

〈논 문〉

보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 중간지지점의 최적위치 선정에 관한 연구

A Study on the Optimal Position Determination of Middle Supporting Points
to Maximize the First Natural Frequency of a Beam

안찬우* · 홍도관** · 김동영** · 최석창*** · 박일수****

Ahn Chan-Woo, Hong Do-Kwan, Kim Dong-Young, Choi Suk-Chang and Park Il-Soo

(2000년 8월 11일 접수 : 2001년 1월 26일 심사완료)

Key Words : Bernoulli-Euler Beam(Bernoulli-Euler 보), Natural Frequency(고유진동수), FEA(유한요소해석), Modal Analysis(모달해석), First Order Method(일계법), Harmonic Response Analysis(조화응답해석), Optimization(최적화)

ABSTRACT

This paper describes the natural frequencies obtained through FEA(Finite Element Analysis) and Numerical Analysis which uses the boundary conditions to each equation of motion and the consecutive conditions at each supporting point. And then, we studied on the optimal position determination of middle supporting points to maximize the natural frequency of a beam at 24 Models. We present the data of optimal condition for designing a beam.

1. 서 론

오래 전부터 구조물의 두께와 단면형상의 치수를 설계변수로 하는 최적화가 수행되어 왔다. 특히 Wang과 Nurnura⁽¹⁾는 사각평판의 1차 고유진동수를 최대로 하기 위한 최적지지위치에 대한 연구를 수행하였고, Son과 Kwak⁽²⁾은 진동하는 구조물의 최대 1차 고유진동수에 대한 경계조건의 최적화에 대하여 연구하였다. 그러나 여러 개의 지지점을 갖는 보의 고유진동수에 대한 연구가 요구된다.

본 연구에서는 보의 횡진동에 대한 Bernoulli - Euler 보 이론을 적용하여 지지점 위치에서 분할하여 각각의 운동방정식에 대한 경계조건과 분할된 지지점에서의 연속조건을

적용하는 해석법을 이용하였다. 보의 양단의 경계조건과 중간지지점의 개수에 따라서 24개의 모델(model)로 분류하고, 중간지지점의 위치변화에 따라서 보의 고유진동수에 미치는 영향을 수치해석을 통하여 해석하였다. 그리고, 유한요소해석 소프트웨어인 Ansys 5.6⁽³⁾을 사용하여, Bernoulli-Euler 보 이론에 적용될 수 있는 요소(element)와 Timoshenko 보 이론에 적용될 수 있는 요소를 이용하여 회전관성과 전단변형이 보의 고유진동수⁽⁴⁾에 미치는 영향을 분석하였다. 또한 보의 고유진동수를 최대화하는 중간지지점의 위치선정의 한 방법으로 목적함수의 경사도를 계산하여 탐색방향을 구하는 일계법(first order method)의 최적화 알고리즘을 이용하여 24개 모델에서 보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 중간지지점의 최적의 위치를 구하였다.

또한, 본 논문에서는 수치해석과 유한요소해석⁽⁵⁾ 및 모달실험⁽⁶⁾을 비교, 분석하여 세 가지 해석의 차이점을 고찰하고, 이러한 해석 결과를 이용하여 구조물의 설계 시, 중간지지점의 위치변화에 따른 보의 고유진동수를 예측함으로써 보의 설계 시 공진 현상의 영향을 감소시키기 위한 중간지지점의 최적위치선정에 필요한 자료를 제시하고자 한다.

* 정회원, 동아대학교 기계·산업시스템공학부
E-mail : cwahn@daunet.donga.ac.kr
Tel : (051)200-7643, Fax : (051)200-7656
** 동아대학교 기계공학과 대학원
*** 정회원, 창원전문대학 기계설계과
**** 동아대학교 생산기술연구소 특별연구원

2. 이론해석

2.1 수치해석

균일한 보의 강제 횡진동 방정식은

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

이며, 식 (1)에서 자유진동의 경우

$$f(x, t) = 0 \quad (2)$$

이며, 식 (1)에 적용하면 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (3)$$

식 (3)에서

$$y(x, t=0) = Y(x)T(t) \quad (4)$$

로 가정하여, 식 (4)를 식 (3)에 대입하면

$$EI \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} - \omega^2 T(t) = 0 \quad (6)$$

의 식을 구할 수 있다. 식 (5)에서

$$\beta^4 = \omega^2 / c^2 = \rho A \omega^2 / EI \quad (7)$$

이다. 식 (5)와 식 (6)의 해를

$$Y(x) = Ce^{sx} \quad (C \text{와 } s \text{는 상수}) \quad (8)$$

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (9)$$

로 가정하면, 식 (5)의 해는 다음과 같다.

$$Y(x) = C_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_3(\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4(\sin \beta x - \sinh \beta x) \quad (10)$$

보의 경계조건이 Table 1에서와 같이 6가지 경계조건인 경우 중간지지점의 개수가 1~4개일 때 각각 24개 모델로 분류하고, 이를 Table 1에 나타내었다. 보를 단순지지 위치에서 분할하여 각각의 운동방정식에 대한 경계조건과 분할된 지지점에서의 연속조건을 이용하면, 다원 1차 선형연립 방정식이 된다. 여기서, 유도된 행렬식으로부터 비선형의 진동수방정식을 유도하여 고유진동수를 구하였다.

Table 1 Expressions for designed model

Model	Boundary condition		
	Left	No. of middle simple support	Right
Model 1~4	Fix	1 · 2 · 3 · 4	Fix
Model 5~8	Fix	1 · 2 · 3 · 4	Simple support
Model 9~12	Fix	1 · 2 · 3 · 4	Free
Model 13~16	Simple support	1 · 2 · 3 · 4	Simple support
Model 17~20	Simple support	1 · 2 · 3 · 4	Free
Model 21~24	Free	1 · 2 · 3 · 4	Free

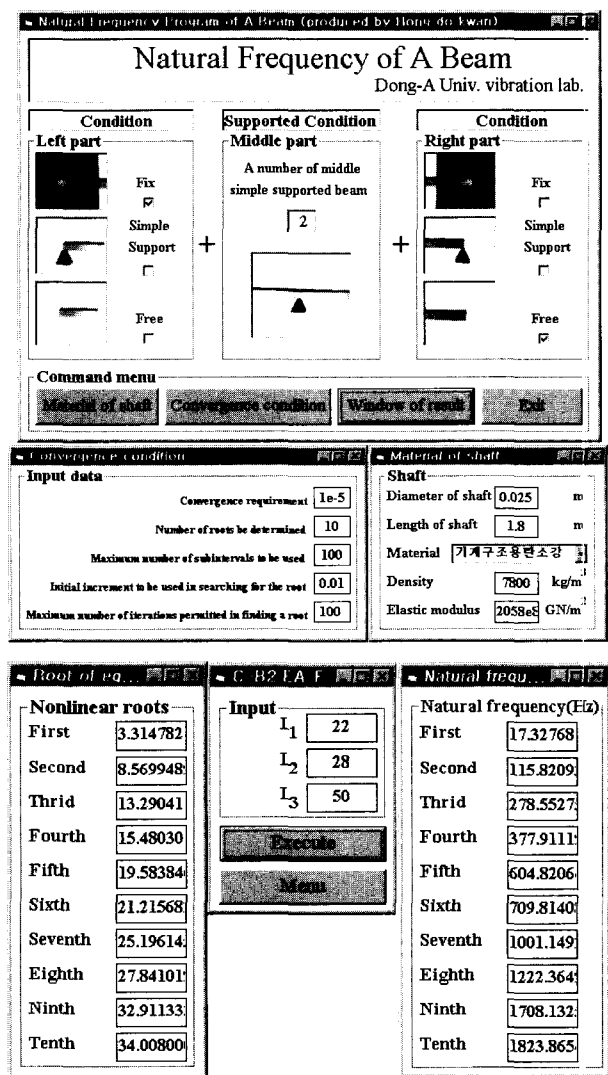


Fig. 1 Numerical analysis program

Fig.1은 본 연구에 사용한 수치해석 프로그램이며, 그

구성은 보의 양단의 경계조건과 중간지지점의 개수를 선택하고 보의 제원 입력창과 수치해석 알고리즘의 수렴 입력창에 값을 대입하여 실행시키면 설계된 보의 경계조건과 연속조건에 의한 진동수 방정식의 근과 보의 고유진동수를 구할 수 있다. 진동수 방정식은 부분 보의 길이에 대한 함수로써 보를 전체 길이에 대해서 100등분하여 보의 1차~10)차 고유진동수와 모드를 수치 계산하였다.

2.2 유한요소해석

유한요소법(FEM : finite element method)을 이용한 유한요소해석은 Ansys 5.6으로 해석을 수행하였으며, 각 모델을 모달해석으로 고유진동수와 모드형상을 구하였다. 유한요소해석에서 사용된 요소는 Bernoulli - Euler 보 이론에 기초한 절(node)이 6자유도인 요소와 Timoshenko 보 이론에 기초한 회전관성과 전단변형을 포함하는 요소를 사용하였으며, 고차의 진동수를 정확하게 구하기 위해서 절과 요소 개수를 10000 개, 진동수범위는 0~2000 Hz로 하였으며, 모달해석⁽⁷⁻⁹⁾의 알고리즘은 Block Lanczos로 수행하였다.

구속조건으로는 보의 양단에 완전고정과 단순지지 및 자유단의 조건을 24개의 모델에 각각 적용하여 해석을 수행하였다. Table 2는 수치해석 및 유한요소해석과 모달실험에 이용된 보의 제원을 나타내었다.

2.3 최적화

$$g_i(x) \leq \bar{g}_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, m_1) \quad (11)$$

$$h_i(x) \leq \bar{h}_i(x) \quad (i=1, 2, 3, \dots, m_1) \quad (12)$$

$$w_i \leq \bar{w}_i(x) \leq \bar{w}_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, m_1) \quad (13)$$

$$Q(x, q) = Q_f(x) + Q_p(x, q) \quad (14)$$

$$Q_f(x) = f/f_0 \quad (15)$$

$$Q_p(x, q) = \sum_{i=1}^l P_x(x_i) + q \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} P_g(g_i) + \sum_{i=1}^{m_2} P_h(h_i) + \sum_{i=1}^{m_3} P_w(w_i) \right\} \quad (16)$$

x 는 설계변수(design variable)이며, l, n 는 보의 전체길이 및 중간지지점을 기준으로 한 부분 보의 개수이다. 식

(11)~(13)은 상태변수(state variable)를 표현하는 식으로 g_i, h_i, w_i 는 상태변수로 밑줄은 하한을 윗줄은 상한을 각각 표시하며, m_1, m_2, m_3 는 상태변수의 개수를 나타낸다. 식 (14)는 무차원화된 비제약 목적함수이며, 식 (15)와 (16)은 각각 무차원 목적함수와 벌칙제한함수(penalty constraint function)를 나타내고, Q 는 벌칙함수의 조정매개함수(penalty parameter)이다.

설계변수는 중간지지점을 기준으로 한 부분 보의 길이로 정의하였으며, 목적함수는 설계변수를 독립변수로 하는 보의 고유진동수의 역수로 정의하였다. 최적화는 목적함수를 최소화문제로 해석을 수행하기 때문에 목적함수를 고유진동수의 역수로 하였으며, 문제의 특성상 제한함수는 정의하지 않았다. Ansys의 APDL를 이용하여 보의 중간지지점의 실용최적위치를 제시하였으며, 정확한 최적의 위치 선정을 위해서 요소의 개수를 10000개로 하였다.

3. 실험장치 및 방법

3.1 실험장치

Table 3은 모달실험에 사용된 실험장치를 나타내고 있으며, 실험장치로는 신호 출력장치인 모달용 가속도계 변환기를 사용하였고, 신호 입력장치로는 힘 변환기가 내장되어 있는 충격망치를 사용하였다. 신호 증폭 장치로는 2 채널 증폭기에서 임출력신호가 증폭되고, 신호 처리 장치인 2 채널 FFT에서 입력받은 두 신호가 고속 푸리에 변환된 스펙트럼 값인 가진점에서의 충격 가진력과 응답점에서의 복소진폭의 크기 비로 전달함수를 계산하였다.

3.2 실험방법

모달용 가속도계 변환기를 보의 임의의 한 위치에 부착하고, 충격망치로 보를 다점가진을 시킨다. 가진점의 acceleration을 진동수 0~1000 Hz 범위에 걸쳐서 측정하였다. 창함수는 직사각형(rectangle), 평균(averaging)은 5번 하고, 트리거(trigger)는 충격망치가 연결된 A채널의 충격 입력신호를 기울기(slope) +로 데이터를 샘플링(sampling)

Table 2 Data of a designed beam

Item list	Description
Material	S45C
Diameter	0.025 (m)
Length	1.8 (m)
Density (ρ)	7800(kg/m ³)
Elastic modulus(E)	2.058×10 ⁸ (kN/m ²)
Poisson's Ratio(ν)	0.3

Table 3 The apparatus of modal experiment

	Experiment apparatus	Co.	Model
1	Modal accelerometer	Rion co.	PV90B
2	Impact hammer	Rion co.	PH-61
3	2 Channel charge amplifier	Rion co.	VP-38
4	2 Channel FFT	Rion co.	SA-74

하였다. 충격망치로 0~1000 Hz의 주파수를 가진시켜 충격 망치에 내장된 힘 변환기의 신호와 가속도계 변환기의 진폭신호가 2 채널 증폭기에서 신호가 증폭되어 2 채널 FFT에서 고속 푸리에 변환된 스펙트럼 값인 가진점에서의 충격 가진력과 응답점에서의 복소진폭의 크기 비로 전달함수를 구하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 수치해석 및 유한요소해석

24개 모델중의 한 예로 Fig. 2는 경계조건이 고정-자유단인 모델 9에서 중간지지개수가 1개를 변화시켰을 때, 전체 보의 고유진동수가 변화하는 경향을 수치해석과 유한요소해석의 결과로 나타내었다. 보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적의 중간지지위치는 고정단의 경계조건으로부터 78.7%인 위치이며, 이 위치는 보의 길이와 재질 및 단면형상에 무관하며, 최적화의 결과와 거의 일치한다. 보의 1차 고유진동수가 가장 최소가 되는 위치에 중간 단순지지하면 5.6 Hz가 되며, 가장 최대가 되는 최적의 위치에 중간

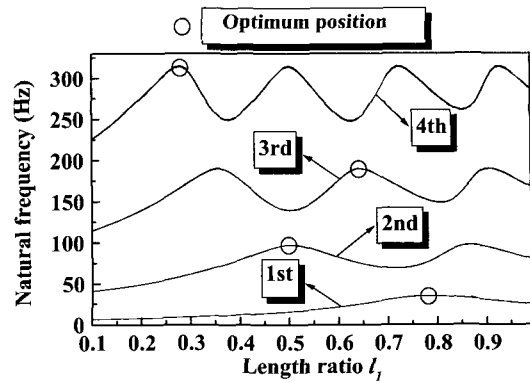


Fig. 2 Natural frequency of a beam according to the change of l_1 in model 9

단순지지를 하면 34.72 Hz가 되며 최악의 조건과 최적의 조건을 비교해 볼 때 약 30 Hz의 고유진동수의 차이가 발생하였다. 1차부터 4차까지 보의 고유진동수에 관한 수치해석결과와 유한요소해석결과와의 오차가 거의 1~2%로 두 해석의 결과가 거의 일치함을 알 수 있다.

Fig. 3은 양단의 경계조건이 고정-자유단인 모델 10에서

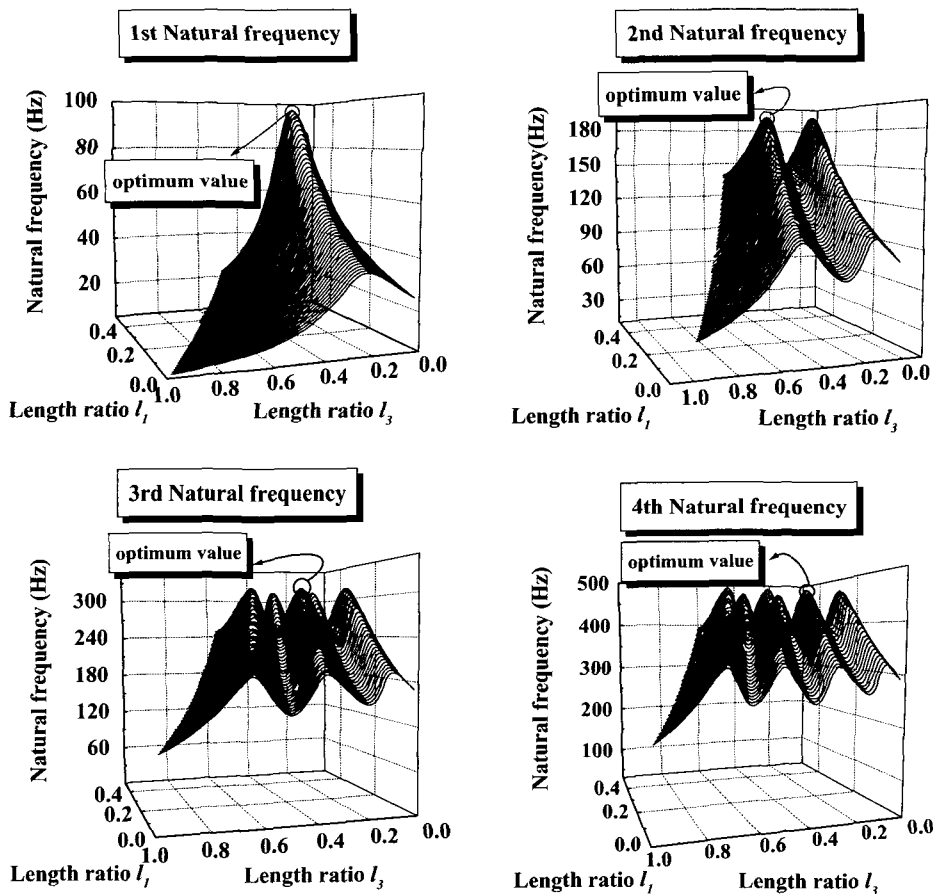


Fig. 3 Natural frequency of a beam according to the change of l_1, l_2, l_3 in model 10

중간지지개수 2개를 각각 변화시켰을 때 1차부터 4차까지 보의 고유진동수가 변화하는 경향을 나타내었다. 보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적의 중간지지위치는 왼쪽의 경계조건으로부터 50.0%인 위치와 86.8%이며, 이 위치는 보의 길이와 재질 및 단면형상에 무관하며, 최적화의 결과와 거의 일치한다. 보의 1차 고유진동수가 가장 최소가 되는 중간지지점의 위치에 설계하게 되면 5.24 Hz가 되며, 가장 최대가 되는 중간지지점의 최적의 위치에 설계하게 되면 96.94 Hz가 된다. 고유진동수가 최소가 되는 조건과 최적의 조건을 비교해 볼 때 약 90 Hz의 고유진동수의 변동이 발생하였다. 1차에서 4차 고유진동수까지 수치해석결과와 유한요소해석 결과의 오차가 거의 1~2%로 두 해석의 결과가 거의 일치함을 알 수 있다.

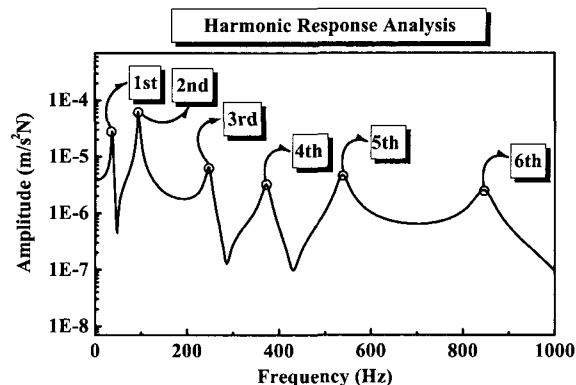
4.2 최적화

Table 4는 24개 모델에서 1차 고유진동수가 최대가 되는 중간지지점의 최적위치를 나타내고 있다. 중간지지점의 최적위치 값은 보에서 왼쪽의 경계조건으로부터 무차원 거리(%)를 나타내고 있다. 최적위치에 중간지지를 하게 되면 보의 1차 고유진동수가 최대가 됨을 알 수 있다.

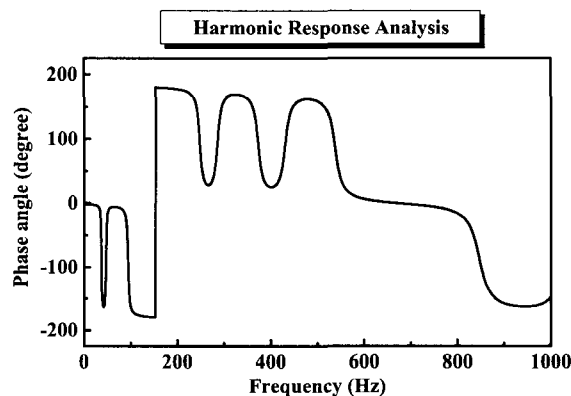
4.3 조화응답해석

보의 임의의 지점에 1~1000 Hz로 조화가진을 받게 되면, 각 주파수마다 조화가진력에 대한 복소진폭의 크기 비로 전달함수를 구할 수 있다. Fig. 4는 모델 10에서 보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 최적의 조건일 때, 조화응답해석의 결과를 나타내고 있다. 각 피크가 보의 고유진동수

를 나타내고 있다.



(a) Amplitude



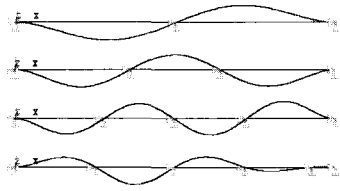
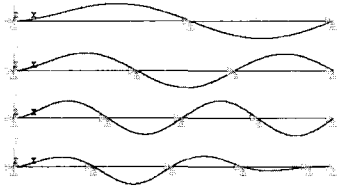
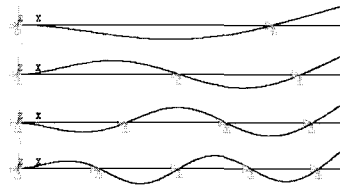
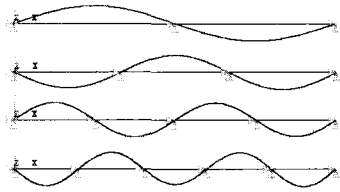
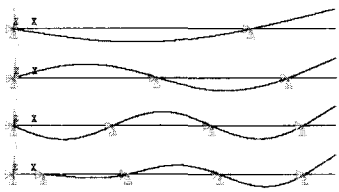
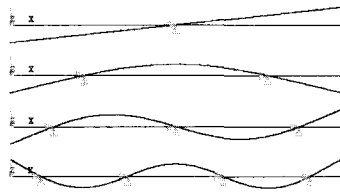
(b) Phase angle

Fig. 4 Harmonic response result of a beam

Table 4 The optimal position of middle supporting points

No. of supporting	Model	Model 1~4		Nat. Freq. 1st(Hz)	Model 5~8				Nat. Freq. 1st(Hz)
		Fix	& fix(%)		Fix & simple (%) support				
1		50.01		78.43	55.48				63.78
2		36.14	64.09	153.5	38.37	69.33			132.6
3		27.74	49.79	253.9	29.47	52.76	76.44		226.4
4		23.01	49.70	301.9	23.95	42.88	61.59	80.93	345.2
No. of supporting	Model	Model 9~12		Nat. Freq. 1st(Hz)	Model 13~16				Nat. Freq. 1st(Hz)
		Fix	& free(%)		Simple & simple support(%)support				
1		78.68		27.66	50.01				50.47
2		50.01	86.92	78.60	33.04	66.56			112.7
3		33.34	64.38	150.0	25.14	49.95	75.18		200.6
4		25.01	49.66	245.7	20.06	40.25	59.78	79.85	313.1
No. of supporting	Model	Model 17~20		Nat. Freq. 1st(Hz)	Model 21~24				Nat. Freq. 1st(Hz)
		Simple	& free support(%)		Free & Free(%)				
1		73.68		19.87	50.01				4.98
2		44.37	85.17	63.73	22.53	77.52			28.63
3		30.78	61.64	132.3	13.08	49.92	86.94		78.55
4		23.44	47.08	226.4	9.53	35.59	64.41	90.44	153.5

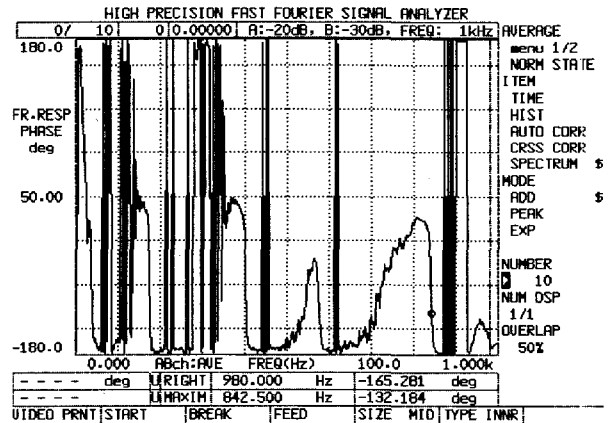
Table 5 1st mode shape at the optimal position of middle supporting points

Fix	Model 1~4	Fix	Fix	Model 5~8	Simple support	Fix	Model 9~12	Free
								
Simple support	Model 13~16	Simple support	Simple support	Model 17~20	Free	Free	Model 21~24	Free
								

4.4 모달실험

24개 모델중의 한 예로 모델 10에서 왼쪽 경계조건인 고정단으로부터 16.6%인 위치와 72.1%인 위치에 중간지지 하였을 때, 가진 방법을 충격가진으로 하고 FFT에서 주파수응답함수를 사용하여 얻은 모달실험을 수행하였다. Fig. 5의 (a)는 복소진폭의 크기를 나타내며 1~1000 Hz의 진동수 범위내의 각 피크가 보의 고유진동수를 나타내고, (b)는 위상이 진동수에 따라서 변화하는 경향을 나타내며 각 고유진동수에서 진동방향에 따라 0°와 180°의 위상구분이 비교적 잘 나타남을 알 수 있다.

Fig. 6은 모델 10에서 1차 고유진동수가 최대가 되는 최



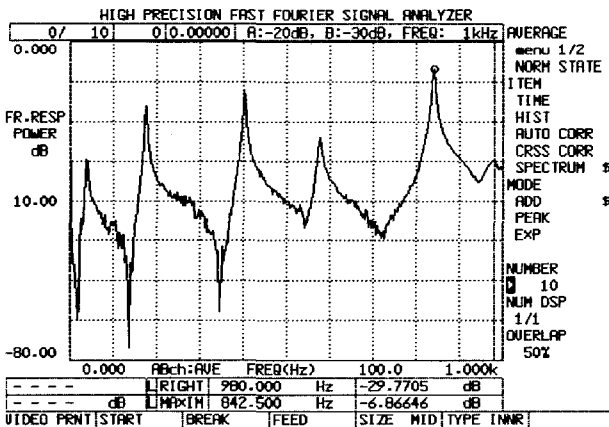
(b) Phase angle

Fig.5 Frequency response result of a beam in modal experiment at model 10

적의 조건일 때, 수치해석과 FEA 및 실험결과 등의 비교를 나타내었다. 3가지 해석결과의 오차가 최소 0.6%에서 최대 8.0%로 경향이 서로 비슷함을 알 수 있었다.

4.5 모드형상

Table 5는 모델 1~24까지 보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 위치에 중간지지 하였을 때 모드형상을 나타낸다. 일직선이 보가 정지해 있을 때의 상태를 나타내며, 곡선이 보가 진동할 때의 1차 모드형상을 표시하고 있다.



(a) Amplitude

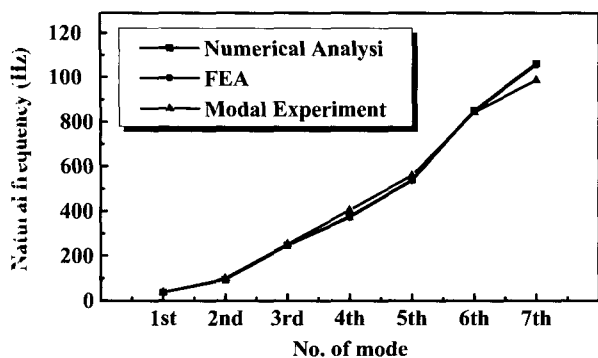


Fig. 6 The comparison of numerical analysis, FEA and modal experiment

5. 결 론

본 연구에서는 수치해석과 유한요소해석 및 모달실험의 결과를 비교, 분석하여 각 해석의 차이점을 고찰하고, 보의 양단의 경계조건과 중간지지점의 개수에 따른 구조물의 설계 시, 보의 고유진동수가 가장 최대가 되는 중간지지점의 최적위치선정에 관해서 연구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 수치해석에서 보를 각 지지점으로 분할하고, 24가지 모델의 운동방정식에 대한 경계조건과 분할된 지지점에서의 연속조건을 이용하여, 중간지지점의 위치변화에 따른 보의 고유진동수가 변화하는 경향은 유한요소해석 및 모달 실험결과와의 오차가 최소 0.6%에서 최대 8.0% 이내로 잘 일치하고 있다.

2) 24개 모델의 보에서 왼쪽 경계조건으로부터 보의 1차 고유진동수가 최대가 되는 중간지지점의 최적위치를 결정함으로써 각 모델과 같은 구조물 설계 시 최적조건을 자료를 제시하였다.

3) 중간지지점의 위치변화에 따른 보의 고유진동수의 변화를 예측하고 사용되는 환경에서 발생할 수 있는 외부 진동수를 고려하여 설계함으로써 공진의 발생을 피할 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Wang, B.P., and Nomura, S., 1989, "Optimal Support Location for Maximizing Fundamental Natural Frequency of a Free-Free Rectangular Plate." Computer Aided Optimum Design of Structures : Recent Advances, edited by C. A. Brebbia and S. Hernandez, Springer-Verlag, Berlin, pp. 277~286.
- (2) Son, J. H., and Kwak, B. M., 1993, "Optimization of Boundary Conditions for Maximum Fundamental Frequency of Vibrating Structures", AIAA Journal, Vol. 31, No. 12, December, pp. 2351~2357.
- (3) Tae-Sung Inc. 1999, "Ansys 5.6 Analysis Guide".
- (4) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," Journal of Sound & Vibration, Vol. 56, pp. 175~185.
- (5) Wang Fengquan and Chen Shiyu, 1996, "A Method to Determine the Boundary Conditions of the Finite Element Model of a Slender Beam Using Measured Modal Parameters," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 118, No. 3, pp. 474~478.
- (6) Tabaddor M, Nayfeh AH, 1997, "An Experimental Investigation of Multimode Responses in a Cantilever beam," Journal of Vibration & Acoustics Transactions of the ASME, Vol. 119, No. 4, pp. 532~538.
- (7) Cahti, M. Rand, R. and Mukehrjee, S., 1997, "Modal Analysis of a Cracked Beam," Journal of Sound & Vibration, Vol. 207, No. 2, pp. 240~279.
- (8) Kuo CFJ, Lin SC, 1998, "Modal Analysis and Control of a rotating Euler-Bernoulli Beam-Part II-Residual Vibration Control," Mathematical & Computer Modelling, Vol. 27, No. 5, pp. 93~97.
- (9) Oliveto, G., Santini, A. and Tripodi, E., 1997, "Complex Modal Analysis of a Flexural Vibrating Beam with Viscous End Conditions," Vol. 200, No. 3, pp. 327~345.