Historia Mathematica Vol. 14, No. 1, 2001, 47-60

수학과 실재*

덕성여자대학교 **정계섭**

Abstract

The present study develops the given theme "Mathematics and Reality" along two lines. First, we explore the answers, in its various facets, to the following question: How is it possible that mathematics shows such wondrous efficiency when explaining nature? In addition to a comparative analysis between empiricism and rationalism, constructivism as a function of idealism is compared with realism within the frame provided by rationalism. The second step involves limiting our discussion to realism. We attempt to explain the various stages of mathematical realism and their points of difficulty.

Postulate of parallels, Gödel's theorem, continuum hypothesis and choice axiom are typical examples used in demonstrating undecidable propositions. They clearly show that it is necessary to mitigate the mathematical realism which depends on bivalent logic based on an objective exterior world. Lowënheim-Skolem theorem, which states that reality is composed not of one block but rather of diverse domains, also reinforces this line of thought.

As we can see the existence of undecidable propositions requires limiting the use of *reductio ad absurdum* proof which depends on the concept of excluded middle. Consequently, it becomes obvious that bivalent logic must inevitably cede to a trivalent logic since there are three values involved: true, false, and undecidable.

0. 들어가는 말: 수학과 그 응용

도식적으로 말하자면 수학은 측정의 결과들을 연관시키는 물리학자의 도구이다. 이렇게 해서 물리학자는 현상들 사이에서 함수관계를 설정한다. 그래서 대부분의 물리법칙들은 $y=$

* 본 논문은 2001년도 덕성여자대학교 교내 연구비 지원으로 이루어졌음.

$f(x)$의 형태로 나타난다.

함수관계 중에서 가장 간단한 것이 선형함수로서, 이 함수는 두 물리량 사이의 정비례 관계를 나타내는데 예컨대 $s=vt$ 와 같은 함수이다.

두 변수 사이의 반비례 관계는 일차함수이지만 선형이 아니라 쌍곡선으로 나타나는 $xy=k$ 와 같은 식이다. 많은 법칙들이 이 형태를 취하는데 '마리오트의 법칙'이라 불리는, 동일한 온도 하에서 압력과 부피의 관계 $pv=k$ 가 바로 그러하다. 여기에 온도의 변화까지 포함한 식이 $pv=nRT$ 로 표현되는 '보일-샤를'의 법칙으로서 여기에서는 부피는 압력에 반비례하면서 온도에 비례하는 양상이 모두 포함되어있다.

독립변수의 제곱에 비례하는 경우도 빈번한데, 갈릴레이의 낙하법칙 $d=\frac{1}{2}gt^2$ 이라든가 운동에너지 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 등이 그 경우에 해당한다. 독립변수의 1차와 2차에 동시에 관계되는 경우도 있는데 $v=v_0+at$ 일 때 $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ 이 이 경우에 해당한다.

독립변수의 제곱에 반비례하는 $y=\frac{k}{x^2}$ 의 경우도 물리학에서 매우 중요한데, 대표적인 사례가 중력의 법칙 $F=G\cdot\frac{m_1m_2}{r^2}$ 가 되겠다.

독립변수의 제곱근에 비례하는($y=k\sqrt{x}$) 물리법칙도 있는가? 물론이다. 길이 l인 단진자의 주기를 T, 중력가속도를 g 라 할 때 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 로서 이 역시 갈릴레이의 발견이다.

이 밖에도 지수함수 $y=a^x$ 과 로그함수 $y=\log_a x$ 및 주기적인 현상을 연구하는데 필수적인 삼각함수로 표현되는 법칙들이 있으며 우리는 얼마든지 함수관계로 표현되는 물리법칙의 사례를 들 수 있다.

자연과학에서 수학의 역할은 측정 가능한 현상들을 연관짓는 일에만 그치는 것은 아니다. 우리는 함수관계로부터 아직 관찰되지 않은 사실을 찾아낼 수 있는데, 르 베리에(Le Verrier)의 해왕성의 발견이 이 경우에 해당한다.

더 나아가서 함수관계는 또 다른 법칙을 함축하는 수가 있다. 뉴턴의 중력법칙은 천체를 관측해서 얻어진 것이 아니라 케플러의 3대 법칙으로부터 순전히 연역적으로 얻어진 것이었다.

다른 한편 양자역학에서 물리학자는 직접 관측에 의존하는 것이 아니라 결과로부터 원자에 관한 속성을 추출해냈는데 중성미자나 양전자 발견의 역사가 이를 입증하고 있다. 중성미자는 에너지보존 법칙으로부터 가정한 이론적 존재자이며, 중간자는 순수하게 수학적 가

설로부터 출발하여 나중에 우주선에서 검출된 놀라운 사례이다.

우리의 논의는 크게 두 방향에서 진행될 것이다. 그 첫째는, 위에서 단편적으로 살펴본 것처럼 수학이 자연을 설명하는 데에 있어서 어떻게 그토록 경이적인 효율성을 보여주는가 하는 점이다. 여기에서 우리는 경험론과 합리론을 비교 검토하고, 이어서 합리론의 틀 내에서 실재론과 관념론을 대비시킬 것이다.[1] 주지하는 바와 같이 전자는 인식론적 구분이고 후자는 존재론적 구분이다. 여기에서 실재론은 플라톤적인 의미에서 수학적 실재론을 가리키고, 관념론은 수학자의 사고 이전에는 수학적 지식이 존재하지 않는다는 구성주의가 되겠다.

두 번째의 방향은 우리의 논의를 실재론에 한정시켜 수학적 실재론의 단계들과 그러한 관점이 부딪치게 되는 문제점에 대하여 검토하고자 한다.

1. 수학의 효율성

1-1. 경험론의 입장

경험론에 의하면, 수학적 개념들은 모두 우리의 지각, 감각, 경험으로부터 유래한다. 관념들이 내 안에 각인되는 것은 내가 사물을 보고, 듣고, 만지기 때문이다. 푸앵카레가 말하듯이 완전히 부동인 어떤 존재에게는 공간이나 기하학적 개념이 있을 수 없을 것이다. 사정이 이러하다면 개념들이 자연(세계)을 파악하는 것은 놀라운 일이 아닌 것이 세계가 바로 그러한 개념들을 불러일으켰기 때문이다.

까바이에스(Cavaillès)는 **공리적 방법과 형식주의**(pp. 178-179)에서, 모든 추상적인 대상은 원래는 감각적인 것이었는데 거기에 가공을 거듭하고 또 거듭해서 얻어진 결과라고 지적하고 있다.

쟉크 모노(J. Monod)는 **우연과 필연**(p. 172)에서 구체적이고 개별적인 차원에서의 경험은 인정하지 않지만 인류차원에서의 가혹하고도 헤아릴 수 없이 많은 경험은 인정한다.

실상 수학은 원래 과학과 기술의 '시녀'였음을 환기해 보자. 즉 사람들은 수학자에게 실용적인 문제의 해결을 요청했던 것이다. (측량, 일(월)식, …)

수학적 개념들이 감각적 직관의 중개에 의해 경험으로부터 도출된다면 수학이 세계를 설명하는 일에는 하등 신비할 것이 없으니, 정신은 다만 자신이 받은 것을 돌려줄 따름이기 때문이다. 두뇌 자체도 결국 세계의 질서와 무관한 것으로 보이지 않는다. 두뇌는 우주적 진화의 산물로서 정신도 자연으로부터 나온 것으로 본다면 이런 경험론은 무해할 듯 싶다.

1) 관념론과 실재론을 합리론의 범주로 취급하는 데에는 토론의 여지가 있음을 인정하면서, 우리의 논의를 위해 그렇게 틀을 설정했음을 밝힌다.

경험론의 난점은 무한(∞)이나 $i(=\sqrt{-1})$가 웅변적으로 보여주듯이 모든 수학적 개념이 경험으로부터 도출되지는 않는다는 사실이다. 이런 수학적 개념들은 정신의 창조물로서 경험이 이런 개념들을 암시하지는 않는다.

설령 경험으로부터 수학적 직관이 나올 수 있다 하더라도 이런 직관은 언제나 수학자들을 골탕먹일 수 있는 것이다. 유클리드가 수학적 직관에 의해 자명한 진리로 보았던 평행선의 공리는 오늘날 그렇게 자명한 진리는 아닐 수도 있다는 사실이 판명되었고, 다른 공리를 채택함으로써 얼마든지 다른 체계를 구축할 수 있다는 점도 밝혀졌다.

우리가 생각하는 또 하나의 경험론의 난점은 상징성의 원리와 관계가 있다. 이 원리에 의하면, 정신은 상징을 통해서 세계를 파악한다는 것이다. 헬렌 켈러의 경우를 고려할 때, 인간은 자신의 세계를 구성하는데 있어서 단순히 감각자료(sense data)에만 의존하지는 않는다는 사실이 명백해 보인다. 우리의 관념들이 (수학적 개념은 그 부분집합) 전적으로 감각으로부터 유래한다면 그리고 관념이 최초의 감각 인상의 희미한 흔적 이외의 다른 아무 것도 아니라면, 눈멀고, 귀먹고, 벙어리인 이른바 삼중고에 시달리는 아이의 경우는 그야말로 절망적일 것이다. 그 아이는 원천적으로 인간 지식에 도달할 수 있는 길이 봉쇄되어 있기 때문이다. 그런데 헬렌 켈러의 경우, 이것이 옳지 않다는 사실을 알게 해준다. 지식은 경험이나 질료에 의존하기보다는 형식이나 구조에 의존하는데 이런 형식은 어떤 감각적 재료에 의해서도 표현될 수 없는 것이다.

1-2. 합리론의 입장

합리주의는 인간의 인지능력에서 수학의 기원을 보는 입장이다.

정신의 산물인 수학이 어떻게 정신과는 무관한 세계를 설명할 수 있을까? 여기에 두 가지 합리주의적 입장이 있는데 수학적 실재론(플라톤주의)과 구성주의가 바로 그것이다.

플라톤주의자들은 인간(여기에서는 수학자)과 독립적으로 또는 무관하게 존재하는 수학적 '이데아'의 세계를 설정한다. 이렇게 되면, 수학적 대상들은 별이나, 동물이나 식물 등과 똑같은 아니 보다 더 실재성을 지니게 된다. 왜냐 하면 현실적인 사물들은 이데아의 모방에 불과하기 때문이다. 그래서 수학에서 아무리 추상적인 개념들이라 할지라도 대번에 의문의 여지없이 존재론적인 실재성을 지니게 된다. 플라톤적 관념주의는 이념에 관해서 실재론으로서 '개념 실재론'이라고도 불린다.

여기에서 중요한 것은 실재성의 개념은 진리 개념과 직결되는 개념으로서, 수학의 모든 문제는 긍정적이거나 부정적인 답변을 가지고 있어야 한다는 사실이다. 플라톤주의의 주춧돌은 고전논리가 계승한 2가 논리이며 그것의 파생 명제로서 배중률인데, 나중에 우리는 배중률이 부딪치게 되는 어려움을 보게 될 것이다.

아무튼 간에 수학적 실재론의 원조인 플라톤에 의하면, 수학적 개념들은 우리가 모르는 사이에 우리의 기억에 각인되어 있다. 우리는 전생에 그 개념들을 보았기 때문에 그것들을 회상할 수 있는데, 이것이 그 유명한 '상기론'이다.

데카르트 역시 이러한 관점을 유감 없이 표명하고 있다.

> 내가 수학을 발견하기 시작할 때, 나에게는 무언가 새로운 것을 배우는 것처럼 보이지 않고 오히려 내가 전에 알고 있던 것을 다시 기억하는 것처럼 보인다. 즉 무언가 이미 나의 정신 속에 있는 것을 알아차리는 것 같다.[2)]

이처럼 조물주는 자연과 인간의 정신을 동시에 창조한 것이다. 신은 진실하기 때문에 인간의 정신에 관념들을 각인함으로써 인간이 세계를 이해할 수 있는 수단을 준 것이다. 따라서 수학이 실재를 파악할 수 있는 이유는 정신의 구조와 세계의 구조가 동일한 창조자를 갖기 때문이다. 뉴턴도 "수학은 신의 언어이다."라고 했거니와 이러한 관점은 그 후 탈종교화의 경향에서도 살아남은 것 같다.

결국 수학적 실재론은 형이상학에서 해답을 찾는다는 비판을 면치 못할 것 같다. 그러나 우리가 일단 신의 존재를 인정하고 나면, 신 안에는 물질세계와 정신세계가 하나라는 사실을 인정하기가 보다 수월해지지 않을까? 만물이 비롯되는 근원에서는 아마도 정신과 물질을 분리하는 벽이 허물어지지 말라는 법도 없을 것으로 여겨진다. 사정이 그러하다면 수학의 효율성을 납득하는데 큰 어려움은 없을 것이다. 대부분의 수학자들은 우리가 보기에 수학적 실재론의 입장을 취하는 것 같다.

합리론의 두 번째 조류는 구성주의인데, 네델란드의 수학자 브로우베르(Brouwer, 1881-1966)는 수학적 사유란 경험과는 무관하게 합리적인 수학적 직관에 의하여 수학의 고유한 세계를 구축하는 구성의 과정이라고 생각한다. 따라서 수학은 전적으로 인간 정신의 주관적 산물이다. 예컨대, n에서 $n+1$로의 이행을 무한정 반복할 수 있다는 가능성이 무한집합을 구성하게 해준다. 그러나 이런 무한은 아리스토텔레스의 가능적 무한일 따름이다.[3)] 주지하는 바처럼, 이 견해도 만만치 않은 것이 데데킨트나 바이어슈트라스와 같은 제1급의 수학자들이 수학을 인간의 창조물이라고 생각했다. 19세기 독일의 수학자 레오폴드 크로네커는 신이 정수를 만들고 나머지 모든 것은 인간의 작품이라고 말함으로써 구성주의의 입장을 잘 드러냈다. 이러한 관점에서 볼 때 수학자는 발견하는 것이 아니라 수학을 발명하는 사람이다. 바이어슈트라스는 특히 "진정한 수학자는 시인이다."라고 말하였다고 한다.[4)]

---

2) 형이상학적 성찰, 인터넷자료(http://un2sg4.unige.ch/athena/descartes/desc_med.htm/, p. 37/54)
3) 무한에 대한 집합론적 접근은 1:1 대응의 비교에 의존하는데 이 비교는 실무한으로 이끈다.
4) 한 때 수학자였던 사람이 소설가가 되었다고 해서 괴팅겐대학의 사람들이 놀라워마지 않았다. 이 소식을 들은 힐베르트는 이렇게 말했다고 한다. "그건 아주 간단해. 그는 수학에 대해서는 충분한 상상력을 지니지 않았지만 소설을 쓰기에는 충분한 상상력을 지닌 인물이겠지."

플라톤주의가 수학자의 정신과 수학적 대상을 완전히 별개의 것으로 보는데 반해서 구성주의는 수학적 대상과 수학자의 정신을 최대한 접근시킨다. 플라톤주의에 의하면 수(數)는 존재하기 위해 생성될 필요가 없지만, 구성주의에 의하면 그 누군가 세는 활동을 하기 전에는 어떤 수도 존재하지 않는다. 구성주의의 견해에 따르면, 수학자 없는 수학은 없다. 수학적 대상들은 이성적 존재자로서 인간과는 무관한 플라톤적 세계에 있는 것이 아니라 수학자의 사고 속에서만 존재할 뿐이다. 그런데 두뇌는 세계의 질서와 무관한 것이 아니다. 두뇌와 자연은 일종의 구조적 공통성을 지니고 있다고 본다면, 구성주의도 수학의 효율성을 무난하게 설명한다고 볼 수 있지 않을까.

수학적 지식의 성격에 대하여 힐베르트에 의해 대표되는 형식주의와 프레게/러셀에 의해 대표되는 논리주의가 있으나 이들은 수학의 효율성을 설명하는데 별로 도움이 안 되는 것으로 판단하여 우리의 논의에서는 생략하기로 한다.

구성주의는 그 자체로 하나의 연구 프로그램이 될 것이므로 다른 기회에 취급하기로 하고, 이제부터는 수학적 실재론에 한정하여 그 단계들과 문제점들에 대해 고찰하기로 하겠다.

2. 수학적 실재론의 제단계

수학적 실재론은 수라든가 보편자(universals)의 실재성을 인정하는 입장이다. 이런 대상들은 수학자의 정신활동과는 무관하게 초시공간적으로 존재하는 대상들이다. 그러나 여기에도 단계가 있다. 우리가 '유한실재론'이라고 부르는 이 입장은 다음과 같은 유한한 대상들의 실재성을 인정한다.

$$(a,\ b,\ c),\quad \{a,\ b,\ c\},\quad 10^{15},\quad \frac{11}{35},\ \cdots$$

유한 실재론은 무한한 대상에 실재론을 확장시키는 것을 당연히 위험하고 불확실한 것으로 간주한다. 그런데 이러한 견해는 기하학이나 산술의 기초적 단계에 제한되어 있기 때문에 수학의 지평을 자의적으로 제한한다는 온당한 비판을 면할 수 없다.

그래서 실재론의 두 번째 단계는 정수 집합의 실재성을 인정하는 진일보한 실재론이다. 그러나 유한 실재론에서 가부번 무한집합으로의 이행은 전혀 문제없는 것이 아닌데, 그것은 정수와 관련되는 어떤 문제에 대해서 그 해결 방법이 꼭 알려진 것은 아니라는 점이다. 비근한 예로, 우리가 $a \times b = c$ 가 참인지 거짓인지 검증할 수 있는 유한한 절차가 있다. 이와 대조적인 이른바 '쌍둥이 소수'(twin prime conjecture)에 대해서 살펴보자.

$$(3,\ 5),\ (5,\ 7),\ (11,\ 13),\ (17,\ 19),\ (29,\ 31),\ (41,\ 43),\ \cdots$$

일반적으로 정수 체계에는 무한수의 쌍둥이 소수의 쌍이 있다고 믿어져 왔다. 하지만 이 문제는 아직까지도 풀리지 않은 채로 있다. 여기에서 우리는 두 가지 가능성을 상정할 수 있다. 즉 마지막 쌍둥이 소수의 쌍이 발견되고 그 후에는 나타나지 않거나 또는 그 후에도 계속해서 나타나는 경우이다. 이렇게 생각하는 사람이 바로 수학적 실재론자이다. 그러나 제3의 가능성이 있는데 그것은 쌍둥이 소수의 쌍 가정은 참도 거짓도 아니라는 것이다![5]

또 하나의 예로서 π의 소수 전개에서 n번째, $(n+1)$번째, …, $(n+8)$번째, $(n+9)$번째 자리의 수들이 0123456789인 경우가 존재하는가? 이 질문에 대해 우리는 긍정적으로도 부정적으로도 답변할 수가 없다.

유한집합에서는 모든 원소에 대하여 그것이 P라는 속성을 지니고 있는지 없는지 검증할 수 있지만 무한 집합의 경우 그것은 불가능하다. 중요한 것은 여기에서 우리는 배중률에 의존할 수가 없다는 것이다.

실재론의 세 번째 단계는, 오늘날 대부분의 수학자들이 그러하듯이, 실수 집합의 실재성을 인정하는 단계이다. 주지하는 바와 같이, 칸토르는 무한은 정수의 집합에만 국한되지 않는다는 사실을 알아차렸다. 그는 직선상에 있는 점들의 집합이나 공간상의 점들의 집합이 정수의 집합보다 더 크다는 사실을 증명하였다. 이러한 비가부번 집합을 수학자들이 가능한 무한으로 보지 않고 실무한으로 고려한 것은 19세기에 이르러서였는데, 이는 쿠자누스가 형이상학적으로 실무한을 인정한 이래 근 400년 후의 일인 것이다.

논의를 끝내기 전에 잠시 우리가 평소에 관심을 두고 있는 $\sqrt{-1}$에 대해서 알아보기로 하자. 수학적 실재론의 관점에서 $\sqrt{-1}$은 어떤 물질적 현실보다 존재론적으로 덜 현실적이지 않다.

$i(=\sqrt{-1})$는 모든 n차 다항방정식이 꼭 n개의 근을 가진다는 대수학의 기본정리를 확인시켜준다. 즉 $n^4=1$의 근은 ± 1, $\pm i$ 네 개가 있다.

그뿐만 아니라 수학의 어떤 분야에서 우리가 보다 멀리 가기를 원한다면 우리는 그때마다 복소수에 의존해야 한다. 삼각함수와 지수함수 사이에 어떤 관계가 있을 것이라고 그 누가 상상할 수 있었겠는가?

---

5) 경상대의 박상호 교수님께서는 이에 대해 다음과 같은 논평을 보내주었다.

> "이는 분명히 참과 거짓 둘 중의 하나인데 우리가 모르고 있으며, 특히 참이라면 증명을 해야 하고, 거짓이라면 최대 쌍둥이 소수를 찾아야하는데 그것을 못하고 있을 뿐이다."

토론 시에도 인정을 했지만 우리는 이 지적에 대해 공감한다. 다만 이 가정은 앞으로 보게 될 결정 불가능 명제에 대한 워밍업으로서, 그리고 무한에 직면했을 때 부딪치게 되는 어려움의 사례로써 제공된 것뿐이다. 이는 π의 소수점 이하 전개의 문제에서도 마찬가지이다.

$$\cos 2 = \frac{e^{2i} + e^{-2i}}{2}$$

이 식은 $2\times\cos 2 = e^{2i} + e^{2i}$ 로 고치고 양면을 제곱해 보면 삼각함수에서 잘 알려진 관계를 얻게 되는데 거기에는 i가 없다!

$$(\cos 2)^2 = \frac{1+\cos 4}{2}$$

그러니까 i는 연산을 수행하는 동안에만 나타나고 결과에서는 사라진다.

여기에서 만일 $\sqrt{-1}$이 경험으로부터 도출되지 않는다고 그 실재성을 처음부터 의심하고 부정하게 되면 그에 관련된 모든 흥미로운 사실을 놓치게 되고 만다. 어떻게 보면 i의 경우는 결과의 다산성으로부터 그 존재가 확립된 것으로 볼 수도 있을 것 같다.

3. 수학적 실재론의 현안들

3-1. 비유클리드 기하학과 괴델의 정리

19세기 말에서 20세기 초에 걸쳐 두 가지의 인식론적 혁명이 우리의 사고 체계를 근본적으로 뒤흔들어 놓았다.

그 첫 번째는 볼리아이(John Bolyai, 1802-1860), 로바체프스키(N.I. Lobachevski, 1793-1856), 가우스(K.F. Gauss, 1777-1855), 리만(B. Riemann, 1826-1866)에 의해 구성된 비유클리드 기하학이다. 앞의 세 사람에 의해 이루어진 것이 쌍곡 기하학이고 여기에서 평행선은 무한히 많이 존재한다. 리만에 의해 이루어진 것이 타원 기하학으로서 여기에서 평행선은 존재하지 않는다. 우리의 논의를 위해 잠시 이 기하학들을 대조해 보도록 하자.

유형	평행선의 수	삼각형의 내각의 합	원주율	곡률
쌍곡 기하학	무한	$< 180^\circ$	$> \pi$	< 0
유클리드	1	180°	π	0
리만	0	$> 180^\circ$	$< \pi$	> 0

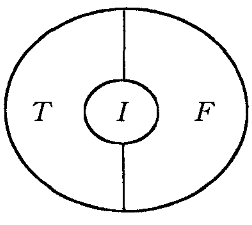
그런데 표에서 보는 바와 같이 이 세 종류의 기하학은 현저하게 서로 다르다. 쌍곡 기하학이나 리만 기하학은 유클리드 기하학과 마찬가지로 정합적이다. 즉 무모순이다. 그래서 이제까지 절대적으로 여겨졌던 유클리드 기하학이 상대적일 뿐이라는 사실을 인정하지 않을 수 없게 되었다. 이것이 의미하는 바는 가히 혁명적인데, 이제 수학이 인간과는 독립적으로 고유하게 존재하는 객관적 세계에 대한 절대적 진리라는 믿음이 더 이상 견지될 수 없게 되었다는 사실이다. 수학적 실재론은 말하자면 치명타를 맞은 것이다.

유클리드 기하학이 뉴턴의 세계에 대응할 때, 비유클리드 기하학은 아인슈타인의 세계에 대응한다고 말할 수 있다. 순수하게 수학자의 사유활동에서 나온 것이 실재 세계에 적용되는 또 하나의 사례가 바로 비유클리드 기하학이다. 여기에서 중요한 사실은 이제 어떤 기하학도 진리에 대해서 독점적인 주장을 할 수 없게 되었다는 사실이다. 어느 기하학을 선택할 것인가는 실용성과 필요성이 결정해야 할 문제가 되었다. 이런 상황은 대수 쪽에서도 발생했는데, 교환법칙을 만족시키지 않는 해밀턴의 사원수는 한가지 유일한 대수만이 있는 것이 아니라 여러 종류의 대수가 있다는 사실을 분명히 보여주었다. 주지하는 바처럼 대수(algebra)는 주어진 집합의 원소들 사이의 관계를 연구하는 분야이다.

평행선 공리가 없는 유클리드 기하학을 '절대 기하학'이라고 하는데 이 기하학은 불완전하다. 즉 여기에서 우리는 평행선이 공리나 그 공리의 부정을 연역할 수 없다. 절대 기하학에서 평행선 공리는 결정 불가능 명제[6]로서 배중률이 적용될 수 없는 사례이다.

두 번째의 충격은 괴델의 정리로부터 온 것이다. 1931년에 발표된 괴델의 불완전성 정리에 의하면, 산수를 할 수 있는 모든 형식이론, 즉 정수에 대한 기초이론은 모순이거나 불완전하다. 달리 말해서 정수의 이론을 포함할 정도로 강력한 어떤 형식이론 S가 무모순이며 S는 결정 불가능한 명제 I를 지니고 있다.

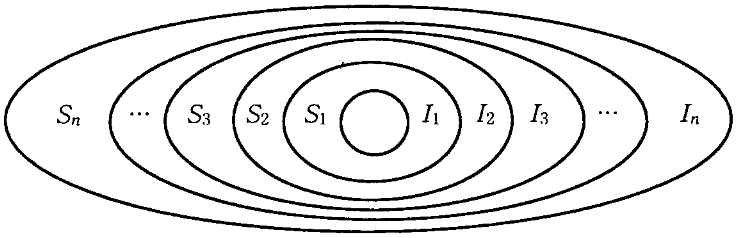
아래 그림에서 T는 참인 명제, F는 거짓인 명제 그리고 I는 결정 불가능 명제를 가리킨다.



어떤 형식이론 S_1에서 출발하여 우리는 그러한 결정 불가능 명제를 I_1을 상정할 수 있다. 이제 I_1을 새로운 공리로서 S_1에 추가함으로써 어떻게 될까. 결과는 새로운 체계 S_2인데

6) 결정불가능 명제란 어떤 공리계에 새로운 공리로서 p를 추가하거나 ~p를 추가하거나 두 가지 경우 모두 정합적이 되는 명제를 말한다.

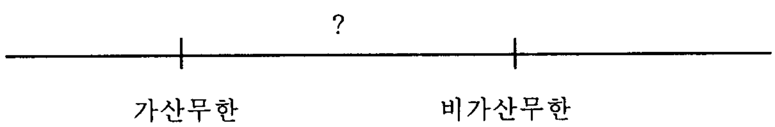
여기에서 I_1 은 더 이상 결정 불가능 명제가 아니다. 그러나 I_2 가 존재한다. 다시 I_2 를 새로운 공리로서 S_2 에 추가하여 우리는 S_3을 얻을 수 있고, 이런 식으로 반복해나가면 우리는 점점 더 강력한 체계 S_n 을 얻을 수 있지만 여기에서도 우리는 결정 불가능 명제 I_n 을 피할 수 없다.



이상에서 무모순성은 불완전성이라는 대가를 치르고야 얻어지는 것임을 알 수 있다. 괴델의 정리는 앞에서 본 '절대 기하학'에서 이미 알려진 불완전성을 일반화한 것으로 볼 수 있다.

3-2. 연속체가설과 선택공리

실수 집합은 정수 집합보다 크다. 자연수의 집합과 정수의 집합이 1 : 1 대응을 이루는데 반하여 실수 집합과 정수 집합 사이에는 그러한 대응이 없다. 그래서 사람들은 실수 집합과 정수 집합 사이에 다른 무한집합이 있는지를 자문하였다.



칸토르의 연속체가설은 자연수의 기수와 실수의 기수 c 사이에 다른 초한수가 없다는 가설이다. c보다 작은 기수를 가진 비가산집합은 없다는 것은 이 두 무한이 같다는 말에 다름 아니다($\aleph_1=2^{\aleph_0}$). 이를 연속체가설이라 한다.[7]

괴델과 코헨은 각각 연속체가설이나 그 부정도 공리적 집합론(Zermelo-Frankel 집합론)의 공리들로부터 도출되지 않음을 보여주었다. 괴델(1940)은 만일 공리적 집합론이 무모순이면, 집합론에 연속체가설을 덧붙여도 무모순이라는 사실을 밝혔으며, 코헨(1963)은 독자적으로 만일 공리적 집합론이 무모순이면, 집합론 체계에 연속체가설의 부정을 덧붙여도 무모순이라는 점을 증명했다.

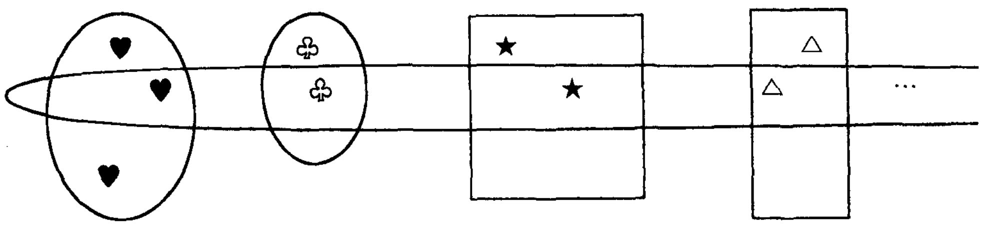
7) $\aleph_{i+1}=2^{\aleph_i}$을 일반화된 연속체가설이라고 한다.

괴델과 코헨이 의미하는 바는 요컨대 집합론에서는 연속체가설도 그 부정도 증명할 수 없다는 것이다. 연속체가설이 참인지 거짓인지 알 수 없다는 사실은 집합이라는 세계의 실재성에 커다란 의문표를 찍는 것에 다름 아니다. 이런 상황에 직면한 수학적 실재론자의 입장은 아래와 같다.

> 플라톤주의자는 이런 상황은 단순히 우리의 무지를 나타낸다고 믿고 있다. 연속체는 인간의 정신과 독립적으로 존재하는 명확한 대상이고, 그것은 정수의 집합과 동치가 아니고 실수의 집합과도 동치가 아닌 어떤 무한부분집합을 포함하거나 포함하지 않는다. 우리의 직관이 이 두 가지 경우 중 어느 것이 실제로 참인지를 알려줄 때까지 우리의 직관은 반드시 발달되어야만 한다[3, 274].

이런 경우가 바로 괴델인데, 그는 이 가설이 참이든지 거짓이든지 둘 중의 하나여야 한다고 생각하면서 직관적으로 연속체가설보다 더 자명한 새로운 공리를 발견해야 한다고 믿고 있다. 이렇게 집합론의 공리들에 새로운 공리를 추가하면 이 가설이 참인지 거짓인지 알 수 있다는 것이다. 그러나 이제까지 이 가설은 아무튼 미결정인 채로 남아 있다. 여기에서도 배중률은 설자리가 없는 것으로 보인다. 결정 불가능한 명제라는 점에서 선택공리는 연속체가설과 맥을 같이하고 있다.

선택공리에 의하여 우리는 공집합이 아닌 집합들이 주어졌을 때 각각의 집합에서 원소를 하나씩 뽑아서 새로운 집합을 만들 수 있다.



이 공리는 직관적으로 별로 문제될 것이 없다.[8] 그러나 이 공리와 동치인 정렬공리는 직관에 반하는 결과를 내포하고 있다. 정렬공리에 의하면 공집합이 아닌 모든 집합은 정렬될 수 있다. 따라서 최소원소의 존재를 인정하는 셈인데 그렇다면 우리는 어떻게 실수집합을 정렬할 수 있는가? 그래서 선택공리의 인정여부를 놓고 논란이 벌어지는 것이다.

문제는 더 심각해지는데, 그 이유는 만일 선택공리 없는 집합론이 무모순이라면, 선택공리가 있는 집합론이나 선택공리의 부정이 포함되어 있는 집합론도 마찬가지로 무모순이라는 사실이 괴델(1940)에 의해 밝혀졌기 때문이다. 한편 코헨(1963)도 선택공리가 공리적 집합론

8) 구성주의자는 선택공리에 대해서 회의적이다. 왜냐 하면 만일 각각의 집합에서 선택되는 원소를 충분히 명시하지 않는다면, 새로 만들어진 집합은 모호할 것이기 때문이다.

과 독립적임을 보여주었다. 실제의 집합들이 선택공리를 입증하거나 반증하는 '확률'이 동등하다는 것이다. 이것은 참이든가 거짓이든가 양자 중 택일해야 하는 실재론에 다시 한번 타격을 가하는 일이자 또 하나의 결정 불가능 명제가 출현했음을 의미한다. 그러나 수학이 선택공리를 필요로 하고, 나아가서 이 공리는 많은 증명들을 단순화시킬 수 있다는 점에서 여전히 수학자들의 지지를 받고 있다.

3-3. 뢰벤하임-스콜렘 정리

하나의 모델을 갖는 무모순인 공리계는 가부번 개로 된 모델을 갖는다는 것이 이 정리의 내용이다. 다시 말해서, 어떤 이론(문장들의 집합)이 있고 이론 속의 문장들을 동시에 참이게 하는 하나의 의도된 해석(모델)이 있을 때, 의도된 해석이 아니면서도 여전히 그 문장들을 참이게 하는 최소한 하나의 가부번 개의 모델이 존재한다는 것이다.

이 정리가 의미하는 바는 무엇인가? 만일 우리가 어떤 주어진 세계에 대해서 참인 모든 문장을 알고 있다고 하자. 그런 경우에 이 정리는 동일한 문장들을 참으로 하는 상이한 다른 세계들이 존재한다고 주장한다.

또 다른 비유를 들어보자. 만일 우리가 오로지 한국인의 특성만을 규정하는 그런 특징들의 일람표를 만들었다고 하자. 이런 경우에 그 일람표에 있는 특징들을 다 가지고 있으면서도 한국인과는 전혀 다른 동물을 찾을 수 있다는 것이다.

"Snow is white."라는 문장이 참일 때 'snow'에 'grass'라는 해석을 주고 'white'에 'green'이라는 해석을 준다면 "Grass is green."도 참이다.

이상의 사실은 공리들의 한 집합은 우리가 의도했던 바와는 본질적으로 다른 훨씬 더 많은 모델을 허용함을 말해 준다. 말하자면, 괴델의 첫 번째 불완전성 정리가 우리가 원하는 것보다 덜 증명한다고 볼 때, 뢰벤하임-스콜렘 정리는 우리가 원하는 것보다 더 증명한다고 볼 수 있겠다. 이렇게 진짜 대상 혹은 세계에 도달할 수 없다는 원리상의 불가능성은 실재론의 소박한 믿음을 흔드는 사례가 아닐 수 없다.

집합론의 관점에서 보자면, 가부번 개로 된 모델을 갖는다는 것은 비가부번 집합의 실재성에 의문을 던지는 것이고, 결과적으로 집합 세계 자체의 실재성에 의문을 갖게 한다. 우리는 실재론의 입장에서 집합 N 의 부분집합 $f(N)$, $f(N)$의 부분집합 $f(f(N))$, $f(f(N))$의 부분집합 $f(f(f(N)))$을 인정해오지 않았던가?

4. 결론에 대신하여

자연을 기술하는데 있어서 수학의 엄청난 효율성을 고찰하기 위해 우리는 경험론과 합리

론을 대조해 보았다. 설령 그 첫걸음은 사실(fact)로부터 출발했다하더라도 기초산술과 기하학을 제외하고 수학을 전반적으로 경험의 소산으로 보기에는 어려운 점이 적지 않다. 사실을 아무리 탐구해도 수학의 정리가 나오는 것은 아니다. 물론 자연의 규칙성에 대한 관찰로부터 자연법칙을 도출할 경우도 적지 않다. 그러나 우리는 순수하게 수학적인 지식이 물리적 세계를 이상화하고 추상화해서 얻어지는 것이라고는 생각하지 않는다.

물론 수학은 수학자의 사고, 정신활동에서 나왔다. 그러나 이러한 정신은 방금 언급한 경험과 무관하게 형성되는 것이 아니다. 수학을 인식주체와 인식대상 간의 상호작용에 의해 형성된 것으로 파악하는 칸트적 해석이 아마도 진실에 가장 가까운 입장이 아닌가 사료된다.9)

정작 중요한 차이는 합리론 내부에서 실재론과 구성주의의 대립이다. 실재론은 수학이 인간과는 무관한 객관적인 외부세계에 대응하는 절대적 진리라고 믿는다. 즉 선험적으로 확실하고 또한 필연적이라는 뜻에서 그러하다. 여기에서 실재성과 진리의 개념은 불가분리의 관계이다. 그러나 구성주의자들은 수학이 절대적 진리를 나타내는 것으로 보지 않는다. 그래서 실재론자의 '발견'은 구성주의자에게 있어서는 '발명'이 된다. 양자의 인식론적 차이는 다음과 같다.

절대 기하학에서 평행선의 공리, 연속체가설 그리고 선택공리는 괴델의 불완전성 정리의 특수한 사례들로 볼 수 있다. 이러한 결정 불가능 명제들의 존재는 객관적 외부세계를 설정하고 수학을 절대적 진리로 신봉하는 수학적 실재론에 위협이 아닐 수 없으며 이 점에서 실재가 유일무이한 블록이 아니라 다양한 영역으로 구성되어 있다는 뢰벤하임-스콜렘 정리도 맥을 같이하고 있다. 결정 불가능 명제들의 존재는 한결같이 수학이 보편적으로 받아들여지고 의문의 여지가 없는 절대적인 진리라는 신화가 더 이상 지탱될 수 없다는 사실을 시사하고 있다. 이들은 오히려 수학은 인간 정신의 자유로운 창조물이라는 견해를 지지하며 따라서 반실재론적 입장과 상대적 진리관을 취하고 있는 구성주의의 손을 들어주는 것으로 보인다.

그러나 실무한을 거부하는 구성주의의 문제점은 힐베르트가 "우리는 칸토르가 수학자에게 열어준 낙원을 포기하지 않겠다."고 한 말에서 잘 드러난다. 한 가지만 예를 들자면, $n \geq 2$에 대하여 $(1+x)^n > 1+nx$가 성립함을 우리는 회귀적 추론에 의해 수월하게 증명할 수 있는데, 이 추론은 가능적 무한에서 실무한에로의 이행에 의해 정당화되는 것이다.

또한 결정 불가능 명제들의 존재는 배중률과 이에 의존하는 귀류법의 사용을 제한해야 할 필요성을 일깨워준다. 그리고 2가 논리는 이제 결정적으로 3가 논리에 자리를 내줘야하는데, 여기에서는 참과 거짓 이외에 "결정 불가능"이라는 값이 있기 때문이다.

끝으로 아인슈타인의 말을 화두로 남기면서 이 글을 마치고자 한다. "수학의 정리들이 실재에 관여하는 한 그것들은 확실하지 않다. 수학의 정리들이 확실한 한 그것들은 실재에 관

9) 이러한 해석은 물론 실재론보다는 구성주의의 견해를 반영한다.

여하지 않는다."

참고 문헌

1. Bolzano, Bernard, *Les paradoxes de l'infini* (traduction de H. Sinaceur), Seuil, 1993.
2. Cavaillès, Jean, *Méthode axiomatique et formalisme*, Hermann, 1981.
3. Davis P.J. and R. Hersh 저/양영오 · 허민 역, **수학적 경험**(*The Mathematical Experience*, Birkäuser Boston, 1981), 경문사, 1995.
4. Gonseth, Ferdinand, *Les mathématiques et la réalité*, Albert Blanchard, (1936) 1974
5. Kline, Morris 저/박세희 역, **수학의 확실성**(*Mathematies - The loss of Certainty*, Oxford University Press, New York, 1980), 대우학술총서 · 반역 2, 민음사, 1984.
6. Kline, Morris, *Mathematics and the Search for Knowledge*(김경화 · 이혜숙 역, 1994), Oxford University Press, 1995.
7. Maddy, Penelope, Realism in Mathematics, Clarendon Press, 1990
8. Maor, Eli 저/전대호 역, **무한, 그리고 그 너머**(*To Infinity and Beyond*), 사이언스북스, 1997.
9. Monnoyeur, F. et al., *Infini des philosophes, infini des astronomes*, Belin, 1995.
10. Reihenbach, Hane, *The Rise of Scientific Philosophy*(김희빈 역, 1994), California University Press, 1951.
11. Tiles, Mary, *The Philosophy of Set Theory*, Basil Blackwell, 1989.