# 고장목을 근사적으로 해석하는 효율적인 방법

서희종*

# An Effective Method for Approximate Fault-Tree Analysis

Hee-jong Suh*

본 연구는 여수대학교 1999년도 학술연구지원비에 의해서 연구되었음

요 약

본 논문은 샤논분할을 이용하여 고장목을 해석하는 효과적인 방법을 나타낸다. 이 방법의 이점은 1) 최소컷셋을 사전에 산출하지 않는다는 것, 2) 최대 오차를 처음에 열거할 수 있다는 것, 3) s-dependence인 시스템도 해석할 수 있다는 것이다. 단점은 분할목의 어떤 부분목을 쉽게 결정할 수 없다는 점이다.

ABSTRACT

In this paper I describe an Effective method by which analyzes the Fault-Tree, with Shannon decomposition. The advantage of this method are: 1) All the minimal cutsets can not be preprocessed. 2)The maximum error can be prespecified. 3)s-dependent system also can be analyzed. But disadvantage is that certain subtrees of the decomposition tree can not be determined easily.

키워드

샤논분할, 고장목, 분할목, 무효도

## I. 서론

실제생활에서 고장목(fault tree)으로 표현되는 문제가 있고 이의 연구는 필요하다. 이를 연구하는데 근사적으로 해석하는 방법은 흥미의 대상이었다. 고장목의 근사해에 관한 종래의 연구로서 항의 곱셈으로 표현하여 연구했다.[1,2]

근사적인 고장목을 해석 할 때에 주어진 시스템(고장목)의 최소컷셋을 고려하지 않기 위해서 알고리듬이 개발되었다.[4] 그러나 이 알고리듬은 이해하기에 힘들었고 모든 시스템에 적용할 수 없었다.

본 논문에서 근사적인 해를 구하는 새로운 방법을 간단히 설명한다. 이의 알고리듬은 이해하기 쉽고 모든 시스템에 적용이 가능하다. 이 경우에 샤논 전개(shannon expansion)를 수행한다. 이 알고리듬은 주어

* 여수대학교

접수일자: 2001. 12. 12

진 고장목을 근사값으로 갖는 부울함수의 2진목으로 변환한다. 이때에 시스템의 무효도(unavailability)의 하한값인 최대 오류값을 계산해야 한다.

다음은 기호를 설명하고 시스템의 상태를 가정한다. 2장에서는 기본원리를 설명하고, 3장에서 간단한 예를 들어 설명한다. 4장에서는 이 방법에 대한 검토와 결론이다. 그 다음은 참고문헌이다.

모든 요소는 양호한 상태나 고장인 상태를 갖고 s-dependence를 s-independence로 고려할 수 있고, 고장목은 지연이 없다고 가정한다.

본 논문에서 사용하는 기호를 다음과 같이 정의한다.

$A$ 부울 값

$X_i$ 요소 $e_i$에 대한 고장목의 입력변수

$\overline{X_i}$ not $X_i$, $\overline{X_i}=1-X_i$

$X_s$ 시스템에 대한 고장목의 출력변수

$A_i, U_i$ 요소 $i$의 유효도, 무효도

$U_s$ 시스템의 무효도

$\Psi$ 부울함수

$\varepsilon_{max}$ $U_s$의 최대값과 최소값의 최대차

## II. 고장목 해석 알고리듬

부울함수 $\Psi$를 다음과 같이 샤논(shannon) 분할해서 고장목을 얻고, 이를 해석한다.[3]

$$\begin{aligned}&\Psi(X_1,\ldots,X_n)\\&=X_i\Psi(X_1,\ldots,X_{i-1},1,X_{i+1},\ldots,X_n)\\&\quad+\overline{X_i}\Psi(X_1,\ldots,X_{i-1},0,X_{i+1},\ldots,X_n)\\&=X_i\Psi(X_i=1)+\overline{X_i}\Psi(X_i=0)\end{aligned}\tag{1}$$

이 방법을 반복적으로 적용하여 부울대수항을 상용대수로 만든다. 그림 1에 대해서 샤논분할을 하면 그림 2와 같은 이진목을 얻는다. 루트(root)에서 가지까지 각 패스는 부울함수 $\Psi$인 다항식에서 하나의 곱의 합(sum of disjoint products) 항에 해당한다.

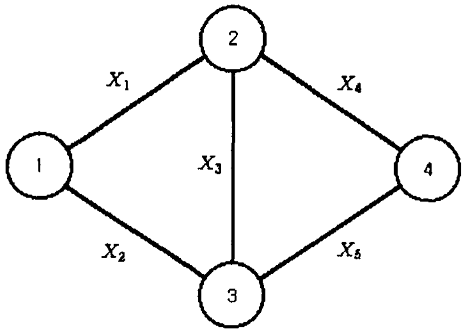


그림 1. 그래프

그림 2의 오른쪽 패스는 패스의 각 가지들의 값을 곱해서 얻어지는데, $\overline{X_1}\,\overline{X_2}X_4X_5$이다.

그림 2의 2진목에 대한 고장목 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&X_s\\&=X_1\{X_2+\overline{X_2}[X_3(X_5+\overline{X_5}X_4)+\overline{X_3}X_5X_4]\\&+\overline{X_1}\{X_2[X_3(X_4+\overline{X_4}X_5)+\overline{X_3}X_4X_5]\\&+\overline{X_2}X_4X_5\}\end{aligned}\tag{2}$$

(1)식은 인수분해가 된다. 부울함수 $\Psi$의 곱의 합 형태의 항의 $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 s-independent 하다면 $X_k$와 $\overline{X_k}$는 $U_k$ 와 $\overline{U_k}=A_k$로 바꾸어 쓸 수 있다. 근사값을 구하기 위해서 부분목의 확률은 1로 상한값을 정한다. 이 계산에서 목의 가지가 절단되는 분할목으로부터 무효도는 상한값이다. 이 때 양의 오차는 기껏해야 이들 가지와 관련된 확률의 합이다. 이들 가지는 완전히 전개된 분할목의 내부절점(inner node)이다. 그림 2에서의 내부절점에 도달하여 분할을 마친다.

오차의 근사적인 상한 값

$$\begin{aligned}\varepsilon&=U_1A_2(U_3+A_3U_5U_4)\\&\quad+A_1[U_2(U_3+A_3U_4U_5)+A_2U_4U_5]\end{aligned}\tag{3}$$

왜냐하면

$$U_5+A_5U_4,\quad U_4+A_4U_5<1\tag{4}$$

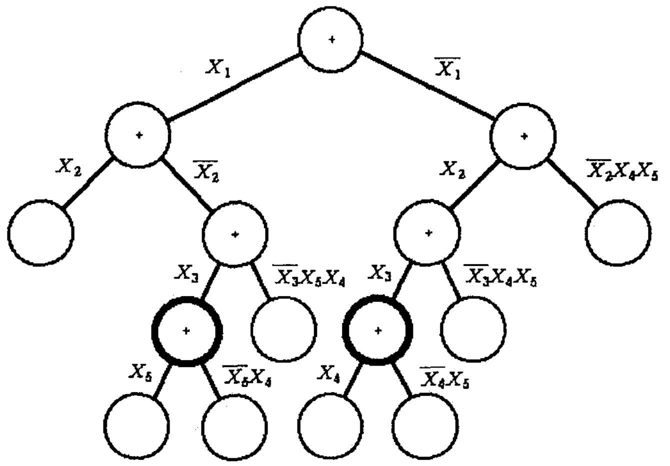


그림 2. 진폭

이기 때문이다. 혹은 보다 더 근사적인 상한 값

$$\begin{aligned}\varepsilon &= U_1A_2(U_3U_5+A_3U_5U_4)\\ &+A_1[U_2(U_3U_4+A_3U_4U_5)+A_2U_4U_5)]\end{aligned} \tag{3-1}$$

왜냐하면

$$U_4,\ U_5 < 1, \tag{4-1}$$

이기 때문이다. 상한값 $\varepsilon$가 주어진 오차의 최대차 $\varepsilon_{max}$에 비해서 아주 클 경우 부분목을 전개하지 않는다. 물론 최소 분할목 이상으로 전개하는 경우도 있지만, 최상의 근사값을 얻을 것이다. 이 방법을 알고리듬으로 나타낸다.

알고리듬

1. 고장목 함수 $\Psi(X_1,\ldots,X_n)$을 샤논전개로 BFS(breadth first search) 방법에 의해서 2진목으로 전개한다.(이 목을 샤논목이라 한다.) 시스템 무효도의 상한값 $U_s'$는 시스템의 무효도 $U_s$보다는 적어도 $\varepsilon_{max}$값의 차이로 더 크다고 생각한다.
2. $\varepsilon \le \varepsilon_{max}$이면 4로 간다.
3. $\varepsilon > \varepsilon_{max}$이면 1로 간다.
4. 샤논목을 문자를 사용하여 대수적인 곱으로 나타낸다. s-independent $X_1,\ldots,X_n$ 인 경우 $X$는 $U$로 $\overline{X}$는 $A$로 나타낸다.
5. $\varepsilon$의 값과 근사값 $U_s'$와 $U_s$을 출력한다.

$\varepsilon < \varepsilon_{max}$이면 $U_s' - \varepsilon < U_s \le U_s'$이다.

## III. 예제

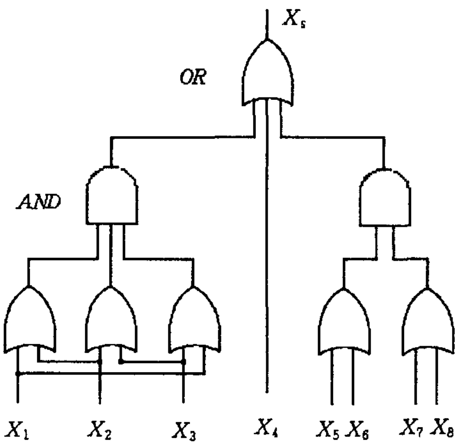


그림 3. 예제의 고장목

그림 3의 고장목 함수(중복인 구조를 갖는 함수)는 곱의 합인 형태가 아니다.

$$X_s = (X_1 \vee X_2)(X_1 \vee X_3)(X_2 \vee X_3) \vee X_4 \vee (X_5 \vee X_6)(X_7 \vee X_8) \qquad (5)$$

$i=1$인 경우, (1)식을 적용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} X_s &= X_1[X_2 \vee X_3 \vee X_4 \vee (X_5 \vee X_6)(X_7 \vee X_8)] \\ &+ \overline{X_1}[X_2 X_3 \vee X_4 \vee (X_5 \vee X_6)(X_7 \vee X_8)] \end{aligned} \qquad (6)$$

여기서 간소화 규칙 $AB(A \vee B)=AB$을 적용했다. 2차 근사값을 위해서 더욱 분할해야한다. (6)식에 $i=5$인 경우, (1)식을 적용하면 다음 (7)식과 같다.

$$\begin{aligned} X_s &= X_1\{X_5(\underline{X_2 \vee X_3 \vee X_4 \vee X_7 \vee X_8}) \\ &+ \overline{X_5}[X_2 \vee X_3 \vee X_4 \vee X_6(X_7 \vee X_8)]\} \\ &+ \overline{X_1}\{X_5(X_2 X_3 \vee X_4 \vee X_7 \vee X_8) \\ &+ \overline{X_5}[X_2 X_3 \vee X_4 \vee X_6(X_7 \vee X_8)]\} \end{aligned} \qquad (7)$$

분할하는 단계를 그림 4가 설명한다. 좌측 절점이 가지가 된다면 상응하는 최대오차는 $\varepsilon_1 = U_1 U_5$이다.

$X_s'$을 상응하는 고장목의 출력이라고 하면 (7)식의 밑줄 부분을 1로 하는 것과 같다.

$\varepsilon_1 > \varepsilon_{max}$ 이면 왼쪽 절점의 부분목은 더욱 전개되어야 한다. 그렇지 않으면 분할목에서 더욱 안쪽의 절점이 가지로 될 수 있다. 다른 $i=2, 3, 6$을 택하면

$$\begin{aligned} X_s' &= X_1\{X_5 \\ &+ \overline{X_5}[X_6(\underline{X_2 \vee X_3 \vee X_4 \vee X_7 \vee X_8}) \\ &+ \overline{X_6}(X_2 \vee X_3 \vee X_4)]\} \\ &+ \overline{X_1}(X_5[X_2(\underline{X_3 \vee X_4 \vee X_7 \vee X_8}) \\ &+ \overline{X_2}(X_4 \vee X_7 \vee X_8)] \\ &+ \overline{X_5}\{X_3[X_2 \vee X_4 \vee X_6(X_7 \vee X_8)] \\ &+ \overline{X_3}[X_4 \vee X_6(X_7 \vee X_8)]\} \end{aligned} \qquad (8)$$

밑줄 친 부분을 1로 놓으면 이는 최대오차를 갖는 근사값이다.

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + U_1 A_5 U_6 + A_1 U_5 U_2$$

$\varepsilon_2 > \varepsilon_{max}$이면 (8)식의 밑줄 친 부분의 부분목이 더 전개되어야 한다. 그렇지 않으면 $X_s'$를 더욱 간소화할 수 있다. 이때 한번 더 분할 한 후에 가능하다.

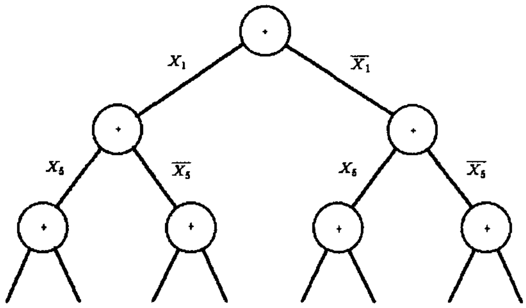


그림 4. 예제의 분할 목의 위쪽 부분

$$\begin{aligned} X_s'' &= X_1\{X_5 + \overline{X_5}[X_6 + \overline{X_6}(X_2 \vee X_3 \vee X_4)]\} \\ &+ \overline{X_1}(X_5\{X_2 + \overline{X_2}[X_4 + \overline{X_4}(X_7 \vee X_8)]\} \\ &+ \overline{X_5}\{X_3[X_6(X_2 \vee X_4 \vee X_7 \vee X_8) \\ &+ \overline{X_6}(X_2 \vee X_4)] \\ &+ \overline{X_3}[X_6(X_4 \vee X_7 \vee X_8) + \overline{X_6}X_4]\}) \end{aligned} \qquad (9)$$

인데 $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + A_1 A_5 U_3 U_6$이다. $\varepsilon_3 < \varepsilon_{max}$이면 $X_s'''$로 분할할 수 있다. 이것은 밑줄 친 부분을 1로 하는 $X_s''$이다. 그렇지 않으면 $X_s''$는 완전히 분할되어 계산되어야 한다. 밑줄 친, 즉 생략한 항에서 근사값을 구하기 위해서 얼마만큼의 작업을 해야하는가를 알 수 있다.

## IV. 검토 및 결론

부울함수를 샤논분할하여 시스템의 비신뢰도(unreliability)/무효도와 평균고장주파수(mean failure frequency)를 쉽게 근사적으로 계산할 수 있다. 다른 논문[1]에서는 이와 같은 해석을 하기 위해서 사전에

고장목 함수가 곱의 합이라는 가정을 했지만[5], 본 논문에서는 이와 같은 가정을 하지 않았다. 이 때문에 조금 복잡한 절차를 갖는데, 샤논의 방법을 적용하여 2진분할목을 찾기 때문에 잘 이해되었다. 이 근사 방법은 2진분할목의 한 부분목이 차단되어질 수 있다는 것을 의미한다. 이 예는 그림 2에서 알 수 있는데, 차단되어 전개하지 않은 부분목은 굵은 원으로 나타낸 절점에서 가지이다.

샤논분할을 어떤 부울함수에 적용할 수 있다는 사실 때문에 다른 논문[4]에서와 같이 AND와 OR게이트만을 갖는 고장목으로 제한할 필요가 없다.

컷셋을 이용하지 않는 알고리듬을 부울대수를 간소화하고 식을 전체적으로 최소화하여 구현할 수 있다. 예제는 Schneeweiss가 적용한 한 예이다.

계산 복잡도는 $i$를 어떻게 선택할 것인가에 따라서 실제 예에서 많은 차이가 있을 것이다.

요소가 s-dependence인 경우가 실제일 수 있다. 이 경우는 서로 관련을 갖는 확률에 의해서 알고리듬이 구현될 것이다.

내부절점이라는 개념으로 시스템의 무효도의 상한값을 얻을 수 있었다.

## 참 고 문 헌

[1] W. G. Schneeweiss, K. S. Brown,"Comments on : Evaluating fault trees (AND & OR gates only) with repeated events," IEEE Trans. Reliability, vol-40, pp 8-10, 1991 Apr.

[2] W. G. Schneeweiss, "SyRePa'89 - A package of programs for system reliability evaluation," Informatik-Bericht 91(2/1990) Fern Universitat, D-58 Hagen.

[3] W.G. Schneeweiss."Disjoint Boolean products via Shannon's expansion," IEEE Trans. Reliability, vol R-33, pp329-332, 1984 Oct.

[4] K. S. Brown, "Evaluating fault trees (AND & OR gates only) with repeated events," IEEE Trans. Reliability, vol R-39, pp 226-235, 1990 Jun.

[5] W.G. Schneeweiss, "Fast fault tree evaluation for many sets of input data," IEEE Trans. Reliability vol R-39, pp 296-300, 1990 Aug.

## 저 자 소 개

서희종(Hee-jong Suh)
1975년 한국항공대학교 졸업
1987년 한양대학교박사과정 수료
1996년 중앙대학교에서 박사학위
1999년 7월부터 1년간 일리노이즈 주립대학교(시카고)에 객원교수
현재 여수대학교 교수
※ 주관심분야 : 네트워크의 토포로지