

〈논 문〉

# 임의의 곡률과 변두께를 갖는 두꺼운 축대칭 회전 셸의 3차원적 장방정식, 운동 방정식, 에너지 범함수

## Three-Dimensional Field Equations, Equations of Motion, and Energy Functionals for Thick Shells of Revolution with Arbitrary Curvature and Variable Thickness

강 재 훈\* · 이 은 택\*\* · 양 근 혁\*\*\*

Jae-Hoon Kang, E. T. Lee, and Keun-Hyeok Yang

(2000년 10월 18일 접수 ; 2001년 1월 10일 심사완료)

**Key Words** : Arbitrary Curvature(임의의 곡률), Variable Thickness(변두께), Shell of Revolution(축 대칭 회전 셸), Thick Shell(두꺼운 셸), Field Equations(장방정식), Navier's Equations of Motion(나비에의 운동방정식), Energy Functionals(에너지 범함수), Three-dimensional Analysis(3차원적 해석), Tensor Analysis(텐서 해석)

### ABSTRACT

This work uses tensor calculus to derive a complete set of three-dimensional field equations well-suited for determining the behavior of thick shells of revolution having arbitrary curvature and variable thickness. The material is assumed to be homogeneous, isotropic and linearly elastic. The equations are expressed in terms of coordinates tangent and normal to the shell middle surface. The relationships are combined to yield equations of motion in terms of orthogonal displacement components taken in the meridional, normal and circumferential directions. Strain energy and kinetic energy functionals are also presented. The equations of motion and energy functionals may be used to determine the static or dynamic displacements and stresses in shells of revolution, including free and forced vibration and wave propagation.

### 기 호 설 명

$a$  : 원주형 셸과 구형 셸의 중앙면의 반경,  
 : 회전 포물형 셸의 자오선의 초점 거리,  
 : 회전 타원형 셸의 반장축(semimajor axis)의 길이,  
 : 회전 쌍곡형 셸의 반횡축(semitransverse axis)의 길이  
 $A_{ij}$  : 임의의 이차 텐서의 공변성분(covariant component)  
 $A^{ij}$  : 임의의 이차 텐서의 반변성분(contravariant component)  
 $A^i_j$  : 임의의 이차 텐서의 혼합성분(mixed component)

$b$  : 회전 타원형 셸의 반단축(semiminor axis)의 길이,  
 : 회전 쌍곡형 셸의 반 쥘레축(semiconjugate axis)의 길이  
 $E$  : 영 계수  
 $f$  : 단위 체적 당 물체력 벡터  
 $f_j$  : 물체력 벡터  $f$ 의 공변성분(covariant component)  
 $f^j$  : 물체력 벡터  $f$ 의 반변성분(contravariant component)  
 $g$  :  $\equiv g_{11} g_{22} g_{33}$   
 $g_i$  : 변형 전, 공변기저벡터(covariant basis vector),  $i = 1, 2, 3$   
 $g^i$  : 변형 전, 반변기저벡터(contravariant basis vector),  $i = 1, 2, 3$   
 $g_{ij}$  : 변형 전, 계량텐서(metric tensor)의 공변성분(covariant component)  
 $g^{ij}$  : 변형 전, 계량텐서(metric tensor)의 반변성분(contravariant component)  
 $G$  : 전단 계수 [=  $E/2(1 + \nu)$ ]

\* 정회원, 중앙대학교 공과대학 건축학과  
 E-mail : jhkang@cau.ac.kr  
 Tel : (02)820-5342, Fax : (02)812-4150  
 \*\* 중앙대학교 공과대학 건축학과  
 \*\*\* 중앙대학교 대학원 건축학과

$h$  : 쉘의 두께  
 $h_b$  : 쉘의 최하면 ( $\phi = \phi_b$ )의 두께  
 $h_t$  : 쉘의 최상면 ( $\phi = \phi_t$ )의 두께  
 $i, j, k$ :  $x_1, x_2, x_3$  방향으로의 직교 기저 벡터(orthonormal basis vector)  
 $P$  : 쉘 요소 내의 임의의 점  
 $r$  : 변형 전, 위치 벡터  
 $r'$  : 회전축( $y$ 축)에서 중간면까지의 거리  
 $r_p$  : 회전축으로부터 점  $P$ 까지의 거리, 식 (11) 참조  
 $T$  : 운동 에너지  
 $u$  : 변위의 실성분(physical component)  
 $u_\phi, u_z, u_\theta$  :  $\phi, z, \theta$ 방향으로의 변위  
 $v$  : 변위 벡터  
 $v_i$  : 변위 벡터의 공변성분(covariant component)  
 $v^i$  : 변위 벡터의 반변성분(contravariant component)  
 $v_i | j$  : 공변미분(covariant differentiation), 식 (40)에서 정의  
 $v_j$  : 변형 후 체적의 가속도의 공변성분(covariant component)  
 $v^j$  : 변형 후 체적의 가속도의 반변성분(contravariant component)  
 $w$  : 변형률 에너지  
 $W$  : 변형률 에너지 밀도 함수, 식 (50)에서 정의  
 $x_1, x_2, x_3$  : 직교 좌표  
 $y$  :  $r$ 축으로부터 중앙면까지의 거리  
 $z$  : 중앙면에서 수직인 방향으로 측정된 쉘의 임의의 점까지의 거리  
 $\alpha_i$  : 변형률 텐서의 공변성분(covariant component)  
 $\Gamma_{ij}^k$  : 제 2종 크리스토펠 기호(Christoffel symbol of the second kind), 식 (24)에서 정의  
 $\delta_{ij}^k$  : 크로넬커 델타(Kronecker delta), 식 (17)에서 정의  
 $\epsilon$  : 체적 변형률, 식 (38)에서 정의  
 $\epsilon_i$  : 변형률의 실성분(physical component)  
 $\rho$  : 원주각  
 $\rho^i$  : 공간 곡선 좌표,  $i=1,2,3$   
 $\rho_1$  : 가우시언 곡률 [ $= \kappa_1 \kappa_2$ ]  
 $\nu$  : 라메의 상수 [ $= E\nu / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ ]  
 $\sigma$  : 프와송 비  
 $\rho$  : 단위 체적 당 질량 밀도  
 $\rho_1$  : 자오면에서 중앙면의 곡률 반경  
 $\rho_2$  : 자오선에 법면(normal plane)에서 중앙면의 곡률 반경  
 $\rho_1, \rho_2$  : 중앙면의 주곡률반경  
 $\rho_z$  :  $= \rho_1 + z$

$\sigma_{ij}$  : 응력의 실성분(physical component)  
 $\tau^i$  : 변형 후, 응력 텐서의 반변성분(contravariant component)  
 $\tau_i^j$  : 변형 후, 응력 텐서의 혼합성분(mixed component)  
 $\phi$  : 자오선 좌표, 중앙면의 법선과 회전축이 이루는 각  
 $\phi_b, \phi_t$  : 쉘 요소의 최상면과 최하면에서  $\phi$ 의 값  
 $\phi, z, \theta$  : 곡선 좌표  
 $x_1 (= 1/\rho_1)$  : 주곡률  
 $x_2 (= 1/\rho_2)$   
 $\Omega$  : 체적  
 $\nabla$  : 델 연산자(del operator)  
 $(\dot{\quad})$  : 시간 도함수  
 $(\cdot)$  : 공간 도함수  
 $(| \quad )$  : 공변미분(covariant differentiation)

## 1. 서 론

축 대칭 회전체(body of revolution)는 실생활에서 많이 접할 수 있는 구조 중의 하나이다. 이러한 구조물의 대표적인 예로는 원주, 원추, 구, 타원체, 포물체, 쌍곡체 등이 있는데, 특히 속이 비어 있는 경우, 축 대칭 회전 쉘(shell of revolution)이라 한다. 쉘이 갖는 구조적 효율성으로 인해 쉘의 중요성은 날로 증대해 가고 있다.

쉘의 해석은 전형적으로 두께 방향 변위의 변분(variation)과 관련된 운동학적 가정 하에 이루어진다. 대부분 쉘의 해석은 변위가 두께 좌표에 대해서 일정하거나 선형적으로 변분하는 것이 고작이다. 이러한 가정은 삼차원적 이론을 중앙면의 변위로 기술되는 이차원적 이론으로 단순화시킨다. 이차원 이론은 균질하고 등방성의 재질을 갖는 두께가 얇은 쉘과 하위 진동수 즉 장파장을 갖는 모우드 형태에 대해서는 비교적 정확하지만, 두꺼운 쉘의 해석이나 상위 진동수를 정확하게 계산하기 위해서는 전단변형과 회전관성을 고려해야 하므로 삼차원적 해석이 필요하다.

쉘의 두께가 얇은 축 대칭 회전 쉘의 기하학과 좌표계에 관한 상세한 설명이 많은 저서<sup>(1-4)</sup>에서 설명되었으며, 특히 Leissa<sup>(5)</sup>는 그의 모노그래프(monograph)에서 이를 요약하고 정리하였다. 운동학적 제한 요소와 부정확성을 내포하고 있는 이러한 기존의 이차원적 쉘 모델은 특히 쉘의 두께가 두꺼워질수록 이런 부정확성은 더욱 더 심각해진다. 이 연구에서 유도될 방정식에서는 변형률이 작다는 가정 이외에 그 어떤 운동학적 구속은 없다.

축 대칭 회전 쉘의 정적 및 동적 변위와 응력의 해석 그리고 자유 및 강제 진동의 문제와 같은 탄성 변형의 문제, 특히 두꺼운 쉘을 해석하기 위해서는 완전하고 일관된 삼

차원적 이론이 필요하다. 이러한 삼차원적 이론은 엄밀해로 또는 갈라진 방법이나 유한 차분법과 같은 근사적 방법으로 셀을 해석하기 위해서 우선 먼저 운동 방정식을 요구하게 된다. 그리고 에너지 범함수는 리츠방법이나 유한요소법 등에 사용되어 근사해를 구할 수 있게 한다. 이러한 운동 방정식과 에너지 범함수는 서로 모순이 없이 일관성을 가져야 하며, 충분한 수치적 정확도를 가지고 같은 문제를 풀었을 때, 같은 해를 주어야만 한다.

많은 저서에서 텐서 해석을 사용한 일반 탄성이론이 다루어져 왔다.<sup>(6~11)</sup> 삼차원적인 문제, 특히 곡선 좌표계로 이루어진 삼차원적인 문제를 해석할 때, 텐서 해석은 강력하고 정확한 도구로서 매우 유용하게 이용될 수 있다. 이 연구에서는 텐서 해석과 함께 이러한 일반 탄성 이론을 근간으로 곡선 좌표계(φ, z, θ)에 대한 어떤 특정한 탄성 장방정식(field equation), 즉 응력-변형률 관계식, 변형률-변위 관계식, 그리고 운동 방정식이 실성분으로 결정될 것이다. 또한 이 장방정식을 결합하여 소위 나비에의 방정식(Navier's equation)이라고 불리는 변위 지배운동방정식이 유도될 것이다.

삼차원적인 탄성이론을 근간으로 속이 찬 또는 속이 빈 원형 기둥에 대한 많은 연구가 이루어졌다. 이러한 예로는 원형 또는 환형 후판에<sup>(12~20)</sup> 대한 자유진동의 문제와 속이 찬 또는 속이 빈 원주에<sup>(21~52)</sup> 대한 자유진동의 문제가 다수의 연구자들에 의해서 다루어져 왔다.

이와는 적은 반도로 원추형 셀과<sup>(52~54)</sup> 구형 셀에<sup>(23, 55~68)</sup> 대한 삼차원적인 해석이 이루어 졌다. 그러나 임의의 곡률과 변두께를 갖는 축 대칭 회전 셀을 삼차원 이론을 근간으로 한 완벽하고 일관된 연구는 아직 이루어지지 않고 있다.

이 연구의 목적은 작은 변형률과 균질하고 등방성의 재질을 갖는 임의의 축 대칭 회전 셀의 선형 탄성적 거동을 지배하는 완전하고 일관된 삼차원적 장방정식을 유도하는 것이다. 이 방정식은 실성분으로 표현된 6개의 응력-변형률 관계식, 6개의 변형률-변위 관계식, 그리고 3개의 운동 방정식으로 구성되어 있다. 이 방정식은 셀의 중앙면에 접선과 수직 방향 좌표로 표현될 것이다. 이러한 관계식들은 결합되어 서로 직교하는 변위성분(  $u_\phi, u_z, u_\theta$  )으로 표현된 운동방정식 및 변형률 에너지와 운동 에너지 범함수가 유도될 것이다. 이 운동방정식은 에너지 범함수와 함께 자유 및 강제진동과 파동전달의 문제뿐만 아니라 정적 및 동적 변위와 응력을 계산하는데 사용될 수 있다.

이 방정식은 임의의 곡률과 자오선 방향(φ)으로 두께가 변하는 두꺼운 축 대칭 회전 셀을 해석하는 데 매우 적절하게 사용될 수 있으며, 엄밀해 또는 근사해의 형태로 이 방정식의 해를 구할 수 있다. 이 논문의 삼차원적 셀

해석에서는 변위에 그 어떤 제한조건을 두지 않았으며, 바로 이 점이 셀 두께방향 변위의 변분에 관한 지극히 제한적인 가정을 갖는 전통적인 이차원적 셀 이론과의 가장 큰 차이점이다.

## 2. 축 대칭 회전 셀의 기하학적 고찰

임의의 곡률과 변두께(h)를 갖는 두꺼운 축 대칭 회전 셀을 분석하기 전에 우선 그 셀의 중앙면을 기하학적으로 고찰해 보자. 축 대칭 회전 셀의 중앙면은 한 평면 위에 있는 곡선을 그 평면 위의 한 축을 중심으로 회전시킴으로써 만들어진다. 이렇게 축 대칭 회전 셀을 발생시키는 곡선을 자오선(meridian)이라 하며 이 선은 하나의 식

$$r = f(y) \tag{1}$$

으로, 또는 한 쌍의 매개 변수 방정식

$$r = r(\phi), y = y(\phi) \tag{2}$$

으로 표현될 수 있다. 여기서 r과 y는 각각 반경 좌표와 축 좌표를 나타내며, φ는 자오 곡선의 법선과 회전축이 이루는 각도이다. (Fig.1)

ρ<sub>1</sub>은 자오면에서 중앙면의 곡률 반경이며, ρ<sub>2</sub>는 자오선의 법평면에서 중간면의 곡률 반경이다. ρ<sub>2</sub>는 자오선의 법선 위에서 그 법선과 회전축 및 중앙면과의 두 교차점 사이의 거리로 측정될 수 있다. 두 곡률 반경, ρ<sub>1</sub>과 ρ<sub>2</sub>는 식 (1)로부터 다음과 같이 결정되며,

$$\rho_1 = \frac{[1+(r')^2]^{3/2}}{r''}, \rho_2 = r[1+(r')^2]^{1/2} \tag{3}$$

여기서 프라임(prime)은 y에 대한 도함수를 나타낸다. 또한 식 (2)로부터 두 곡률을 계산하면 다음과 같으며

$$\rho_1 = \frac{[(r')^2 + (y')^2]^{3/2}}{r''y' - r'y''}, \rho_2 = \frac{r[(r')^2 + (y')^2]^{1/2}}{y'} \tag{4}$$

여기서의 프라임은 φ에 대한 도함수를 나타낸다.

식 (3) 또는 식 (4)를 이용해서 다양한 형태를 갖는 전통적 셀의 중간면의 주곡률반경을 다음과 같이 구할 수 있다<sup>(3~4)</sup> :

$$(1) \text{ 평판 : } \rho_1 = \infty, \rho_2 = \infty \tag{5a}$$

$$(2) \text{ 구형 셀 : } \rho_1 = a, \rho_2 = a \tag{5b}$$

여기서 a는 구형 반경이다.

$$(3) \text{ 원통형 셀 : } \rho_1 = \infty, \rho_2 = \infty \tag{5c}$$

여기서  $a$ 는 원통형 반경이다.

$$(4) \text{ 원추형 쉘: } \rho_1 = \infty, \rho_2 = \frac{r}{\sin \phi_0}, \quad (5d)$$

여기서는  $a$ 의 상수값이다.

$$(5) \text{ 원 환형 쉘: } \rho_1 = \infty, \rho_2 = \frac{b}{\sin \phi}, \quad (5e)$$

여기서  $a$ 는 원 환형 단면의 반경이며,  $b$ 는 원환면의 회전 반경이다.

$$(6) \text{ 포물형 쉘: } \rho_1 = \rho_2 = \frac{2a}{\cos^3 \phi}, \rho_1 = \rho_2 = \frac{2a}{\cos \phi} \quad (5f)$$

여기서  $a$ 는 자오선의 초점거리이다.

(7) 단축(minor axis) 이 회전축과 만나는 타원형 쉘:

$$\rho_1 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}}, \rho_2 = \frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (5g)$$

여기서  $a$ 와  $b$ 는 각각 장축 (major axis)과 단축길이의 반을 나타낸다.

(8) 쌍곡형 쉘:

$$\rho_1 = \frac{-a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \phi - b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}}, \rho_2 = \frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \phi - b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (5h)$$

여기서  $a$ 와  $b$ 는 각각 횡축과 켈레축 길이의 반을 나타낸다

이면 표면의 주 곡률은 주 곡률 반경의 역수이며, 따라서 두 개의 주 곡률  $\chi_1 = 1/\rho_1$ 과  $\chi_2 = 1/\rho_2$ 이 있으며, 이 두 개의 주 곡률의 곱  $\chi = \chi_1 \chi_2$ 은 가우시언 곡률 (Gaussian curvature) 이라 한다. 표면의 가우시언 곡률은 모선(generator)의 기하에 따라서 변한다. 예를 들면 구형, 타원형, 포물형 쉘은 양의 가우시언 곡률을, 원통형과 원추형 쉘은 영의 가우시언 곡률을, 쌍곡형 쉘은 음의 가우시언 곡률을, 원 환형 및 종 모양의 쉘(bell-shaped shell)은 양, 음 및 영의 혼합된 가우시언 곡률을 갖는다. 특히 양의 가우시언 곡률을 가질 때,  $\rho_2$ 는 항상 회전축에서 끝나게 된다.

Fig. 1로부터 다음의 관계식

$$r = \rho_2 \sin \phi, \quad (6)$$

이 유도되며, 자오선의 선요소  $ds$ 는

$$ds = \rho_1 d\phi \quad (7)$$

이다 두 식

$$dr = ds \cos \phi, \quad dy = ds \sin \phi, \quad (8)$$

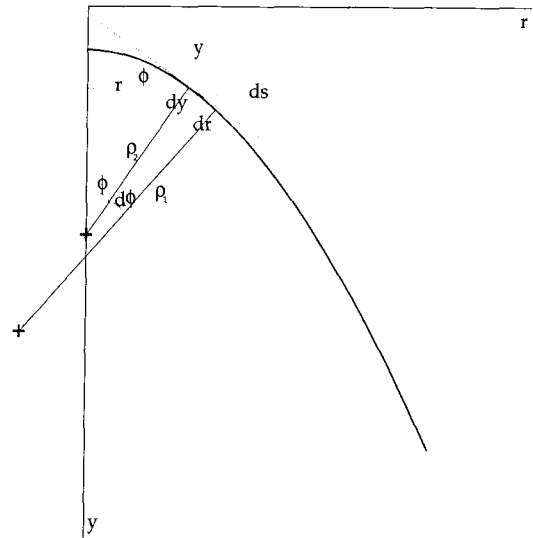


Fig.1 Meridian of the middle surface of a shell of revolution

으로 인해 다음의 관계식

$$\frac{dr}{d\phi} = \rho_1 \cos \phi, \quad \frac{dy}{d\phi} = \rho_1 \sin \phi \quad (9)$$

이 계산된다.

Fig. 2는 자오선 방향( $\phi$ )으로 두께( $h$ )가 변하며 양의 가우시언 곡률을 갖는 입의 쉘 요소의 단면과 곡선 좌표계( $\phi, z, \theta$ )를 보여 주고 있다. 쉘 요소의 최상면( $\phi = \phi_t$ )과 최하면( $\phi = \phi_b$ )은 쉘의 중앙면에 수직하고 평평한데, 이는 적분계산을 보다 단순화하기 위함이다. 쉘 요소 내의 한 점  $P$ 의 위치는  $\phi, z, \theta$ 로 결정되는데,  $z$ 는 중앙면에서 점  $P$ 까지, 중앙면의 법선방향으로 측정된 거리이며,  $\theta$ 는 원주각이다.

텐서 해석을 위해서는 직교 좌표계( $x^1, x^2, x^3$ )와 곡선 좌표계( $\phi, z, \theta$ )간의 변환이 요구 되는데 Fig. 2로부터 다음의 관계

$$x^1 = r_z(\phi, z) \cos \theta, \quad x^2 = r_z(\phi, z) \sin \theta, \quad x^3 = Y(\phi) - z \cos \phi \quad (10)$$

를 알 수 있다. 여기서  $r_z(\phi, z)$ 는

$$r_z(\phi, z) \equiv r(\phi) + z \sin \phi = [\rho_2(\phi) + z] \sin \phi \quad (11)$$

이며, 회전축에서 쉘 요소내의 점  $P$ 까지의 거리이다. 곡선 좌표들의 범위는

$$\phi_t \leq \phi \leq \phi_b, \quad -\frac{h(\phi)}{2} \leq z \leq \frac{h(\phi)}{2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (12)$$

이다. 단, 음의 가우시언 곡률( $x$ )을 가질 때는 식 (12)에 있는  $\phi$ 의 범위는  $\phi_b \leq \phi \leq \phi_i$ 으로 대체되어야 한다.

### 3. 장방정식(Field Equation)

이 장에서는 6개의 응력-변형률 관계식, 6개의 변형률-변위 관계식, 3개의 운동 방정식으로 구성 되는 15개의 장 방정식이 유도된다.

변형 전의 공변 기저 벡터(covariant base vector)  $g_i$ 는

$$g_i = r_i \quad (13)$$

이며, 여기서  $r$ 은 변형 전 물체 내의 어떤 점의 위치벡터를 나타내며, 커마(,)는 공간 곡선 좌표  $\phi, z, \theta$ 에 상응하는  $\theta^i (i=1, 2, 3)$ 에 대한 편미분을 의미한다. 식 (9), (10), (13)에서 공변 기저 벡터  $g_i$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$g_1 = \rho_z (\cos \phi \cos \theta i + \cos \phi \sin \theta j + \sin \phi k) \quad (14)$$

$$g_2 = \sin \phi \cos \theta i + \sin \theta \sin \theta j + \cos \phi k$$

$$g_3 = -r_z (\sin \theta i - \cos \theta j)$$

여기서  $\rho_z(\theta, z)$ 는 다음과 같이 정의되며,

$$\rho_z(\theta, z) \equiv \rho_1(\theta) + z \quad (15)$$

$r_z$ 는 식 (11)에서 정의되었으며,  $i, j, k$ 는 각각  $x_1, x_2, x_3$  방향으로의 정규 직교 기저 벡터(orthonormal basis vector)이다. 또한 변형 전 물체의 반변 기저 벡터(contravariant base vector)  $g^i$ 는 다음 식으로 정의된다.

$$g_i \cdot g^j = \delta_i^j \quad (16)$$

여기서  $\delta_i^j$ 는 다음 식으로 정의된 크로네커 델타(kronecker delta)이며,

$$\delta_i^j \equiv \begin{cases} 1 & (\text{if } i = j) \\ 0 & (\text{if } i \neq j) \end{cases} \quad (17)$$

$i$ 와  $j$ 는 양의 정수이다. 식 (14)와 (16)을 이용하면 다음의 반변 기저 벡터  $g^i$ 가 계산된다.

$$\begin{aligned} g^1 &= \frac{1}{\rho_z} (\cos \phi \cos \theta i + \cos \phi \sin \theta j + \sin \theta k) \\ g^2 &= \sin \phi \cos \theta i + \sin \theta \sin \theta j + \sin \phi \cos \theta k \\ g^3 &= -\frac{1}{r_z} (\sin \theta i - \cos \theta j) \end{aligned} \quad (18)$$

변형 전의 계량텐서(metric tensor)의 공변성분(covariant component)  $g_{ij}$ 는 다음과 같이 기저 벡터로 표현된다.

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j \quad (19)$$

어떤 직교 좌표계(orthogonal coordinate system)에 대해서

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (20)$$

$$g^{ii} = g_{ii}^{-1} \quad (\text{여기서 } i \text{는 합을 의미하지 않음}) \quad (21)$$

이며, 여기서  $g_{ij}$ 는 변형 전의 계량 텐서의 반변 성분(contravariant component)이다. 식 (19)~(21)로부터 영이 아닌 계량텐서의 공변성분은

$$g_{11} = \rho_z^2, g_{22} = 1, g_{33} = r_z^2 \quad (22)$$

이며, 영이 아닌 계량텐서의 반변성분은

$$g^{11} = \frac{1}{\rho_z^2}, g^{22} = 1, g^{33} = \frac{1}{r_z^2} \quad (23)$$

이다. 계량 텐서의 다른 모든 성분은 영이 된다.

제 2종 크리스토펬 기호(Christoffel symbol of the second kind)  $\Gamma_{ij}^k$ 는

$$\Gamma_{ij}^k = g_{i,j} \cdot g^k \quad (24)$$

이다. 식 (14), (18), (24)을 이용해서 영이 아닌 제 2종 크리스토펬 기호는

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{\rho_z}, \Gamma_{33}^1 = \frac{r_z}{\rho_z} \cos \phi, \Gamma_{33}^2 = -r \sin \phi, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{\rho_z}{r_z} \cos \phi, \Gamma_{23}^3 = \frac{-\sin \phi}{r_z} \end{aligned} \quad (25)$$

이며, 식 (25)는 대칭성분  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ 을 갖는다.

응력, 변형률, 변위의 실성분을 각각  $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, u_i$ 으로 표현하면, 그 실성분은 텐서성분과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\sigma_{ij} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \tau^{ij} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g^{jj}} \tau_j^i \quad (26)$$

$$\epsilon_{ij} = \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{jj}} \gamma_{ij} \quad (27)$$

$$u_i = \sqrt{g_{ii}} v^i = \sqrt{g^{ii}} v_i \quad (28)$$

여기서  $\tau^{ij}$ 과  $\tau_j^i$ 는 변형 후의 응력 텐서의 반변성분과 혼합성분(mixed component)을 나타내며,  $\gamma_{ij}$ 는 변형률 텐서의 공변성분이며,  $v_i$ 와  $v^i$ 는 변위벡터  $v$ 의 공변성분과

반변성분을 나타낸다. 실성분은 항상 하첨자를 가진 양으로 표현된다. 예를 들면 데카르트 좌표계에서  $\sigma_{xy}, \varepsilon_{xy}, u_x$  등이다.

식 (22), (23), (26)을 이용해서, 응력텐서의 반변성분  $\tau^{ij}$ 과 혼합성분  $\tau^i_j$ 의 실제 응력성분  $\sigma_{ij}$ 와의 관계식을 구하면,

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= \frac{\sigma_{\phi\phi}}{\rho_z^2}, \quad \tau^{22} = \sigma_{zz}, \quad \tau^{33} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r_z^2}, \quad \tau^{12} = \frac{\sigma_{\phi z}}{\rho_z}, \\ \tau^{13} &= \frac{\sigma_{\phi\theta}}{\rho_z r_z}, \quad \tau^{23} = \frac{\sigma_{z\theta}}{r_z} \end{aligned} \quad (29)$$

이고

$$\begin{aligned} \tau_1^3 &= \frac{\rho_z}{r_z} \sigma_{\theta\phi}, \quad \tau_2^3 = \frac{\sigma_{\phi z}}{r_z}, \quad \tau_3^3 = \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_1^2 &= \rho_z \sigma_{z\phi}, \quad \tau_2^2 = \sigma_{zz}, \quad \tau_3^2 = r_z \sigma_{z\theta} \\ \tau_1^1 &= \frac{\rho_z}{r_z} \sigma_{\theta\phi}, \quad \tau_2^1 = \frac{\sigma_{\phi z}}{r_z}, \quad \tau_3^1 = \sigma_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (30)$$

이다. 여기서 주의할 점은 반변성분은 대칭성분( $\tau^{ij} = \tau^{ji}$ )을 가지지만, 혼합성분은 반변성분과 달리 대칭성분을 갖지 않는다( $\tau^i_j \neq \tau^j_i$ ).

이와 유사하게, 식 (23)과 (27)로부터  $\gamma_{ij}$ 과  $\varepsilon_{ij}$ 의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \rho_z^2 \varepsilon_{\phi\phi}, \quad \gamma_{22} = \varepsilon_{zz}, \quad \gamma_{33} = r_z^2 \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \gamma_{12} = \rho_z \varepsilon_{\phi z}, \\ \gamma_{13} &= \rho_z r_z \varepsilon_{\phi\theta}, \quad \gamma_{23} = r_z \varepsilon_{z\theta} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 변형률 텐서의 공변성분은 대칭성분을 갖는다( $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ ).

또한 식 (22), (23), (28)을 이용해서 변위벡터의 공변성분  $u_\phi, u_z, u_\theta$ 를 실(實) 변위성분  $u_\phi, u_z, u_\theta$ 로 표현하면

$$v_1 = \rho_z u_\phi, \quad v_2 = u_z, \quad v_3 = r_z u_\theta \quad (32)$$

이며, 반변성분  $v^i$ 은 실성분과 다음의 관계식을 갖는다.

$$v^1 = \frac{u_\phi}{\rho_z}, \quad v^2 = u_z, \quad v^3 = \frac{u_\theta}{r_z} \quad (33)$$

선형 탄성적 재료에 대한 구성방정식 또는 응력-변형률 관계식을 텐서 형태로 나타내면,

$$\tau^{ij} = (\lambda g^{ij} g^{lm} + G g^{ij} g^{lm} + G g^{im} g^{jl}) \gamma_{lm} \quad (34)$$

이다. 여기서  $\lambda$ 과  $G$ 는 라메의 상수이다. 이 상수는 등방

성 재료에 대해서 탄성 계수( $E$ )와 프와송 비( $\nu$ )와의 관계식은

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (35)$$

이며,  $\nu$ 의 범위는 0에서 0.5이다. 식 (35)를 이용하면 무차원 상수  $\lambda/G$ 는 프와송 비( $\nu$ )만으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{\lambda}{G} = \frac{2\nu}{1-2\nu} \quad (36)$$

식 (23), (29), (31), (34)를 이용해서 실성분으로 표현된 구성방정식을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_{\phi\phi}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_{\theta\theta} \\ \sigma_{\phi z} &= 2G\varepsilon_{\phi z}, \quad \sigma_{\phi\theta} = 2G\varepsilon_{\phi\theta}, \quad \sigma_{z\theta} = 2G\varepsilon_{z\theta} \end{aligned}$$

여기서  $\varepsilon$ 는 체적 변형률로서

$$\varepsilon = \varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta} \quad (38)$$

이다.

선형 탄성 이론에서 변형률-변위 관계식 (또는 운동학적 관계식)을 텐서 형태로 표현하면,

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (v_i|_j + v_j|_i) \quad (39)$$

이다. 여기서 수직선( $|$ )은 뒤이은 좌표에 대해서 공변미분(covariant differentiation)을 의미 한다. 식 (39)에 있는 공변 변형률 텐서는 대칭이다.  $v_i|_j$ 와  $v_j|_i$  같은 공변도함수(covariant derivatives) 또한 텐서이며, 제 2종 크리스토펬 기호를 이용해서 상도함수(ordinary derivative)로 전환될 수 있다. 예를 들면,  $v_j|_i$ 는

$$v_j|_i = v_{i,j} - v_k \Gamma_{ij}^k \quad (40)$$

이다. 식 (25), (32), (39), (40)을 이용해서 실성분으로 이루어진 변형률-변위 관계식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{\rho_z} (u_{\phi,\phi} + u_z), \quad \varepsilon_{zz} = u_{z,z}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r_z} (u_{\theta,\theta} + u_\phi \cos\phi + u_z \sin\phi) \\ \varepsilon_{\phi z} &= \frac{1}{2} \left[ u_{\phi,z} - \frac{1}{\rho_z} (u_\phi - u_{z,\phi}) \right], \quad \varepsilon_{\phi\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_z} (u_{\phi,\theta} - u_\theta \cos\phi) + \frac{u_{\theta,\phi}}{\rho_z} \right], \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_z} (u_{z,\theta} - u_\theta \sin\phi) + u_{\theta,z} \right]. \end{aligned}$$

직선 운동 방정식을 텐서 형태로 표현하면,

$$\tau_{ij}^{\ddot{}} + f_j = \rho \ddot{v}_j, \quad (42a)$$

또는

$$\tau_{ij}^{\prime} + f_j = \rho \dot{v}_j, \quad (42b)$$

이며, 물체력에 의한 우력이 없다면 회전 운동 방정식은 응력텐서의 대칭성을 다음 식과 같이 보여준다.

$$\tau^{ij} = \tau^{ji} \quad (43)$$

여기서 수직선 ( | )은 공변미분을 의미하며,  $f_j$ 와  $f_j^{\prime}$ 는 단위 체적당 물체력 벡터(body force vector per unit volume)  $f$ 의 공변성분과 반변성분을 나타낸다.  $\rho$ 는 단위 체적당 질량 밀도이고,  $\dot{v}_j$ 와  $\ddot{v}_j$ 는 변형 후 체적의 가속도의 공변성분과 반변성분을 나타낸다.

2차 텐서의 공변 도함수 또한 텐서이고 다음과 같이 주어 진다.

$$\begin{aligned} A_{ij}|_r &= A_{ij,r} - \Gamma_{ir}^m A_{mj} - \Gamma_{jr}^m A_{im} \\ A_j^i|_r &= A_{j,r}^i + \Gamma_{rm}^i A_j^m - \Gamma_{jr}^m A_m^i \\ A^{ij}|_r &= A^{ij,r} + \Gamma_{rm}^i A^{mj} + \Gamma_{jm}^i A^{im} \end{aligned} \quad (44)$$

여기서  $A_{ij}$ ,  $A_j^i$ ,  $A^{ij}$ 는 각각 임의의 2차 텐서의 공변, 반변, 혼합성분을 나타낸다. 식 (42)와 (44)를 이용하면,

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{\ddot{}} + \Gamma_{ir}^j \tau^{ir} + \Gamma_{jr}^i \tau^{ij} + f_j &= \rho \ddot{v}_j \\ \tau_{j,i}^i - \Gamma_{ij}^r \tau_r^i + \Gamma_{ir}^j \tau_j^i + f_j &= \rho \dot{v}_j \end{aligned} \quad (45)$$

이다.

식 (22), (23), (28)을 이용하면서, 식 (25)와 (29)를 식 (45)에 대입하면, 실성분으로 표현된 운동 방정식이 유도된다.  $\rho_2(\phi, z) \equiv \rho_1(\phi) + z$ 이고  $r_2(\phi, z) \equiv [r_2(\phi) + z] \sin \phi$ 이므로  $\rho_{z,z} = 1$ 이고 이다. 이런 사실을 이용하면,

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi,z} + \frac{1}{r_z} [(\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}) \cos \phi + \sigma_{\phi\theta,\theta} + \sigma_{\phi z} \sin \phi] + \frac{1}{\rho_z} (\sigma_{\phi\phi,\phi} + 2\sigma_{\phi z}) \\ - \frac{2\sigma_{\phi\theta}\rho_{1,\phi}}{\rho_z^2} + f_\phi = \rho \ddot{u}_\phi \end{aligned} \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z,z} + \frac{1}{r_z} [(\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}) \sin \phi + \sigma_{z,\theta,\theta} + \sigma_{\phi z} \cos \phi] + \frac{1}{\rho_z} (\sigma_{\phi z,\phi} + \sigma_{zz} - \sigma_{\phi\phi}) \\ - \frac{\sigma_{\phi z}\rho_{1,\phi}}{\rho_z^2} + f_z = \rho \ddot{u}_z \end{aligned} \quad (46b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z,\theta,z} + \frac{1}{r_z} (3\sigma_{\phi\theta} \cos \phi + 2\sigma_{z,\theta} \sin \phi + \sigma_{\theta\theta,\theta}) + \frac{1}{\rho_z} \left( \sigma_{z\theta} + \sigma_{\phi\theta,\phi} - \frac{\sigma_{\phi\theta}r_{z,\phi}}{r_z} \right) \\ - \frac{\sigma_{\theta\theta}\rho_{1,\phi}}{\rho_z^2} + f_\theta = \rho \ddot{u}_\theta \end{aligned} \quad (46c)$$

을 얻을 수 있다. 여기서  $\rho_1$ 는 자오면(meridional plane)에서 중앙면의 곡률 반경이다(Fig. 1 참조).

#### 4. 변위 운동 방정식 (Displacement Equations of Motion)

텐서 형태로 표현된, 식 (34)의 구성(응력-변형률) 관계식, 식 (39)의 운동학적(변형률-변위) 관계식, 식 (42)와 (43)의 직선과 회전 운동 방정식들로 이루어진 장방정식을 이용하면, 변위로 표현된 텐서 형태의 운동 지배 방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$Gv^i|_i + (\lambda + G)v^j|_j + f^i = \rho \ddot{v}^i \quad (47a)$$

벡터로 이 방정식을 표현하면,

$$GV^2v + (\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot v) + f = \rho \ddot{v} \quad (47b)$$

이며, 여기서  $\nabla$ 는 델 연산자(del operator)이다.

위의 지배 운동 방정식 (47)의 해를 구하기 위해서는 경계조건과 초기조건이 요구된다. 경계조건에는 보통 2가지가 존재하는데, 변위가 상술된 기하학적 또는 필수경계조건(geometrical or essential boundary condition)과 응력벡터(traction vector)가 상술된 자연 경계조건(natural boundary condition)이 있다. 또는 위 두 가지 경계조건이 어떤 경계점에서는 혼합된 형태로 주어 주기도 한다.

실성분으로 표현된 장방정식 (37), (41), (46)이 결합되면 임의의 곡률과 변 두께를 갖는 두꺼운 축 대칭 회전 셀의 변위 운동 방정식이 유도된다. 균질한 재료에 대해서, 3개의 변위 성분으로 표현된 3개의 6계 편미분방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \lambda \left\{ \frac{1}{\rho_z} \left[ u_{z,\phi} - \frac{1}{r_z} ((u_{z,\phi} - u_\phi) \sin \phi + u_{\theta,\phi\theta}) \right. \right. \\ \left. \left. + (u_{\phi,\phi} + u_z) \cos \phi \right] \frac{r_{z,\phi}}{r_z^2} (u_z \sin \phi - u_\phi \cos \phi + u_{\theta,\theta}) \right\} \\ + \frac{1}{\rho_z^2} \left\{ u_{z,\phi} + u_{\phi,\phi} - 2\rho_{1,\phi} \left( u_{z,z} + \frac{1}{r_z} (u_z \sin \phi - u_\phi \cos \phi + u_{\theta,\theta}) \right) \right\} \\ - 3 \frac{\rho_{1,\phi}}{\rho_z^3} (u_{\phi,\phi} + u_z) + G \left[ u_{\phi,z} + \frac{u_{\phi,z}}{r_z} \sin \phi - \frac{1}{r_z^2} (2u_z \sin \phi \right. \\ \left. + 2u_\phi \cos \phi + 3u_{\theta,\theta}) \cos \phi - u_{\theta,\phi\theta} \right] + \frac{1}{\rho_z} \left\{ u_{z,\phi} + u_{\phi,z} + \frac{1}{r_z} (u_{\theta,\phi\theta} + 2(u_{\phi,\phi} \right. \\ \left. + u_z) \cos \phi + (u_{z,\phi} - u_\phi) \sin \phi) \right\} + \frac{1}{\rho_z^2} (3u_{z,\phi} - u_\phi + 2u_{\phi,\phi}) - 6 \frac{\rho_{1,\phi}}{\rho_z^3} (u_{\phi,\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + u_z) + f_\phi = \rho \ddot{u}_\phi \\
 (1+G) & \left[ u_{z,z} + \frac{1}{r_z} (u_{\theta,z\theta} + u_{\phi,z}) - \frac{1}{\rho_z^2} (u_{\phi,\phi} + u_z) \right] \\
 C & \left[ u_{z,z} + \frac{u_{z,z}}{r_z} \sin \phi + \frac{1}{r_z^2} (u_{z,\theta\theta} - (u_z \sin \phi + u_\theta \cos \phi) (u_z \sin \phi + 2u_{\theta,\theta})) \right. \\
 & \left. \sin \phi \frac{1}{\rho_z} \left( u_{z,z} + \frac{1}{r_z} - (u_{z,\phi} - u_\theta) \cos \phi \right) - \frac{1}{\rho_z^2} (2u_{\theta,\phi} + u_z + \rho_{1,\phi} u_{\theta,z} - u_{z,\phi\phi}) \right. \\
 & \left. - 2 \frac{\rho_{1,\phi}}{\rho_z^2} (u_{z,\phi} - u_\theta) \right] + f_z = \rho \ddot{u}_z \\
 (1+G) & \left[ \frac{u_{z,z\theta}}{r_z} + \frac{1}{r_z^2} (u_{\theta,\theta\theta} + u_{\phi,\theta} \cos \phi + u_{z,\theta} \sin \phi) + \frac{1}{r_z \rho_z} (u_{\phi,\phi\theta} \right. \\
 & \left. + u_{z,\theta}) \right] + G \left[ u_{\phi,z} + \sin \phi + \frac{1}{r_z^2} (u_{\theta,\theta\theta} + 4u_{\phi,\theta} \cos \phi - 3u_\theta + (2u_\theta \sin \phi \right. \\
 & \left. + 5u_{z,\phi} - 3u_{z,\theta}) \sin \phi) \right] + \frac{1}{\rho_z} \left[ u_{\theta,z} + 2 \frac{u_{\theta,\phi}}{r_z} \cos \phi + 2 \frac{u_{z,\phi}}{r_z} (u_\theta \cos \phi - u_{\phi,\theta}) \right] \\
 & \left. + \frac{1}{\rho_z^2} \left[ u_{\theta,\phi\phi} + \frac{1}{r_z} ((u_\theta \cos \phi - u_\phi) \rho_\phi - r_{z,\phi} u_{\theta,\phi}) \rho_\phi - r_{z,\phi} u_{\theta,\phi} \right] \right] + f_\theta = \rho \ddot{u}_\theta \quad (48)
 \end{aligned}$$

메이플(Maple)이라는 기호 논리 컴퓨터 프로그램을 이용하여 식 (48)의 정확성이 검증되었다.

일정한 또는 변두계를 갖는 원통형 쉘 또는 원추형 쉘을 제외하고는 식 (48)의 엄밀해를 구하는 것은 불가능하다. 텐서 형태로 된 지배 운동 방정식 (47a)에서 물체력을 무시한 후 실제 변위를 이 식에 직접 대입해도 식 (48)은 유도된다. 그러나 이러한 유도와 관련된 대수학은 위의 유도과정에 비해 훨씬 복잡하다.

### 5. 에너지 범함수(Energy Functionals)

적절한 경계조건이 주어지더라도 변위 운동 방정식 (48)은 많은 변계수  $1/r_z, 1/\rho_z, 1/r_z \rho_z$ 로 인해 일반적으로 엄밀해를 구할 수 없다. 이 때 에너지의 관점에서 문제를 접근할 수 있다. 이 장에서는  $\phi, z, \theta$ 가 증가하는 방향으로 양의 변위 성분을 갖는  $u_z, u_\theta, u_\phi$ 로(Fig. 2 참조) 변형률 에너지  $V$ 와 운동 에너지( $T$ )가 유도된다. 선형 탄성적으로 변형이 이루어지는 동안 쉘에 축적되는 변형률 에너지( $V$ )는

$$V = \int_{\Omega} W d\Omega \quad (49)$$

이다. 여기서  $W$ 는 변형률 에너지 밀도 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$w = \frac{1}{2} \tau^{ij} \gamma_{ij} \quad (50)$$

그리고는 물체의 무한소 체적을 나타내며,

$$d\Omega = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \sqrt{g} d\phi dz d\theta \quad (51)$$

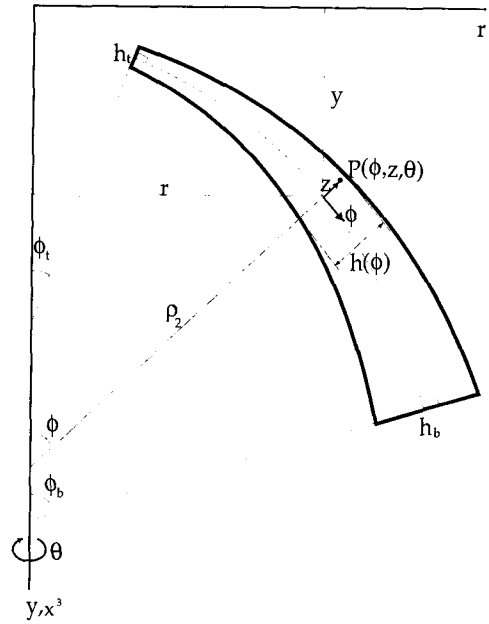


Fig. 2 Cross-section of an arbitrary shell of revolution with variable thickness in the meridional direction  $\phi$  and positive Gaussian curvature, and the curvilinear coordinate system  $(\phi, z, \theta)$

이다. 여기서  $g$ 는 직교 좌표계에 대해

$$g \equiv g_{11} g_{22} g_{33} \quad (52)$$

이다. 식 (22), (29), (31), (49)~(52)을 이용하면, 응력과 변형률의 실성분  $\sigma_{ij}$ 와  $\epsilon_{ij}$ 으로 변형률 에너지( $V$ )를 표현하면,

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} & (\sigma_{\phi\phi} \epsilon_{\phi\phi} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{z\phi} \epsilon_{z\phi} \\
 & + 2\sigma_{\theta\phi} \epsilon_{\theta\phi} + 2\sigma_{z\theta} \epsilon_{z\theta}) \rho_z r_z d\phi dz d\theta \quad (53)
 \end{aligned}$$

이다. 여기서 반지름  $\rho_z$ 와  $r_z$ 는 식 (15)와 (11)에서 이미 정의되었다. 식 (37), (38), (41)을 식 (53)에 대입하면 실변위 성분  $u_\phi, u_z, u_\theta$ 으로 변형률 에너지( $V$ )가 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} & [\lambda(x_1 + x_2 + x_3)^2 + G(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
 & + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)] \rho_z r_z d\phi dz d\theta \quad (54)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 x_1 & \equiv \frac{u_\phi \cos \phi + u_z \sin \phi + u_{\theta,\theta}}{r_z}, \quad x_2 \equiv \frac{u_z + u_{\theta,\theta}}{\rho_z} \\
 x_3 & \equiv u_{z,z}, \quad x_4 \equiv \frac{u_\phi - u_{\phi,z}}{\rho_z}, \quad x_5 \equiv \frac{u_\theta - u_{z,\phi}}{\rho_z} - u_{\phi,z},
 \end{aligned}$$



$$x_5 \equiv \frac{u_{z,\theta} - u_\theta \sin \phi}{\rho_z} + u_{\theta,z}$$

$$x_6 \equiv \frac{u_{\phi,\theta} - u_\theta \cos \phi}{\rho_z} + \frac{u_{\theta,\phi}}{\rho_z} \quad (55)$$

이다.

운동 에너지 ( $T$ )는

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{u}_\phi^2 + \dot{u}_z^2 + \dot{u}_\theta^2) \rho_z r_z d\phi dz d\theta \quad (56)$$

이다. 여기서  $\rho$ 는 당위 체적 당 질량 밀도이며, 닷트(.)는 시간 도함수를 의미한다.

## 6. 결 론

텐서 해석을 이용해서, 임의의 곡률을 가지며 자오선 방향( $\phi$ )으로 두께가 변하는 선형 탄성적이며 등방성 재료로 이루어진 두꺼운 축 대칭 회전 쉘의 거동을 결정하는 완전하고 일관된 삼차원적 장방정식이 유도되었다.

균질한 재료에 대해서, 변위 성분으로 표현된 육계의 운동 미분방정식도 유도되었다. 이러한 식들은 엄밀해를 구하는데 사용될 수 있으며, 갤러킨 방법 또는 유한차분법을 사용하는 근사해석에도 유용하다.

또한 이 논문에서 유도된 에너지 범함수는 두꺼운 축 대칭 회전 쉘의 자유진동의 문제를 리츠 방법(69)으로 풀 때 사용될 수 있으며, 유한요소법의 전개에도 사용될 수 있다. 수 많은 해석적 또는 수치적 방법들 중에서, 리츠 방법은 그 방법이 갖는 단순성과 진동수의 상위 경계 수렴성(upper bound convergence)때문에 자유진동을 해석할 때 많은 연구자들이 선호하는 방법이다. 뿐만 아니라 리츠 방법은 정역학적 문제와 강제진동의 문제에서도 매우 잘 적용된다. 게다가 에너지 범함수, 식 (54)와 (56)은 균질 재료 뿐만 아니라 이질재료로 된 쉘에도 사용될 수 있다. 이질재료에서는  $\lambda, G, \rho$ 는  $\phi, z, \theta$ 의 함수이다.

또한 이 논문에서 유도된 장방정식과 나비에의 방정식(Navier's equation)은 완전히 닫힌 회전 쉘( $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ ) 뿐만 아니라, 쉘 축( $r=0$ )에 대해서 母面(generating area)을  $360^\circ$ 미만으로 회전시킨 열린 회전 쉘( $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ )에도 적용될 수 있다.

유도된 식을 적용한 특정 쉘모델에 대한 정적 혹은 동적 문제의 해석은 지면상 여기서 생략하고 차후에 발표될 기회가 있으리라 믿는다.

## 참 고 문 헌

(1) Novozhilov, V. V., 1959, "The Theory of Thin

Shells," P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands.

(2) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., 1959,

"Theory of Plates and Shells," McGraw-Hill, New York.

(3) Tsui, Edward Y. W., 1968, "Stresses in Shells of Revolution," Pacific Coast Publishers.

(4) Flügge, W., 1973, "Stresses in Shells," 2nd ed., Springer-Verlag.

(5) Leissa, A. W., 1971, Vibration of Shells, U. S. Government Printing Office; reprinted by The Acoustical Society of America in 1993.

(6) Sokolnikoff, I. S., 1964, "Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua," 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc.

(7) Fung, Y. C., 1965, "Foundations of Solid Mechanics," Prentice-Hall, Inc.

(8) Green, A. E. and Zerna, W., 1968, "Theoretical Elasticity," 2nd ed., Oxford.

(9) Flügge, W., 1972, "Tensor Analysis and Continuum Mechanics," Springer-Verlag.

(10) Washizu, K., 1975, "Variational Methods in Elasticity and Plasticity," Pergamon Press.

(11) Renton, J. D., 1987, "Applied Elasticity : Matrix and Tensor Analysis of Elastic Continua," Ellis Horwood Limited.

(12) Aksentian, O. K. and Selezneva, T. N., 1976, "Determination of Frequencies of Natural Vibrations of Circular Plates," PMM J. Appl. Math. Mech., Vol. 40, pp. 96~103.

(13) Iyengar, K. T. S. R. and Raman, P. V., 1978, "Free Vibration of Circular Plates of Arbitrary Thickness," J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 64, pp. 1088~1092.

(14) Celep, Z., 1978, "On the Axially Symmetric Vibration of Thick Circular Plates," Ing. Arch., Vol. 47, pp. 411~420.

(15) Celep, Z., 1980, "Free Vibration of Some Circular Plates of Arbitrary Thickness," J. Sound Vib., Vol. 70, pp. 379~388.

(16) Hutchinson, J. R., 1979, "Axisymmetric Flexural Vibrations of a Thick Free Circular Plate," J. Appl. Mech., Vol. 46, pp. 139~144.

(17) Komissarova, G. L., 1979, "Vibrations of a Rigidly Clamped Circular Plate," Soviet Appl. Mech., Vol. 14, pp. 735~739.

(18) Gupta, A. P. and Mishra, N., 1980, "Effect of

Secondary Terms on Axisymmetric Vibration of Circular Plates," J. Engr. Math., Vol. 14, pp. 101~106.

19) So, J. and Leissa, A. W., 1998, "Three-Dimensional Vibrations of Thick Circular and Annular Plates," J. Sound Vib., Vol. 209, pp. 15~41.

20) Kang, J.-H. and Leissa, A. W., 1998, "Three-dimensional Vibrations of Thick, Linearly Tapered, Annular Plates," J. Sound Vib., Vol. 217, pp. 927~944.

21) Pochhammer, L., 1876, "Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder," Z. Math., Vol. 81, pp. 324.

22) Chree, C., 1886, "Longitudinal Waves of a Solid Bar," Quart. J. Math., Vol. 21, p. 287.

23) Chree, C., 1889, "The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Coordinates, Their Solutions and Application," Trans. Cambridge Philos. Soc. Math. Phys. Sci., Vol. 14, pp. 250~269.

24) Pickett, G., 1945, "vibration of Unrestrained Cylinders and Disks," J. Appl. Phys., Vol. 16, pp. 820~831.

25) Greenspan, J. E., 1957, "Flexural Vibrations of a Thick-walled Circular Cylinder According to the Exact Theory of Elasticity," Journal of the Aero/Space Sciences, Vol. 27, pp. 1365~1373.

26) Gazis, D. C., 1959, "Three Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders," I. Analytical foundation, J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 31, pp. 568~573.

27) Gazis, D. C., 1959, "Three Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders," II. Numerical results, J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 31, pp. 574~578.

28) McNiven, H. D. and Perry, D. C., 1962, "Axially Symmetric Waves in Finite, Elastic Rods," J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 34, pp. 433~437.

29) McMahon, G. W., 1964, "Experimental Study of the Vibrations of Solid, Isotropic, Elastic Cylinders," J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 36, pp. 85~92.

30) McMahon, G. W., 1970, "Finite Difference Analysis of the Vibrations of Solid Cylinders," J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 48, pp. 307~312.

31) McNiven, H. D., Shah, A. H., and Sackman, J. L., 1966, "Axially Symmetric Waves in Hollow, Elastic Rods: Part I, J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 40, pp. 784~791.

32) McNiven, H. D. and Shah, A. H., 1967, "The

Influence of the End Mode on the Resonant Frequencies of Finite, Hollow, Elastic Rods," J. Sound Vib., Vol. 6, pp. 8~19.

33) Armenakas, A. E., Gazis, D. C., and Herrmann, G., 1969, "Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells, Pergamon Press," New York.

34) Rumerman, M. and Raynor, S., 1971, "Natural Frequencies of Finite Circular Cylinders in Axially Symmetric Longitudinal Vibration," J. Sound Vib., Vol. 15, pp. 529~543.

35) Endo, M., 1972, "Flexural Vibrations of a Ring with Arbitrary Cross Section," Bull. JSME, Vol. 15, pp. 446~454.

36) Gladwell, G. M. L. and Tahbildar, U. C., 1972, "Finite Element Analysis of the Axisymmetric Vibrations of Cylinders," J. Sound Vib., Vol. 22, pp. 143~157.

37) Hutchinson, J. R., 1972, "Axisymmetric Vibrations of a Free Finite Length rod," J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 51, pp. 233~240.

38) Hutchinson, J. R., 1980, "Vibrations of Solid Cylinders," J. Appl. Mech., Vol. 47, pp. 901~907.

39) Gladwell, G. M. L. and Vijay, D. K., 1975, "Natural Frequencies of Free Finite Length Circular Cylinders," J. Sound Vib. Vol. 42, pp. 387~397.

40) Girgis, R. S. and Verma, S. P., 1981, "Method for Accurate Determination of Resonant Frequencies and Vibration Behaviour of Stators of Electrical Machines," IEE Proc. B. Electr. Power Appl., Vol. 128, pp. 1~11.

41) Grigorenko, A. Ya., Bepalova, E. I., and Kilina, T. N., 1984, "Analysis of the Frequency Characteristics of Laminated Cylindrical Shells on the Basis of Different Theories," Prikl. Mekh., Vol. 20, pp. 52~53.

42) Hutchinson, J. R. and El-Azhari, 1986, "Vibrations of Free Hollow Circular Cylinders," J. Appl. Mech., Vol. 53, pp. 641~646.

43) Wong, K. C., Datta, S. K., and Shah, A. H., 1986, "Three-dimensional Motion of Buried Pipelines, I: Analysis," J. Eng. Mech., Vol. 112, pp. 1319~1337.

44) Kilina, T. N., 1988, "Effect of the Location of the Layers on the Free Vibrations of Shell Elements," Prikl. Mekh., Vol. 24, pp. 120~122.

45) Singal, R. K. and Williams, K., 1988, "A Theoretical and Experimental Study of Vibrations of Thick Circular Cylindrical Shells and Rings," Journal of

Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 110, pp. 533~537.

(46) Hamidzadeh, H. R. and Sawaya, N. N., 1995, "Free Vibration of Thick Multilayer Cylinders," Shock Vib., Vol. 2, pp. 393~401.

(47) Leissa, A. W. and So, J., 1995, "Comparisons of Vibration Frequencies for Rods and Beams from One-dimensional and Three-dimensional Analyses," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 98, pp. 2122~2135.

(48) Leissa, A. W. and So, J., 1995, "Accurate Vibration Frequencies of Circular Cylinders from Three-dimensional Analysis," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 98, pp. 2136~2141.

(49) Liew, K. M., Hung, K. C., and Lim, M. K., 1995, "Vibration of Stress-free Hollow Cylinders of Arbitrary Cross Section," J. Appl. Mech., Vol. 62, pp. 718~724.

(50) So, J. and Leissa, A. W., 1995, "Free Vibrations of Thick Hollow Circular Cylinders from Three-dimensional Analysis," Journal of Vibrations and Acoustics, Vol. 119, pp. 89~95.

(51) Wang, H. and Williams, K., 1996, "Vibrational Modes of Thick Cylinders of Finite Length," J. Sound Vib., Vol. 191, pp. 955~971.

(52) Kang, J.-H. and Leissa, A. W., 1999, "Three-dimensional Vibrations of Hollow Cones and Cylinders with Linear Thickness Variations," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 106, pp. 748~755.

(53) Leissa, A. W. and So, J., 1995, "Three-dimensional Vibrations of Truncated Hollow Cones," Journal of Vibration and Control, Vol. 1, pp. 145~158.

(54) Kang, J.-H. and Leissa, A. W., 2000, "Three-dimensional Vibrations of Thick, Circular Rings with Isosceles Trapezoidal and Triangular Cross-section," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 122, pp. 132~139.

(55) Poisson, S. D., 1829, "Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps lastiques, Mémoires de l'Académie des Sciences," Paris, p. 8.

(56) Jaerisch, P., 1880, Journal of Mathematics (Crelle), Bd. 88.

(57) Lamb, H., 1882, Proceedings, London Mathematical Society, Vol. 13, pp. 189~212.

(58) Lamb, H., 1883, Proceedings, London Mathematical Society, Vol. 14, pp. 50~56.

(59) Sâto, Y. and Usami, T., 1962, Basic Study on

the Oscillation of a Homogeneous Elastic Sphere," Part II. Distribution of displacement, Geophysics Magazine, Vol. 31, pp. 25~47.

(60) Shah, A. H., Ramkrishnan, C. V., and Datta, S. K., 1969, "Three Dimensional and Shell Theory Analysis of elastic waves in a hollow sphere-Part I. Analytical Foundation," J. Appl. Mech., Vol. 36, pp. 431~439.

(61) Shah, A. H., Ramkrishnan, C. V., and Datta, S. K., 1969, "Three Dimensional and Shell Theory Analysis of Elastic Waves in a Hollow Sphere-Part II. Numerical results," J. Appl. Mech., Vol. 36, pp. 440~444.

(62) Cohen, H. and Shah, A. H., 1972, "Free Vibrations of a Spherically Isotropic Hollow Sphere," Acustica, Vol. 26, pp. 329~340.

(63) Grigorenko, Y. M. and Kilina, T. N., 1990, "Analysis of the Frequencies and Modes of Natural Vibration of Laminated Hollow Sphere in two- and Three-dimensional Formulations," Soviet Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 1165~1171.

(64) Gautham, B. P. and Ganesan, N., 1992, "Free Vibration Analysis of Thick Spherical Shells," Computers & Structures, Vol. 45, pp. 307~313.

(65) Chang, Y.-C. and Demkowicz, L., 1995, "Vibrations of a Spherical Shell : Comparison of 3D Elasticity and Kirchhoff Shell Theory," Comp. Assisted Mech. Eng. Sci., Vol. 2, pp. 187~206.

(66) Ding, H. and Chen, W., 1996, "Nonaxisymmetric Free Vibrations of a Spherically Isotropic Spherical Shell Embedded in an Elastic Medium," Int. J. Solids Struct., Vol. 33, pp. 2575~2590.

(67) Jiang, H., Young, P. G., and Dickinson, S. M., 1996, "Natural Frequencies of Vibration of Layered Hollow Spheres using Exact Three-dimensional Elasticity Equations," J. Sound Vib., Vol. 195, pp. 155~162.

(68) Kang, J.-H. and Leissa, A. W., 2000, "Three-dimensional Vibrations of Thick Spherical Shell Segments with Variable Thickness," Int. J. Solids Struct., Vol. 37, pp. 4811~4823.

(69) Ritz, W., 1908, "Über Eine Neue Methode zur Lösung Gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.