한국학교수학회논문집 제 4권, 제 1호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 4, Number 1, 29-36, May 2001

체험을 통한 수학교육

- 프랙탈과 무한 -

이 규 봉[1]

I. 서 론

본 연구는 1999년 2월 중학생을 대상으로 실시한 배재대학교 과학영재센타 수학교실에서 다룬 내용으로 그 주제와 교육방법을 서술하고, 결과와 함께 체험을 통한 수학 교육의 필요성을 강조한다. 수학교실에서 다룬 문제의 주제는 체험을 통하여 수학의 필요성을 느끼게 하여 수학을 배우는 동기를 효과적으로 유발시킬 뿐 아니라 수학은 생각의 깊이를 더해 주어 폭넓은 사고를 할 수 있게 도와주는 과목임을 깨닫게 하는 것이다. 이 교실은 중학생을 대상으로 하였으며 이 교실에서 다룬 문제는 다음과 같다.

문제 1. 지칠 줄 모르는 개미와 거북이가 있습니다. 개미와 거북이는 똑같이 1분에 1m 갑니다. '가' 지점에서 '나' 지점까지 달리기 시합을 하면 일반적으로 누가 이길까요?
문제 2. 넓이는 유한이고 그 둘레는 무한인 도형이 있을까요?

문제 1을 통하여 학생들에게 알려주고자 하는 것은 "같은 거리이면 항상 같은 속도로 달리는 두 개체는 같은 시간에 도착한다"는 고정관념을 깨우쳐 주는 것이다. 물론 이 명제가 틀린 것은 아니나, 두 지점간의 길이 항상 반듯하게 나 있는 것은 아니므로 재는 척도에 따라 같은 거리라 할지라도 실질적으로 시간의 차이가 있을 수 있다는 것이다. 문제 1의 연장선으로 문제 2에서는 시각적으로 볼 때 유한의 면적을 갖으려면 그 둘레 역시 유한이어야 한다는 고정관념을 깨우쳐 주고자 한다. 비록 보이지는 않지만 무한의 둘레를 가진 도형의 면적이 유한일 수도 있다는 존재성을 일깨워 주는 것이다. 이를 위한 풀이의 전개 과정은 첫째 문제제기, 둘째 토론, 셋째 체험, 넷째 이론학습이다. 2절에서는 토론과 체험적인 방법에 대하여 설명하고 3절에서는 이론적인 방법을 설명하였으며 4절에서는 체험을 통하여 학습의 동기를 갖게 한 후 수학적 이론을 설명하는 새로운 방법에 관하여 학생들이 보인 반응을 서술한다.

II. 체험을 통한 방법

1. 개미와 거북이

1) 배재대학교 응용수학과

문제 1. 지칠 줄 모르는 개미와 거북이가 있습니다. 개미와 거북이는 똑같이 1분에 1m 갑니다. '가' 지점에서 '나' 지점까지 달리기 시합을 하면 일반적으로 누가 이길까요?

문제 1을 해결하기 위하여 다음과 같은 보기를 들어 학생의 주장과 그 이유를 설명하게 하고 서로 토론을 하게 하였다.

(1) 개미가 이긴다.
(2) 거북이가 이긴다.
(3) 똑같이 비긴다.
(4) 그밖에

토론하는 과정에서 다양한 의견이 나왔으나 의견의 일치를 본 것은 '진행한 거리(s)는 속도(v)에 진행한 시간(t)을 곱한 것'이므로 $s=v\times t$이고 따라서 '속도가 같으면 같은 시간에 같은 거리를 간다.'는 것이었다. 그러므로 $t=\frac{s}{v}$이고 개미와 거북이는 같은 속도로 같은 거리를 달리므로 같이 도착하여 비긴다는 결론에 도달하게 되었다. 이 결론이 유도된 후에 '가' 지점에서 '나' 지점으로 가는 길이 그림 1과 같이 복잡하면 '개미와 거북이는 비길 수 있을까?'를 생각하게 하였다. 또한 거북이는 개미보다 크고 그림 1의 꼬불꼬불한 길의 어느 한 부분의 길이보다도 더 클 수 있다는 것을 제시하였다.

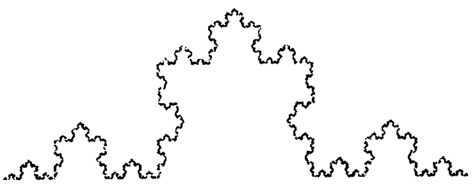

그림 1 복잡한 길

문제 1을 직접 체험하여 답을 구하기 위하여 준비물로 눈금이 5mm, 1cm, 2cm인 자를 준비하였으며 학생 13명을 3개조로 편성하여 각각 다른 자를 이용하여 조별로 협동하여 그림 2부터 그림 6에 있는 도형의 길이를 직접 재게 한 다음 그 결과를 토론하게 하였다. 그림 3은 그림 2에 있는 선분의 가운데 $\frac{1}{3}$을 삼각형 모양으로 꺾어 올리고 잘린 부분을 같은 길이로 연결한 도형이고 그림 4은 그림 3에 있는 각 선분의 가운데 $\frac{1}{3}$을 같은 방법으로 삼각형 모양으로 각각 올린 도형이고 나머지 그림도 같은 방법으로 만든 도형임을 미리 설명하였다.

그림 2 0단계

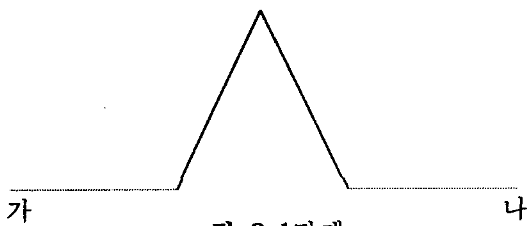

그림 3 1단계

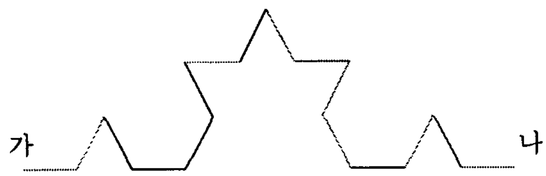

그림 4 2단계

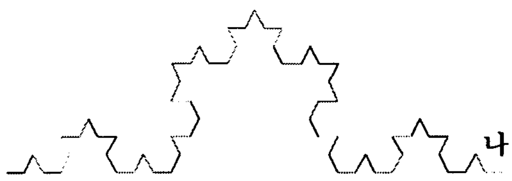

그림 5 3단계

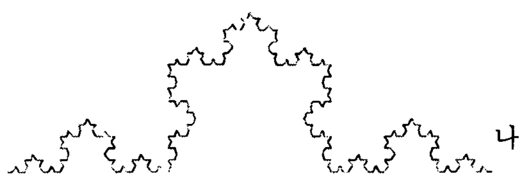

그림 6 4단계

그림 2와 그림 3은 각 조가 비슷한 길이를 구하였다. 그러나 그림 4와 특히 그림 5나 그림 6에서는 5mm의 자로 잰 조의 길이가 더 길었고 그 다음은 1cm인 자로 잰 조였으며 2cm 자로 잰 조의 길이는 가장 작았다. 그 결과를 토론하게 하여 같은 지점간의 거리라도 재는 자에 따라 길이가 다르게 나올 수 있음을 깨닫게 하였다.

결국 개미가 달리는 것은 눈금이 작은 자로 길이를 재는 것에 비유되고 거북이가 달리는 것은 눈금이 큰 자로 길이를 재는 것이 되므로 개미가 더 긴 거리를 달리게 되는 효과가 되어 같은 속도라 할지라도 거북이가 빨리 도착하게 됨을 알게된다.

2. 무한 둘레의 유한 넓이

문제 2. 넓이는 유한이고 그 둘레는 무한인 도형이 있을까요?

문제 1에 관한 충분한 토론과 체험을 거친 후 반복을 통하여 만들어진 그림 2에서 그림 6의 도형들이 반복을 하면 할수록 점점 길이가 길어짐을 학생들은 알게된다. 이 반복을 무한히 반복하면 길이는 얼마나 길어질까를 생각하게 하면서 다음과 같은 응용문제를 다루게 하였다.

(1) '가' 지점에서 '나' 지점까지의 거리는 무한히 길으나 1초 이내에 '가' 지점에서 '나' 지점으로 갈 수 있는 그러한 길이 있는지 설명해 보세요.
(2) 남해안의 해안선의 길이를 정확하게 측정하면 얼마나 될까요?

이 문제에 관한 답을 여운으로 남긴 상태에서 문제 2에 관하여 학생들이 토론을 하도록 한다. 학생들은 어떤 도형의 넓이가 유한이면 그 도형의 둘레는 유한이라고 생각하기 쉽다. 따라서 많은 학생들은 문제 2와 같은 도형은 없다고 생각한다. 이럴 때 그림 2에서 그림 6까지의 도형의 길이를 대수적으로 재 보게 한다. 즉, 모두를 잴 필요는 없이 꺽여진 선분의 길이는 모두 같음을 이해시키고 꺽인 선분의 개수를 센 다음 선분의 길이에 개수를 곱하면 각 단계마다 쉽게 도형의 전체 길이를 잴 수 있다.

그림 2부터 그림 6까지의 과정을 무한히 반복하였을 때 생기는 도형의 일부를 다시 확대하여도 원래의 모습과 같음을 이해시키고 자연스럽게 프랙탈의 개념을 설명할 수 있다.

3. 컴퓨터 프로그램의 이용

프랙탈 생성 프로그램을 사용하여 프랙탈의 개념을 깨닫게 하고 길이의 변화를 생각하게 한다. 컴퓨터의 프로그램 파일에 등록된 Kocurve를 사용하여 Koch의 곡선과 눈송이를 만들어 본다. Kocurve를 클릭하면 그림 7과 같은 화면이 나타난다. 빈칸에 0을

넣고 [redacted]를 클릭하면 삼각형이 나타나고 계속 [redacted]를 클릭하면 그 다음 단계로 변해 가면서 눈송이 같은 형태로 나타난다[그림 8, 9, 10]. [redacted]를 클릭하면 다시 전 단계의 모습이 나타난다.

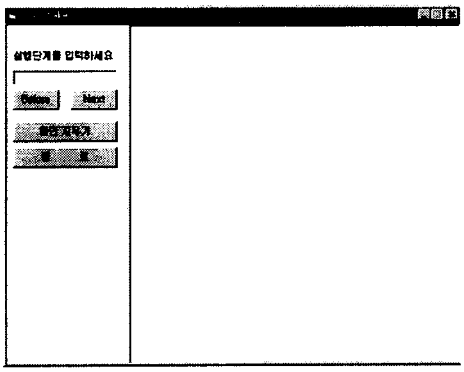

그림 7 Kocurve의 첫 화면

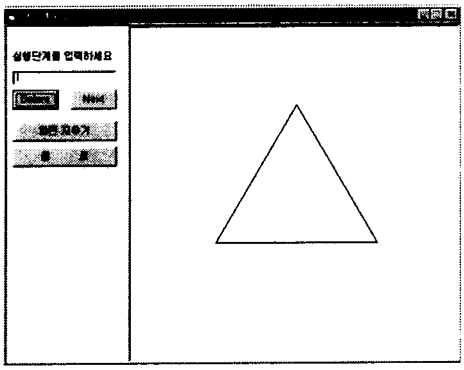

그림 8 눈송이 1단계

이 프로그램을 실행하면서 학생들에게 눈송이의 면적은 단계가 증가할수록 조금씩 증가하지만 이 눈송이를 둘러싸고 있는 화면의 넓이인 사각형의 면적보다는 항상 적으므로 유한값을 갖는다는 것을 이해시킨다. 그러나 계속 반복할 수록 눈송이의 둘레는 자꾸 커져가고 있는데 이 둘레의 길이가 유한값을 가질지 무한값을 가질지를 생각하게 한다.

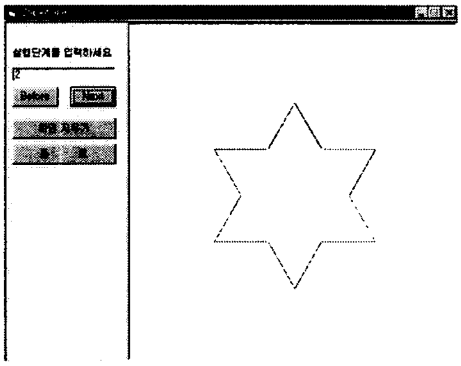

그림 9 눈송이 2단계

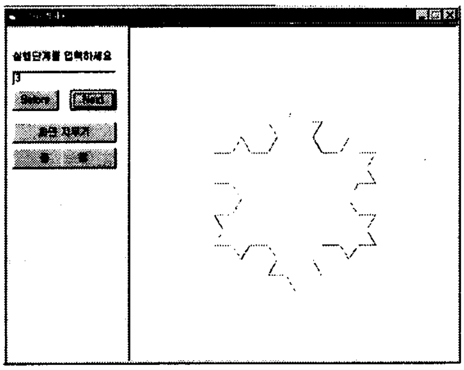

그림 10 눈송이 2단계

프랙탈과 관계된 또 다른 프로그램인 tree와 Sierpinski 삼각형를 이용하여 나무가 생성되어지는 과정과 구멍이 펑펑 뚫린 삼각형을 살펴보는 것도 흥미를 유발시키는데 큰 도움이 된다. tree는 주어진 수직선의 끝점에서 일정한 각도로 꺽여진 가지가 두 개 생성되는 과정을 반복하는 프로그램이고 Sierpinski 삼각형은 주어진 삼각형에서 각 변의 중점을 연결할 때 생기는 작은 삼각형 중 가운데 삼각형을 버리고 나머지 작은 세 개의 삼각형에서 다시 같은 방법을 되풀이하는 프로그램이다. tree를 클릭하면 그림 11과 같은 화면이 나타난다. 조건에서 사잇각을 30, 트리길이를 1500,

실행단계를 10, 감소량을 80으로 하고 나머지는 그대로 둔 후 화면을 클릭하면 그림 12와 같은 나무가 생성된다. 단계를 하나씩 증가하면서 나무가 자라는 과정을 살펴볼 수 있다.

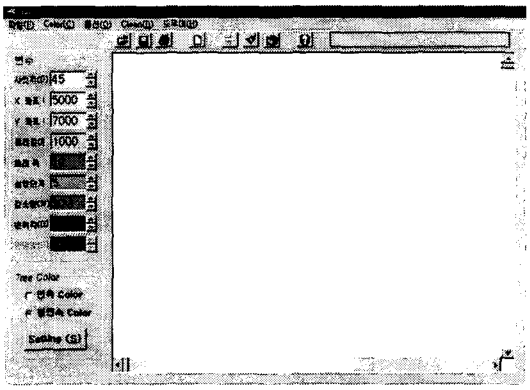

그림 11 tree의 첫 화면

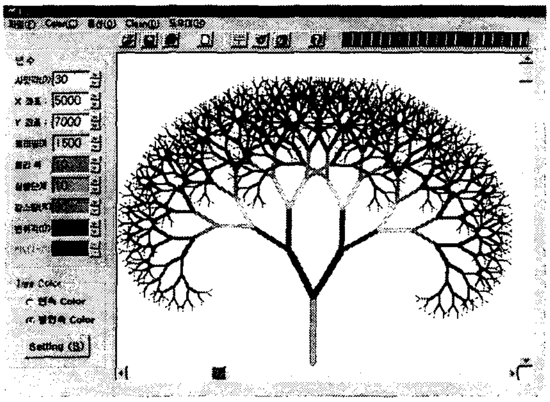

그림 12 10 단계 나무

프로그램에서 등록된 삼각형2를 클릭하면 그림 13과 같은 화면이 나타난다. [redacted]를 클릭하고 [redacted]을 계속 클릭하면 그림 14, 15, 16과 같이 Sierpinski 삼각형이 만들어진다.

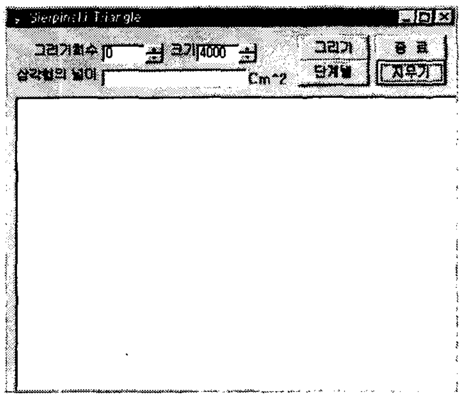

그림 13 삼각형2의 첫 화면

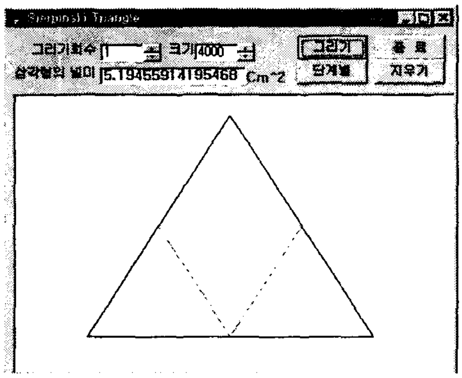

그림 14 1단계 Sierpinski 삼각형

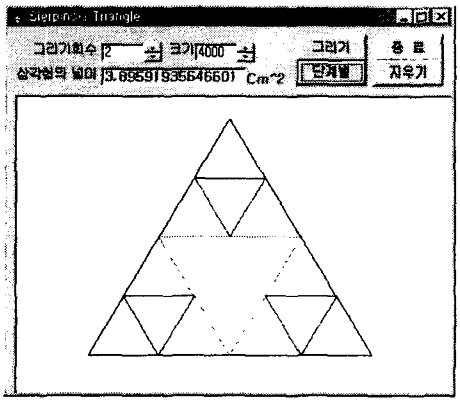

그림 15 2단계 Sierpinski 삼각형

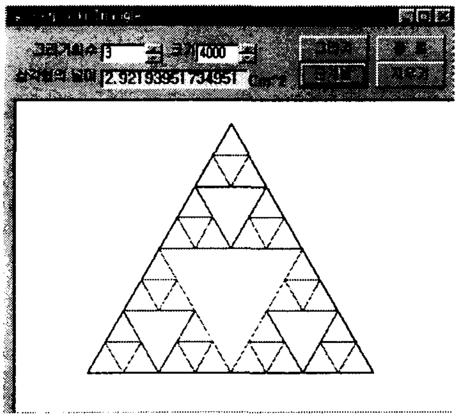

그림 16 3단계 Sierpinski 삼각형

III. 이론을 통한 방법

체험을 통하여 학생들은 Koch곡선과 같은 도형의 길이는 반복할수록 그 길이가 커짐을 알고 있으나 얼마나 커질지는 확신을 가지고 있지 않다. 이 절에서는 그 길이가 얼마나 커지는 지를 이론으로 설명하여 왜 수학이 필요한지를 학생에게 알려준다. Koch 곡선의 기본 단계인 그림 2의 한 변의 길이를 1이라고 하면 첫 번 단계는 선분의 가운데 $\frac{1}{3}$을 삼각형 모양으로 올린 도형으로[그림 3] 전체의 길이는 $\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3}$이고 똑같은 방법으로 두 번째 단계인 그림 4는 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 4\times 4=\left(\frac{4}{3}\right)^2$, 세 번째 단계인 그림 5는 $\left(\frac{4}{3}\right)^3$, 네 번째 단계인 그림 6의 전체 길이는 $\left(\frac{4}{3}\right)^4$임을 이해시킨 후 반복하면 n 번째 단계의 도형의 전체길이는 $\left(\frac{4}{3}\right)^n$이 되어 점점 길이는 커지는 것을 이해시킨다. n 번째 단계의 Koch 곡선의 전체길이는 $\left(\frac{4}{3}\right)^n$이므로 이것을 반복하면 $\frac{4}{3}$는 1보다 큰 수이므로 n이 클수록 점점 커져 그 도형의 길이는 무한이 됨을 이해시킨다. 따라서 Koch 곡선을 한 변으로 하는 삼각형인 Koch의 눈송이는 그 둘레는 무한이지만 면적은 유한한 값을 갖음을 보인다. Sierpinski 삼각형은 처음 삼각형의 면적을 1이라 하면 처음 단계에 남은 삼각형의 면적은 $\frac{3}{4}$이고 두 번째 단계에 남은 삼각형은 $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, 세 번째 단계에 남은 삼각형은 $\left(\frac{3}{4}\right)^3$으로 n 번째 단계에 남은 삼각형은 $\left(\frac{3}{4}\right)^n$이 되어 반복할수록 그 면적이 줄어들어 무한히 반복하면 그 넓이는 0이 된다.

IV. 결 론

수학 교육을 교실에서 칠판과 함께 하는 고전적인 방법의 큰 단점은 평범한 학생으로 하여금 수학을 공부할 수 있는 동기를 유발시키기 힘든 것이다. 체험(실습 또는 실험)을 통한 느낌의 수학 교육을 병행하는 것이 자라나는 현대의 어린 세대에는 더욱 적당할 수 있다. 실습과정을 통하여 학생들은 새로운 사실을 발견할 수 있고, 이를 설명할 동기가 유발될 수 있다.

이 과정을 통하여 문제 1에서 거북이와 개미는 자의 척도로 볼 수 있다. 즉, 개미는 작은 눈금까지 잴 수 있는 자이고 거북이는 그보다는 더 큰 눈금만 잴 수 있는 자이다. 따라서 꼬불꼬불한 길이를 모두 걸어가는 개미는 성큼성큼 걷는 거북이를 이기지 못한다. 문제 2에서는 반복을 통하면 주어진 공간에서 무한히 긴 거리를 만들 수 있다는 사실을 깨닫게 된다. 즉, Koch의 눈송이는 그

둘레는 무한이나 둘러싸인 면적은 유한한 넓이를 갖는다는 것을 알게된다. 응용문제 1에서 Koch 곡선같이 무한히 긴 곡선을 주고 그것을 재는 자는 눈금이 큰 자이면 된다. 응용문제 2에서 남해안의 해안선의 길이를 정확하게 잰다면 그 길이는 무한히 될 것이다. 그러나 이 무한한 거리를 우리는 차로 달리면 몇시간이 간다. 그것은 차라는 척도가 해안선의 길이를 잰 것과 같은 정확한 자가 아니기 때문에 가능한 것이다.

이 수학교실은 수학이 왜 필요한 지를 깨닫게 하는 것이다. 강의 평가 결과는 모두 만족하였다. 그 중 일부를 그대로 적어본다.

학생1 - 이제까지의 생각은 수학은 어려운 문제를 풀고 생활에 도움이 되지 않는데 왜 배우나 하는 생각을 같기도 했었다. 그러나 여기서 10시간 동안 배우고 난 지금 수학은 무조건 지루하게 어려운 문제나 푸는 것이 아니라는 것을 알았다. 그리고 경제적이고 아름답다(?)는 것을 느꼈다.

학생2 - 수학은 무조건 푸는 것만이 전부가 아니고 머리 속으로 논리적으로 생각하고 실생활에도 중요한 것을 깨닫게 되었다. 앞으로는 수학을 제대로 알고 해야겠다고 생각하게 되었다.

학생3 - 수학이라는 것이 그저 계산만 하는 따분한 과목이라고만 생각했다. 하지만 여기에 와서 그런 생각은 이미 제 머리를 떠났고 흥미롭고 재미있는 수학이란 생각이 제 머리 깊숙이 박혔습니다.

학생4 - 우리가 흔히 생각해보지 못한 문제들을 많이 접할 수 있어서 생각의 폭이 넓어진 것 같다. 수학이라는 과목에 대한 나의 생각을 바꿀 수 있었던 것이 매우 좋았다.

학생5 - 실습을 행한 뒤 이론적인 내용을 학습하니 이해가 정말 잘됐다. 따분히 푸는 수학에서 벗어나 그것을 응용할 줄 아는 사람이 되어야겠다고 생각했다.

학생6 - 솔직히 첫 시간에 꽤 놀랐습니다. 학교에서 가르치는 수학이 아닌 완전히 다른 수학이었기 때문입니다. 지겨워하기만 했던 수학에도 약간이지만 흥미를 갖게되었습니다.

학생7 - 나한테는 여기의 목적이 잘 이루어진 것 같지는 않다. 하지만 어쩔 수 없는 것이다. 지금까지 배운 수학이 다 그저 그래서 그 느낌을 깨기에 10시간은 모자랐나보다. 그래도 들을만한 가치는 있는 것 같다.

학생8 - 어렵고 계산하기 싫어서 조금 싫어했던 수학이 여러 가지 방법을 통해 알아보고 다시 수학적으로 계산 증명하는 과정에서 수학의 참 재미를 느끼게 되었다.

학생9 - 수학의 목적을 알고 싶어서 수학수강 신청을 했을 뿐인데 많이 얻어가서 기분이 좋다.

학생10 - 수학의 다른 면을 볼 수 있어서 좋았다. 고등학교를 가면 이런 식으로 수학을 재미있고 천천히 배울 기회는 없어질 것이다. 하지만 난 수학은 싫다.

학생11 - 10시간 동안 응용수학에 대해 배우면서 "아하 수학에는 이런 것도 있구나!"라는 것을 알게 되었다. 그리고 수학에 대한 시야도 한 차원 넓어진 것 같다.

이 수학교실에서 다룬 프로그램은 모두 수치해석프로그램개발실에서 만든 것이며 강좌에 관련된 ppt 화면과 프로그램은 아래 주소의 '논문 및 연구자료'에서 찾아볼 수 있다.

http://came.paichai.ac.kr

참 고 문 헌

김영익(1993), 혼돈과 후랙털 집합, 경문사

김영익 · 이규봉(1999), 아름다운 수학 Mathematica와 함께, 교우사

이규봉(1999), 체험을 통한 수학교육-금괴 찾기, 대한수학교육학회 학교수학, 1(2), 547-554

An example of experimental Mathematics Education 2 - Fractal and Infinity

Gyou-Bong Lee[1)]

ABSTRACT

This paper gives an example of experimental mathematics education which leads students to understand logically the problem of Fractal and Infinity.

1) Paichai University