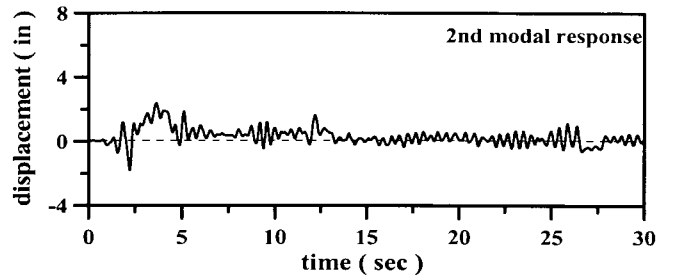
일반적으로 지진하중을 받는 부재에서는 비대칭 휨이 발생한다. 부재 길이의 중앙에서 변형과 모멘트에 대한 변곡점(inflexion point)이 발생한다고 가정한다면 부재의 양 단부에서 발생하는 회전각은 그림 9와 같이 나타낼 수 있다. 그러므로 부재에서 발생하는 회전연성도는 항복회전각에 대한

표 2 고유치 해석에 의한 예제구조물의 동적 특성

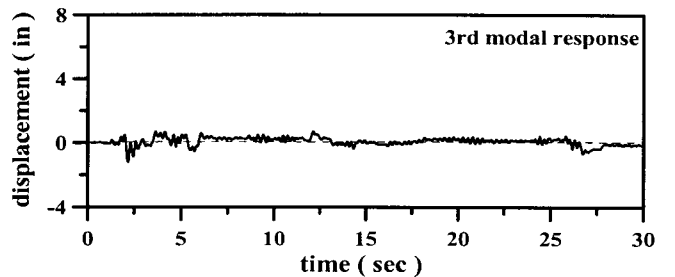
예제구조물	모드	고유 진동주기(sec)	모드 참여계수	유효 질량계수
강기둥-약보 (SCWB)	1차	1.168	1.348	0.829
	2차	0.420	0.508	0.115
	3차	0.238	0.239	0.033
약기둥-강보 (WCSB)	1차	1.156	1.325	0.837
	2차	0.410	0.480	0.117
	3차	0.245	0.260	0.029



(a) 1차모드 변위응답

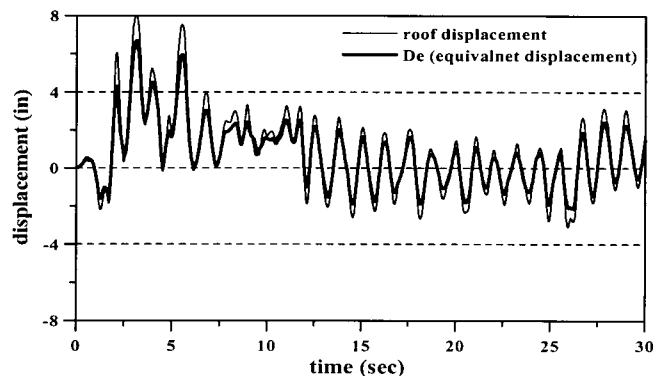


(b) 2차모드 변위응답

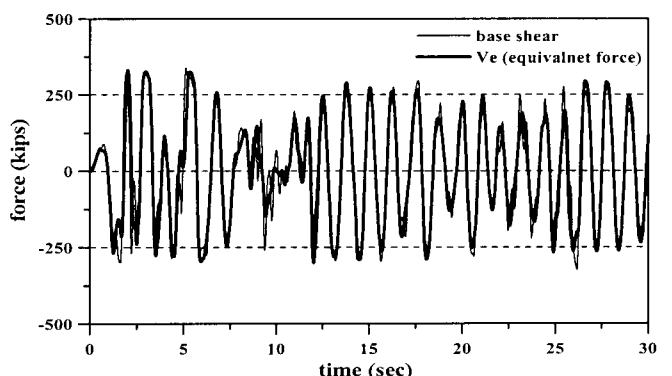


(c) 3차모드 변위응답

그림 7 구조물의 진동 모드별 변위응답(SCWB)



(a) 최상층 변위와 대표변위의 비교



(b) 밀면전단력과 대표저항력의 비교

그림 8 구조물의 대표응답(SCWB)

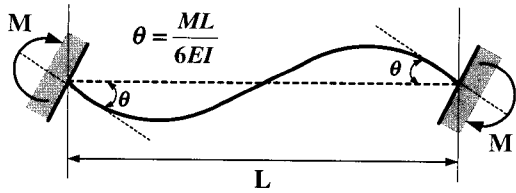


그림 9 지진하중을 받는 부재의 회전각

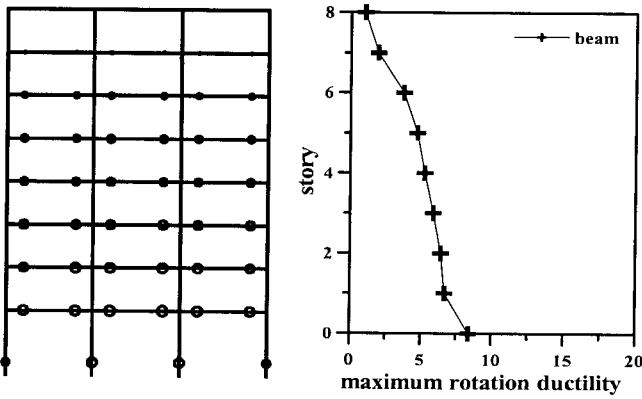
최대회전각의 비로서 식 (17)과 같이 정의된다.⁽¹⁶⁾

$$\mu_{\theta} = \frac{\theta_{max}}{\theta_y} = \frac{\theta_y + \theta_{plastic}}{\theta_y} = 1 + \frac{\theta_{plastic}}{\theta_y} = 1 + \frac{\theta_{plastic}}{M_y L / 6EI} \quad (17)$$

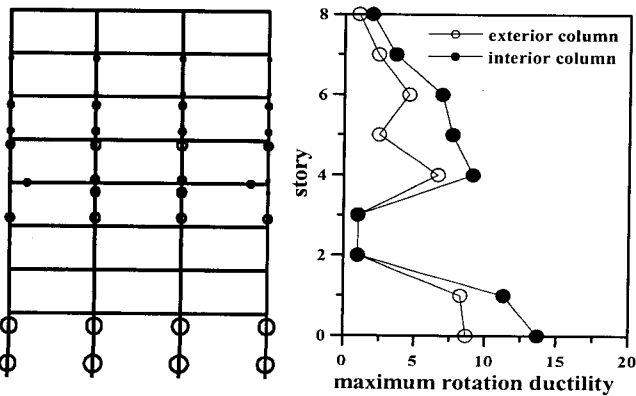
여기서 θ_{max} , θ_y , $\theta_{plastic}$ 은 각각 부재의 최대회전각, 항복회전각, 소성회전각을 나타내며, L 과 EI 는 부재의 길이와 휨강성을 의미한다. 두가지 시스템의 구조물에 대하여 비선형 소성흔지분포와 최대 회전연성요구도를 그림 10, 11에서 나타내었다. 강기둥-약보(SCWB) 구조물의 경우에는 비선형 변형이 모든 층에 대하여 골고루 분배되고 있지만 약기둥-강보(WCSB) 구조물의 경우에는 일부층에 불규칙하게 비선형 변형이 집중되고 있다는 것을 볼 수 있다.

4.2.3 지진에너지 성분에 의한 평가

강기둥-약보(SCWB)와 약기둥-강보(WCSB) 구조물의 지진



(a) 소성흔지분포 (b) 최대 회전연성요구도
그림 10 소성흔지분포와 최대 회전연성요구도(SCWB)



(a) 소성흔지분포 (b) 최대 회전연성요구도
그림 11 소성흔지분포와 최대 회전연성요구도(WCSB)

에너지 성분을 식 (13)의 다자유도계 절대에너지 방정식을 이용하여 그림 12와 13에서 나타내었다. 소성흔지분포와 최대 회전연성요구도와 마찬가지로 강기둥-약보(SCWB) 구조물의 경우는 소산에너지가 각 층에 균등하게 분포되고 있지만 약기둥-강보(WCSB) 구조물의 경우에는 하부층에 집중되고 있다는 것을 확인할 수 있다.

5. 철골 모멘트골조 구조물의 내진성능평가

본 연구에서는 설계 형식이 다른 두 가지 예제구조물에 대하여 비선형 시간이력해석과 비선형 정적해석을 이용한 능력스펙트럼법(CSM)에 근거하여 시스템 연성요구도를 평가하였다. 그리고 ATC-40에서 제시된 기존의 능력스펙트럼법(CSM)과 본 연구에서 제안된 방법을 이용하여 구조물의 비선형 지진응답과 내진성능을 비교·분석하였다.

5.1 비선형 시간이력해석에 의한 시스템 연성요구도 평가

등가단자유도계의 응답을 이용한 방법은 비선형 성질을 이선형(bilinear)로 모형화 하였기 때문에 힘과 변위의 관계는 완전한 이선형 곡선을 나타낸다. 그러나 대표응답을 이용한 방법은 힘과 변위의 관계가 다자유도계의 시간에 따른 실제적인 비선형 거동의 특성을 반영하고 있기 때문에 약간 불규칙하게 나타났다. 그림 14와 15에서 볼 수 있듯이 시스

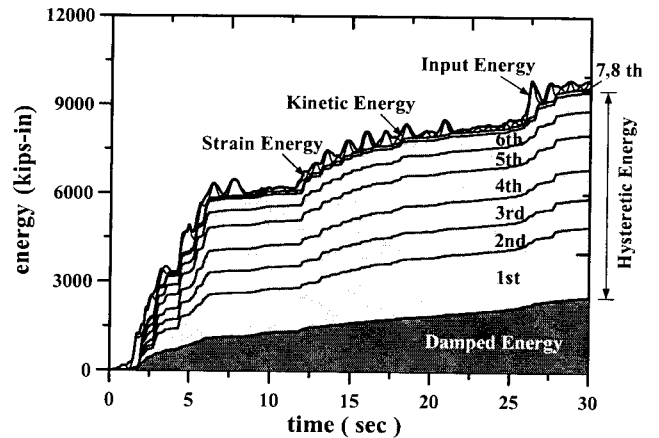


그림 12 구조물의 지진에너지 성분(SCWB)

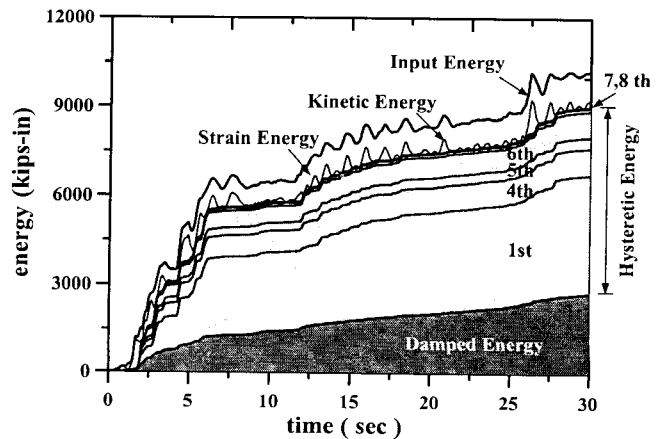


그림 13 구조물의 지진에너지 성분(WCSB)

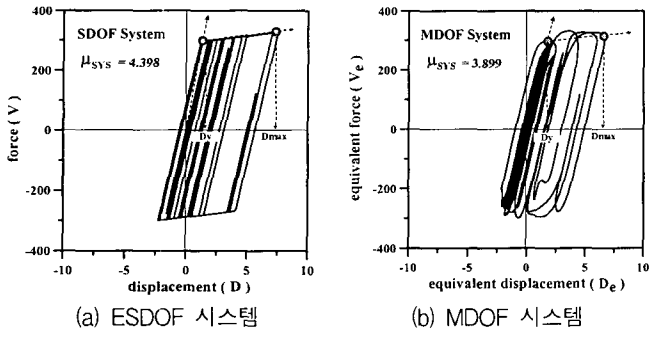


그림 14 구조물의 시스템 연성요구도(SCWB)

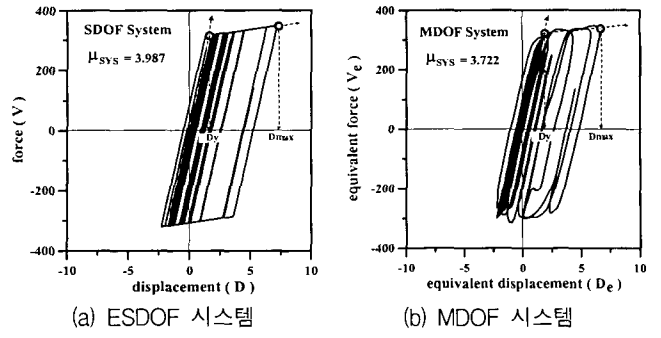


그림 15 구조물의 시스템 연성요구도(WCSB)

표 3 최대 회전연성요구도와 시스템 연성요구도의 비교

구조물	모델	D_y (inch)	D_{max} (inch)	μ_{sys}	μ_{θ}	μ_{θ} / μ_{sys}
강기동-약보 (SCWB)	ESDOF 응답	1.734	7.627	4.398	8.392	1.908~2.152
	MDOF 대표응답	1.765	6.882	3.899		
약기동-강보 (WCSB)	ESDOF 응답	1.812	7.225	3.987	13.691	3.433~3.678
	MDOF 대표응답	1.843	6.861	3.722		

템 연성요구도의 평가에 있어서는 두 구조물 모두 소성힌지 분포와 최대 회전연성요구도의 평가와는 다르게 큰 차이가 없이 평가되었다. 표 3은 두가지 구조물에 대하여 최대 회전 연성요구도와 시스템 연성요구도를 비교한 것이다. 각 층에서 발생하는 최대 회전연성요구도는 시스템 연성요구도의 대략 2~3배정도 크다는 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 Newmark와 Hall(1982)⁽¹³⁾의 연구 결과와도 일치한다.

5.2 능력스펙트럼법(CSM)에 의한 시스템 연성요구도 평가

비선형 정적해석을 수행한 후에 ATC-40에서 제시된 방법과 제안된 방법에 의하여 구조물의 능력곡선과 능력스펙트럼을 평가하였다. ATC-40에서는 구조물의 1차모드 형상에 따른 하중분포형상을 이용하여 비선형 정적해석을 수행한 후에 최상층 변위와 밀면전단력의 관계로서 능력곡선을 평가하고 1차 동적특성과 관련된 계수들을 이용하여 능력스펙트럼으로 전환한다. 본 연구에서 제안된 방법은 고차모드 효과가 반영될 수 있는 하중분포형상^{(9),(10)}을 이용하여 비선형 정적해석을 수행하고 구조물의 대표변위(D_e)와 대표저항력(V_e)의 관계로부터 직접 능력곡선과 능력스펙트럼을 평가한다. 그림 16, 17은 ATC-40에서의 능력스펙트럼법(CSM)과 본 연구에서 제안한 방법에 의하여 두 가지 구조물의 능력곡선과 능력스펙트럼을 비교한 것이다. 두 구조물 모두 1차 진동모드에 대한 응답이 구조물의 동적거동을 지배하기 때문에 성능점을 평가하는데 필요한 능력스펙트럼은 거의 차이가 발생하지 않는다는 것을 알 수 있다.

구조물의 능력스펙트럼과 변위연성비에 따른 비탄성 설계 응답스펙트럼을 이용하여 구조물의 최대 내력을 나타내는 성능점을 산정하였다. 지진하중에 대한 요구스펙트럼의 연성비와 구조물의 능력스펙트럼과 교차되는 점에서의 연성비가 일치되는 점이 구조물의 성능점으로 평가된다. 그림 18과 표 4는 강기동-약보(SCWB)구조물에 대하여 성능점과 시

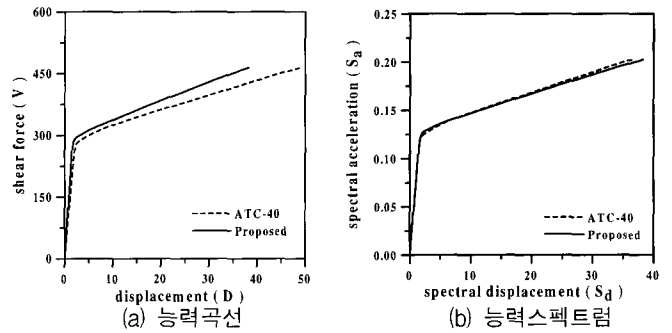


그림 16 능력곡선과 능력스펙트럼 비교(SCWB)

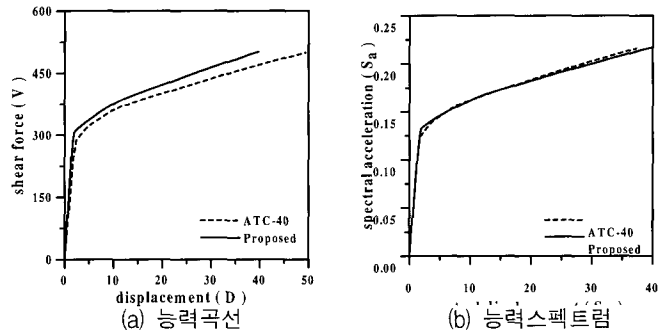


그림 17 능력곡선과 능력스펙트럼 비교(WCSB)

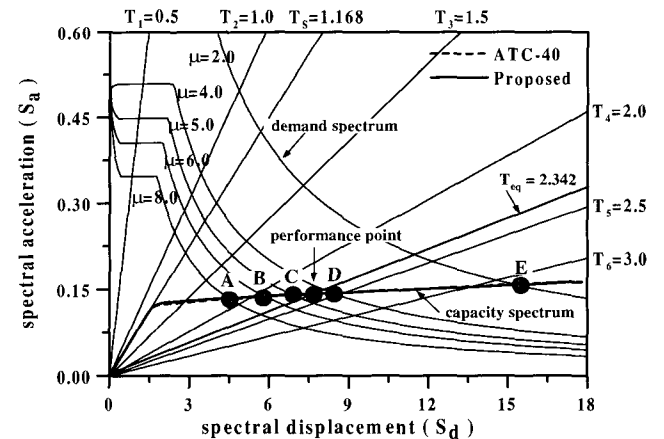


그림 18 구조물의 성능점 산정(SCWB)

표 4 제안된 방법에 의한 구조물의 시스템 연성요구도 및 유효주기 산정(SCWB)

변위연성비(μ)	SDOF system		MDOF system		System ductility (μ_{sys})	Effective period (T_{eff})
	S_d (inch)	S_a (g)	D (inch)	V (kips)		
A ($\mu=8.0$)	4.488	0.135	6.049	309.504	2.558	1.844
B ($\mu=6.0$)	5.859	0.137	7.898	314.089	3.340	2.091
C ($\mu=5.0$)	6.909	0.139	9.313	318.674	3.938	2.254
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mu=4.3$	7.616	0.142	10.266	325.552	4.342	2.342
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
D ($\mu=4.0$)	8.411	0.145	11.338	332.430	4.795	2.435
E ($\mu=2.0$)	15.352	0.158	20.694	362.234	8.752	3.152

스텝 연성요구도 및 비선형 특성이 반영된 성능점에서의 유효주기를 평가하는 과정을 나타낸다.

5.3 시스템 연성요구도 평가에 대한 비교

ATC-40에서 제시된 기존의 능력스펙트럼법(CSM)과 본 연구에서 제안된 방법을 그림 19, 20에서 비선형 시간이력해석의 대표응답을 이용하여 평가된 시스템 연성요구도와 비교하였다. 표 5에서 알 수 있듯이 비선형 정적해석의 경우에는 설계 응답스펙트럼을 사용하였기 때문에 약간 크게 평가되었다. 선택된 두 가지 예제구조물의 시스템 연성요구도는 비선형 시간이력해석의 응답을 이용하는 경우와 능력스펙트럼법을 이용하는 경우에 모두 비슷한 결과를 보이고 있다.

5.4 내진성능수준의 평가

성능에 기초한 내진설계에서 구조물의 내진성능 수준을 결정하는 가장 중요한 변수 중의 하나가 구조물에서 발생하

는 비선형 층간변위이다. 본 연구에서는 ATC-40에서 제시된 방법과 본 연구에서 제안한 방법을 이용하여 소성힌지분포(plastic hinge formation)와 층간변위 등의 비선형 지진응답을 비선형 시간이력해석에 의한 결과와 비교하였다. 그림 21, 22, 23, 24에서 알 수 있듯이 ATC-40에 의한 방법의 경우는 하부층에서는 지진응답을 과대평가하는 경향이 있으며, 상부층의 비선형 거동을 과소평가하는 문제점을 보였다. 제안된 방법의 경우는 비선형 시간이력해석에 의한 지진응답을 구조물의 상·하부층 모두 비교적 정확하게 평가하고 있다는 것을 볼 수 있다.

본 연구에서는 제안된 방법을 사용하여 두 가지 구조물의 각 층에서 발생하는 층전단력과 층간변위에 대한 성능한계(performance limit)를 그림 25, 26과 표 6에서 나타내었다. 층간변위와 층전단력에 대한 성능한계는 각 층에서 발생하는 파괴메카니즘을 가장 잘 반영한다. 강기둥-약보(SCWB) 구조물의 경우는 모든 층에서 연성거동을 하지만 약기둥-강보(WCSB) 구조물은 일부층은 탄성거동을 하고 특정층에서만

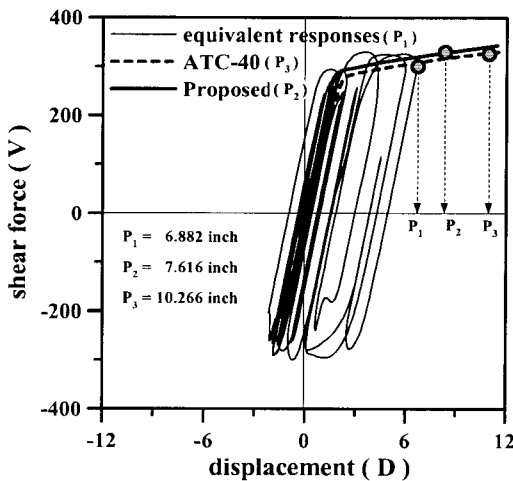


그림 19 시스템 연성요구도 비교(SCWB)

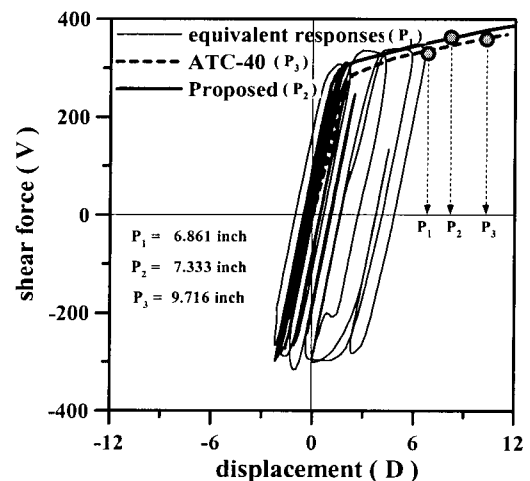


그림 20 시스템 연성요구도 비교(WCSB)

표 5 비선형 시간이력해석과 능력스펙트럼법(CSM)에 의하여 평가된 시스템 연성요구도 비교

시스템 연성요구도(μ_{sys})	비선형 시간이력해석		능력스펙트럼법(CSM)	
	ESDOF 응답	MDOF 대표응답	ATC-40	Proposed
강기둥-약보(SCWB)	4.398	3.899	4.381	4.342
약기둥-강보(WCSB)	3.987	3.722	4.147	4.106

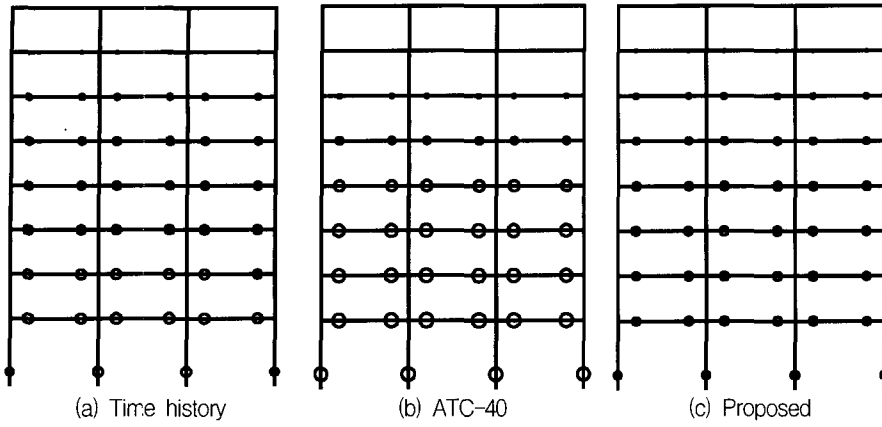


그림 21 소성힌지분포의 비교(SCWB)

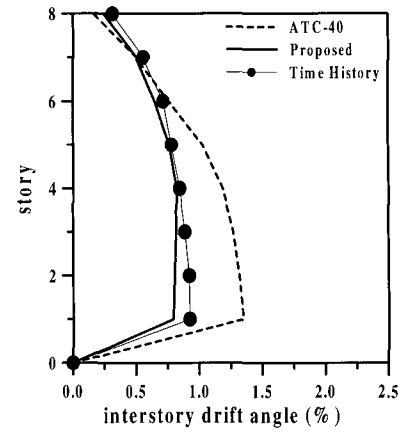


그림 22 층간변위의 비교(SCWB)

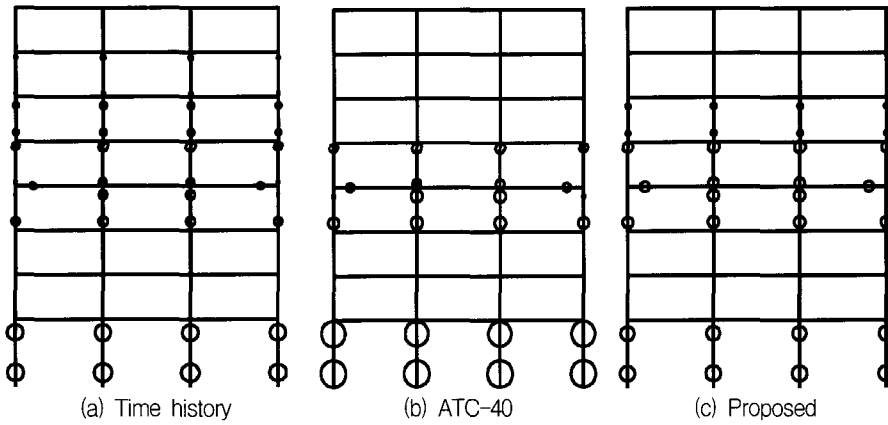


그림 23 소성힌지분포의 비교(WCSB)

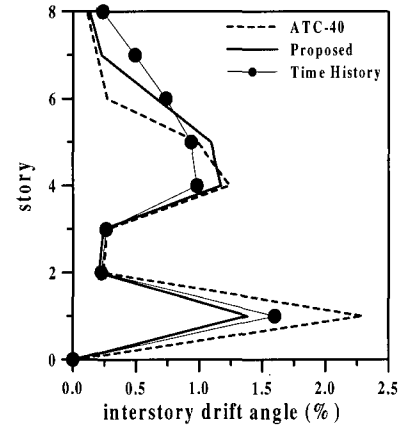


그림 24 층간변위의 비교(WCSB)

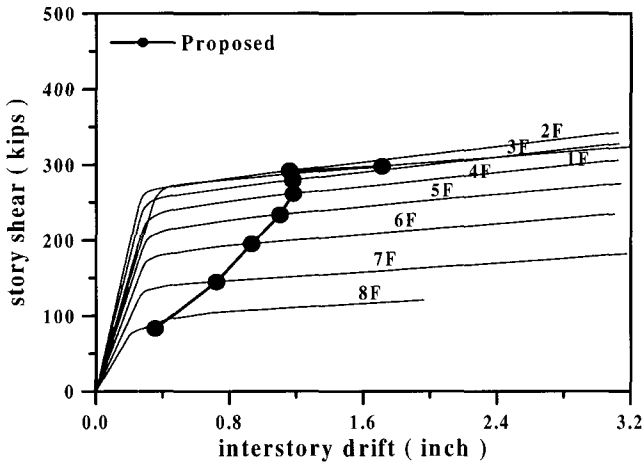


그림 25 제안된 방법에 의한 성능한계(SCWB)

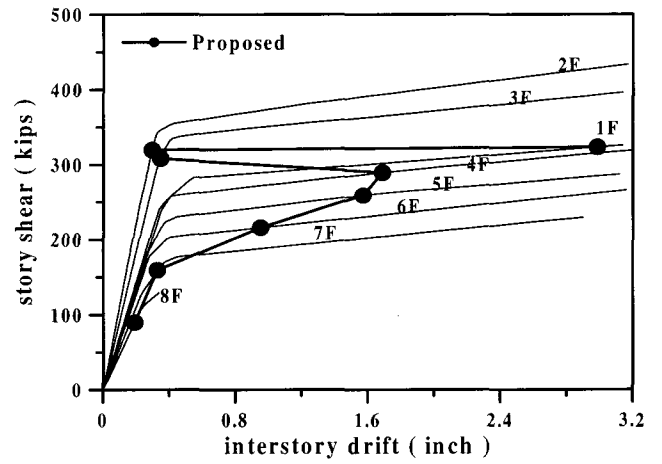


그림 26 제안된 방법에 의한 성능한계(WCSB)

표 6 제안된 방법에 의한 구조물의 성능한계(performance limit) 비교

층	강기동-약보(SCWB)			약기동-강보(WCSB)		
	층전단력(kips)	층간변위(inch)	층간변위각(%)	층전단력(kips)	층간변위(inch)	층간변위각(%)
8	82.9	0.353	0.245	89.5	0.190	0.132
7	144.9	0.721	0.501	159.2	0.327	0.227
6	195.2	0.932	0.647	215.8	0.949	0.659
5	233.3	1.099	0.763	258.9	1.569	1.089
4	261.2	1.179	0.819	289.4	1.686	1.171
3	279.7	1.176	0.817	308.1	0.346	0.240
2	292.0	1.157	0.804	319.3	0.295	0.205
1	297.9	1.710	0.792	323.0	2.986	1.382

비선형 변형이 집중되고 있다는 것을 효과적으로 파악할 수 있다. 본 연구에서 선택한 두 가지 예제구조물은 구조물의 시스템 연성요구도는 비슷하지만, 각 층에서 발생하는 국부적인 비선형 거동과 파괴메카니즘은 많은 차이를 보이고 있다는 것을 확인할 수 있다.

6. 결론 및 추후연구과제

본 연구에서는 설계 방법이 다른 두 가지 철골 모멘트골조 구조물에 대하여 비선형 지진응답을 비교·분석하였다. 그리고 비선형 시간이력해석과 능력스펙트럼법(CSM)을 이용하여 시스템 연성요구도를 산정하고 두 가지 구조물의 내진성능을 평가하여, 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 구조물의 대표응답에 대한 정확성은 비선형 시간이력해석에 의한 다자유도계의 지진에너지 성분과 비교함으로써 검증할 수 있었다. 그러므로 구조물의 대표응답은 비선형 지진거동을 분석하고 내진성능을 평가하는데 있어 효과적으로 적용될 수 있다고 판단된다.
- (2) ATC-40과 제안된 능력스펙트럼법(CSM)에 의한 구조물의 시스템 연성요구도 평가는 비선형 시간이력해석의 응답을 이용하는 방법과 거의 비슷한 결과를 나타내었다. 그러므로 능력스펙트럼법(CSM)에 의한 시스템 연성요구도 평가는 어느 정도 정확성을 확보하고 있으며, 비선형 시간이력해석의 대표응답을 이용한 시스템 연성요구도는 능력스펙트럼법(CSM)에 의하여 결정되는 성능점에서의 연성요구도에 대한 평가 기준이 될 수 있을 것으로 판단된다.
- (3) 제안된 능력스펙트럼법(CSM)은 소성힌지분포와 층간변위와 같은 구조물의 국부적인 비선형 지진응답에 대한 평가를 ATC-40에서 제시된 능력스펙트럼법(CSM) 보다 비선형 시간이력해석의 결과를 잘 반영하였다. 그러므로 제안된 방법을 이용하면 기존의 방법보다 비교적 정확하게 구조물의 비선형 지진응답과 내진성능을 평가할 수 있다.
- (4) 제안된 내진성능평가 방법은 응답변위와 응답가속도에 대한 능력스펙트럼 형식으로의 전환 과정이 필요 없이 직접적으로 구조물의 저항능력을 평가할 수 있다. 이것은 다자유도계와 단자유도계의 변환식을 이용하는 기존의 ATC-40방법보다 더 명확하다고 할 수 있다.
- (5) 본 연구에서 선택한 철골 모멘트골조는 접합부 패널존에 대한 영향을 고려한다면 비선형 지진응답의 특성과 내진성능이 변화될 수 있으므로 이에 대한 고려가 필요하다. 그리고 유연한 철골구조물은 P- Δ 효과를 고려하면 비선형 정적해석의 경우에 항복 후의 강성변화로 인하여 내진성능의 저하를 예상할 수 있다. 그러므로 추후연구과제로는 이러한 철골 모멘트골조의 접합부 특성과 P- Δ 효과를 고려한 비선형 동적 및 정적거동을 살펴보고, 본 연구에서 언급한 내용들에 대한 적용성과 타당성 여부를 검증하는 과정이 필요하다고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 2001년도 두뇌한국 21사업 핵심분야 사업비와 서울대학교 지진공학연구센터를 통한 한국과학재단 우수연구센터 지원금에 의한 것이며, 이에 감사드립니다.

참고 문헌

1. ATC, "Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings," ATC-40 Report, Applied Technology Council, Redwood City, California, 1996.
2. FEMA, "NEHRP guidelines for the seismic rehabilitation of buildings," FEMA 273, Federal Emergency Management Agency, Washington, D. C., 1997. 10.
3. FEMA, "NEHRP commentary on the guidelines for the seismic rehabilitation of buildings," FEMA 274, Federal Emergency Management Agency, Washington, D. C., 1997. 10.
4. Freeman, S. A., "Development and use of capacity spectrum method," 6th U.S. National Conference on Earthquake Engineering, Seattle, Washington, 1998.
5. Lee, D. G., Song, J. K., and Yun, C. B., "Estimation of system-level ductility demands for multi-story structures," *Engineering Structures*, Vol. 19, No. 12, 1997, pp. 1025-1035.
6. Fajfar, P., "Capacity spectrum method based on inelastic demand spectra," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 28, 1999, pp. 970-993.
7. Chopra, A. K. and Goel, R. K., "Capacity-demand-diagram methods for estimating seismic deformation of inelastic structures : SDF Systems," *Report No. PEER-1999/02*, Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1999.
8. Bracci, J. M., Kunnath, S. K., and Reinhorn, A. M., "Seismic performance and retrofit evaluation of reinforced concrete structures," *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, New York, Vol. 123, No. 1, 1997. 1, pp. 3-10.
9. Lee, D. G., Choi, W. H., and Lee, J. W., "Determination of inelastic seismic response and evaluation of seismic performance for building structures using pseudo dynamic analysis method," *NZSEE 2001 Technical Conference*, Taupo, New Zealand, paper No. 4.10.01, 2001.
10. 이동근, 최원호, 안지희, "건축구조물의 비선형 지진응답 평가를 위한 개선된 지진하중 분배방법," 한국지진공학회 논문집, 제5권, 제2호, 2001. 4, pp. 33-47.
11. Lee, D. G., "Accurate and Simplified Models for Seismic Response Prediction of Steel Frame Structure," Ph. D. Dissertation, Dept. of Civil Engineering, Stanford University, 1984.

12. Uang, C. M. and Bertero, V. V., "Evaluation of seismic energy in structures," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, 1990, pp. 77-90.
13. Newmark, N. M. and Hall, W. J., "Earthquake spectra and design," *Earthquake Engineering Research Institute*, Berkeley, California, 1982.
14. UBC, "Uniform building code," International Conference of Building Officials(ICBO), Whittier, California, 1997.
15. Tsai, K. C. and Li, J. W., "DRAIN 2D : A general purpose computer program for static and dynamic analyses of inelastic 2D structures supplemented with a graphic processor," *Report, No. CEER/R83-03*, National Taiwan University, 1994.
16. Walpole, W. R. and Shepherd, R., "Elasto-plastic seismic response of reinforced concrete frame," *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 95, No. ST10, 1969, pp. 2031-2055.
17. Chopra, A. K., *Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice-Hall Inc., 1995.