

〈논 문〉

# 임계속도 이력현상에 의한 철도차량 횡방향 이상 진동에 영향을 미치는 인자들에 관한 연구

## A Study on the Factors Influencing the Abnormal Vibration of the Lateral Direction in Railway Vehicles Caused by Hysteresis of Critical Speed

정우진\* · 심재경\*\* · 조동현\*

Woo-Jin Chung, Jae-Kyung Shim and Dong-Hyun Cho

(2000년 10월 26일 접수 ; 2001년 3월 12일 심사완료)

**Key Words** : Bifurcation(분기), Critical Speed(임계속도), Test Rig(주행시험대), Self Steering Bogie(자기조향 대차), Penetration(간섭현상), Hysteresis(이력현상)

### ABSTRACT

This research has been performed to reveal the hysteresis phenomena of the hunting motion in a railway passenger cars. It is found that there are some factors and its operation region to make the nonlinear critical speed reacts to them more sensitively than the linear critical speed. The simulation results show that a self steering bogie system can be a substitute proposal to improve curving performance together with the reduction of hysteresis of critical speed. Full scale roller rig test is carried out for the validation of the numerical results. Finally, it is certified that wear of wheel profile and stiffness discontinuities of wheelset suspension caused by deterioration have to be considered in the analysis to predict the hysteresis of critical speed precisely.

### 1. 서 론

철도차량의 횡방향 안전성은 일정한 주행속도 대역 이상에서 사행동(hunting motion)을 일으키며 급격하게 악화된다. 이때의 속도를 임계속도라 한다. Klingel, W<sup>(1)</sup>는 차량의 사행동이 차륜(wheel)의 궤적(profile)에서 기인하는 운동학적 성질임을 밝힌 바 있다. 비예측적으로 발생하는 사행동은 과도 진동을 유발시키고 이는 차량의 탈선사고로 이어져 승객들의 안전을 위협할 수 있으므로 이를 정확하게 예측하기 위한 많은 연구들이 진행되어오고 있다.<sup>(2)</sup>

실제 차량의 사행동은 동일한 속도에서 항상 시작되는 것이 아니며 일정한 속도 범위 안에서 불규칙적으로 발생한다는 것이 실험과 경험을 통해 보고되고 있다. 그러나 지금까지 수행된 대부분의 임계속도 관련연구들은 고유치 해석에 기반을 두고있어 임계속도를 하나의 속도로 예측하

므로 이런 이력현상을 설명할 수 없었다. Tetsuji Hirotsu<sup>(3)</sup> 등은 이런 해석과 실험결과의 차이가 철도차량이 가지고 있는 비선형성에 기인함을 밝힌 바 있다. 최근, Huigol<sup>(4)</sup>, Moelle 그리고 Gasch<sup>(5,6)</sup> 등이 기존해석의 한계를 극복하고자 분기이론을 처음 철도차량 동특성 해석에 적용하였다. Hans True 그리고 Knudsen<sup>(7,8)</sup> 등은 제한된 분기해석을 통해 차량에 복수의 임계속도가 존재할 수 있고 외부 충격이나 자체 주행 에너지의 증가를 통해 임계속도간 천이(transition)가 일어난다는 것을 해석적으로 증명하였다. 이들은 기존의 고유치 해석으로 얻어진 임계속도와 분기해석으로 구하여진 이것 이외의 임계속도들을 구별하기 위해 비선형 임계속도를 새로이 정의하였다. 그러나 복잡한 해석모델의 경우 분기해석에 많은 시간이 소요되었고 시스템의 흡입점(attractor)들을 모두 구하는 것이 불가능했으므로 이들은 해석대상을 차축(wheelset)이나 대차(bogie)와 같은 단순한 모델로 제한하였다. 또한 creep 작용 메커니즘을 제외한 차량 비선형성을 대부분 해석에 고려하지 않음으로서 실제적인 예측치를 제시할 수 없었다. 이에 정우진과 김성원<sup>(9)</sup>은 비선형 관계식들을 2점 경계치

\*정회원, 한국철도기술연구원

TEL : (031) 461-8531(226), Fax : (031) 461-8374

\*\*정회원, 고려대학교 기계공학과

문제로 해석하는 알고리즘을 적용하여 다 자유도계로 이루어진 복잡한 전체 차량모델의 분기해석이 가능함을 보였다.

본 연구에서는 기존의 연구에서 간과되었던 비선형 요소들과 사행동의 상관관계를 검토하여 임계속도 이력현상에 의한 이상진동이 보다 현실적으로 예측될 수 있는 방법을 제안하고자 한다. 설계변수에 대한 민감도 해석이 수행되었으며 수치해석 예제를 통해 곡선 추종성 향상을 목적으로 고안된 비대칭 현가요소 배치기법 및 차량 노후화가 이력현상에 미치는 영향 등이 검토되었다. 마지막으로 주행 시험대를 이용한 실차 실험결과를 기준으로 비선형 요소가 고려된 해석결과와 그렇지 않은 해석결과 사이의 정확도를 비교하였다.

## 2. 철도차량 모델링

### 2.1 기호설명

- $A, B$  : 접촉면 장, 단축 반경
- $V$  : 차량 주행속도
- $c$  : 차량 회전속도
- $\xi_x, \xi_y, \xi_{sp}$  : 접촉면 각방향 크리퍼지
- $F_x, F_y$  : 접촉면 각방향 크립력
- $M_z$  : 접촉면 각방향 모멘트
- $f_{ij}$  : 크립계수
- $C_{ij}$  : 크리퍼지 계수
- $R$  : 접촉 차륜반경
- $G_w, G_R$  : 차륜, 레일의 전단계수
- $\gamma$  : 차륜 conicity
- $\sigma$  : Poisson 비
- $M_c, M_F, M_w$  : 차체, 대차, 차축 질량
- $I_c, I_b$  : 차체, 볼스터 회전관성 모멘트
- $K_p, K_s$  : 1차, 2차 스프링 상수
- $C_p, C_s$  : 1차, 2차 댐퍼 감쇠계수
- $2a$  : 좌, 우측 접촉점간 거리
- $2b$  : 차축간 거리
- $2b_p, 2b_s$  : 1차, 2차 현가장치간 거리
- $2L_s$  : 대차간 거리
- $2L_w, 2L_T$  : 차륜, 레일형상 중심선간 거리
- $h_c, h_w, h_r$  : 차체, 차축, 레일 무게중심고
- $\mu$  : 차륜, 레일간 마찰계수
- $T_c$  : 차체 볼스터간 회전마찰 토크
- $y_w, y_f, y_c$  : 차축, 대차, 차체 횡방향 변위
- $\phi, \psi$  : 차축 롤(roll), 요(yaw) 변위

- $\psi_w, \psi_f, \psi_c$  : 차축, 대차, 차체 요 변위
- $\phi_{TO}$  : 캔트각(cant angle)
- $u, r$  : 차축 좌표계에서 접촉점까지 횡, 수직방향 변위
- $v, \rho$  : 레일 좌표계에서 접촉점까지 횡, 수직방향 변위
- $e, n$  : 차축, 레일 좌표계 단위 벡터

### 2.2 차륜, 레일 접촉모델

차축의 변위가 크지않을 경우 접촉점은 차륜의 답면(tread)에 위치하게되며 1개의 접촉점을 가진다. 이 때의 접촉점은 차륜과 레일을 강체로 가정하고 두 형상의 교점을 계산하여 찾을 수 있다. 반면 차축의 운동 변위가 차륜의 플렌지(flange)와 레일(rail)이 접촉할 정도로 커지면 차륜 답면과 함께 플렌지면에 접촉점이 생성되는 2중 접촉이 발생하게 된다.

Fig. 1과 같이 플렌지 접촉은 차륜과 레일의 형상이 서로 교차되는 간섭현상을 동반하며 이것은 더 이상 강체 모델로는 설명될 수 없다. 기존의 연구에서 플렌지 접촉은 강한 강성을 가지는 횡방향 스프링을 해석모델에 추가함으로써 설명되었지만 접촉면에서의 반력 이외의 작용력들은 동특성 해석에 고려될 수 없는 단점을 가지고 있었다.<sup>(10)</sup> 본 연구에서는 2중 접촉시 간섭현상에 의하여 플렌지면에 발생하는 복잡한 작용력들을 동특성 해석에 고려하여 좀더 정확한 결과를 얻고자 Fig. 2와 같은 좌표계를 사용하였다. 간섭부위의 상대변위를 알면 Hertz 접촉이론이 적용되어 creep력을 포함한 플렌지 접촉점에서의 모든 작용력들을 구할 수 있으므로 다음의 과정에 따라 간섭부위의 상대 변위를 구하였다. 지면 좌표계와 차축 좌표계는 식 (1)과 같은 관계를 가지고 있으며 지면 좌표계와 레일 좌

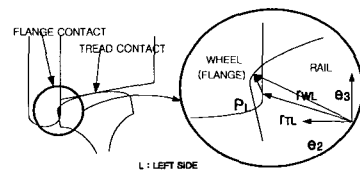


Fig. 1 Flange contact

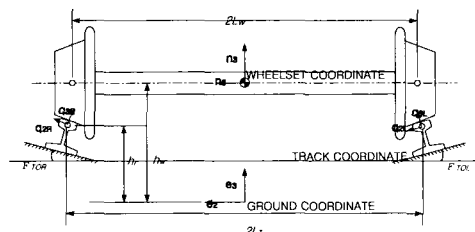


Fig. 2 Coordinate system

표계 사이의 변환행렬은 식 (2)와 같다.

$$T_{ne} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\cos \phi \sin \Psi & \cos \phi \cos \Psi & \sin \phi \\ \sin \phi \sin \phi & -\sin \phi \cos \Psi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$T_{qe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi_{TO} & \sin \Phi_{TO} \\ 0 & -\sin \Phi_{TO} & \cos \Phi_{TO} \end{bmatrix} \quad (2)$$

차축 무게중심에서 접촉점까지의 위치벡터는 식 (3)과 같이 표시될 수 있다.

$$r_{ow} = [o \ L_w + u - r] \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

지면 좌표계로부터 접촉점까지의 위치벡터를 식 (1)을 사용하여 지면 좌표계로 정리하면 식 (4)와 같이 표시될 수 있다.

$$r_w = [x \ y \ z + h_w] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + T_{ne} \cdot r_{ow} \quad (4)$$

역시 지면 좌표계에서 레일 접촉점까지의 위치벡터를 식 (2)를 사용하여 지면 좌표계로 정리하면 식 (5)와 같다.

$$r_t = [o \ L_T \ h_r] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + [0 \ v \ \rho] \cdot T_{qe} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

다라서 플렌지 접촉으로 간섭현상이 발생하였을 때 차륜과 레일의 상대 변위벡터  $P$  식 (6)과 같이 정리될 수 있다.

$$P = r_w - r_t = [P_1 \ P_2 \ P_3] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

간섭부위에서의 수직력은 상대변위와 식 (7)과 같은 관계가 갖는다.<sup>(11)</sup>

$$N_i = \left( \frac{P_i}{P_1} \right)^{3/2}, \quad i = \text{left, right} \quad (7)$$

여기서  $P_1$ 은 1 N이 작용할 때의 간섭변위다.

### 2.3 Creep 모델

차륜과 레일은 탄성체이므로 두 물체는 타원형의 접촉을 가지며 그 모양과 크기는 Hertz의 식에 의하여 구해진다. 차량 진행속도  $V$ 와 차륜 회전속도  $c$ 간의 차이는 두 물체 간에 변형을 불일치를 유발시키게되어 접촉면에는 Fig. 1과 같이 크립력이 작용한다. 접촉면은 차륜과 레일이 같은 속도로 움직이는 점착 영역(adhesion area)과 점착력이 한계 이하로 미끄러짐이 일어나는 미끄러짐 영역(slip

area)으로 나누어진다. 비선형적 형태로 분포하는 접촉면의 전단응력을 적분하면 creep력이 구해진다. Creep력은 식 (9)~(11)의 식들을 사용하여 식 (8)과 같이 근사화될 수 있다.<sup>(12)</sup>

$$\begin{aligned} F_x &= -f_{33} \xi_x \\ F_y &= -f_{11} \xi_y - f_{12} \xi_{sp} \\ M_z &= -f_{12} \xi_y - f_{22} \xi_{sp} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (9)는 접촉면에서 차륜 회전속도와 차량 진행속도간의 무차원 상대속도 개념으로 정의된 길이방향, 횡방향 그리고 회전방향 creepage이다.

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{|V| - |c|}{V} \\ \xi_y &= \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \xi_{sp} &= \frac{R \sin \gamma}{|c| \gamma} = \frac{R \sin \gamma}{V \gamma} \\ f_{11} &= (AB) GC_{22}, \quad f_{12} = (AB)^{3/2} GC_{23} \\ f_{22} &= (AB)^2 GC_{33}, \quad f_{33} = (AB) GC_{11} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서  $C_{ij}$ 는 접촉면적과 Poisson비에 의하여 결정되는 상수이다.

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_w} + \frac{1}{G_R} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\sigma}{G} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_w}{G_w} + \frac{\sigma_R}{G_R} \right)$$

### 2.4 차량 모델

객차를 대상으로 한 해석모델은 차체, 대차, 차륜 그리고 1차 및 2차 현가장치로 이루어진다. 사용된 물성치들은 Table 1에 정리되었다. 차량의 수직과 횡방향 운동은 비연

Table 1 Parameters(P.M) of the analysis model

P.M	Value	P.M	Value	P.M	Value
$M_c$	39,200 kg	$K_{px}$	1.0 MN/m	$a$	0.75 m
$M_f$	2,500 kg	$K_{sx}$	4.60 MN/m	$b_p$	0.978 m
$M_w$	1,800 kg	$K_{sy}$	0.16 MN/m	$b_s$	1.255 m
$I_{cx}$	68,280 kgm <sup>2</sup>	$K_{sz}$	1.65 MN/m	$b$	1.2 m
$I_{cy}$	1,394 kgm <sup>2</sup>	$C_{px}$	12 kNs/m	$L_s$	8.5 m
$I_{cz}$	20 kgm <sup>2</sup>	$C_{py}$	45 kNs/m	$h_c$	1.5 m
$I_{fx}$	3,000 kgm <sup>2</sup>	$C_{pz}$	10 kNs/m	$\mu$	0.25
$I_{wz}$	130 kgm <sup>2</sup>	$C_{sx}$	10 kNs/m	$T$	12 kNm
$K_{px}$	4.50 MN/m	$C_{sy}$	88 kNs/m	$R_0$	0.4575 m
$K_{py}$	4.50 MN/m	$C_{sz}$			

성되었다고 가정되며 해석에서는 차량의 횡방향 운동만 고려한다. 비선형 미분 방정식들로 구성된 운동방정식은 총 17자유도를 가진다.

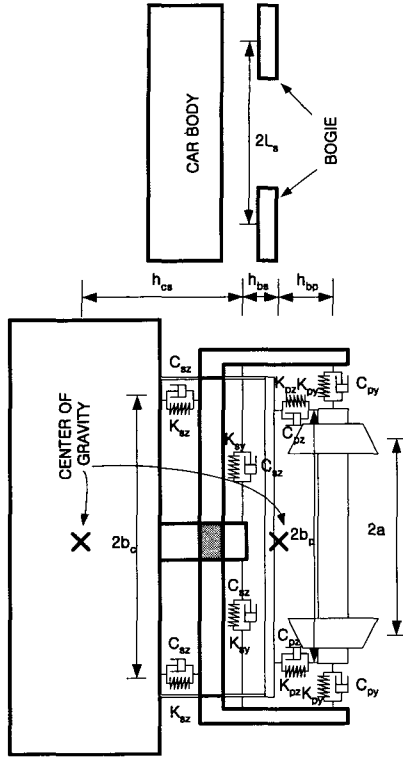


Fig. 3 Front and side view of analysis model

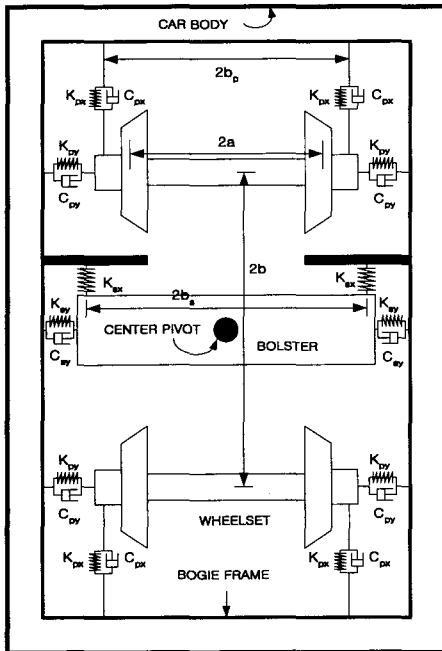


Fig. 4 Plan view of analysis model

$$M_{\omega} \ddot{y}_{\omega 1} = 2K_{py}(y_{f1} + b\psi_{f1} - y_{\omega 1}) + 2C_{py}(\dot{y}_{f1} + b\dot{\psi}_{f1} - \dot{y}_{\omega 1}) + F_{y1} \quad (12)$$

$$M_{\omega} \ddot{y}_{\omega 2} = 2K_{py}(y_{f1} - b\psi_{f1} - y_{\omega 2}) + 2C_{py}(\dot{y}_{f1} - b\dot{\psi}_{f1} - \dot{y}_{\omega 2}) + F_{y2} \quad (13)$$

$$M_{\omega} \ddot{y}_{\omega 3} = 2K_{py}(y_{f2} + b\psi_{f2} - y_{\omega 3}) + 2C_{py}(\dot{y}_{f2} + b\dot{\psi}_{f2} - \dot{y}_{\omega 3}) + F_{y3} \quad (14)$$

$$M_{\omega} \ddot{y}_{\omega 4} = 2K_{py}(y_{f2} - b\psi_{f2} - y_{\omega 4}) + 2C_{py}(\dot{y}_{f2} - b\dot{\psi}_{f2} - \dot{y}_{\omega 4}) + F_{y4} \quad (15)$$

$$I_{\omega z} \ddot{\psi}_{\omega 1} = 2b_p^2(K_{px}(\psi_{f1} - \psi_{\omega 1}) + C_{px}(\dot{\psi}_{f1} - \dot{\psi}_{\omega 1})) + M_{y\omega 1} \quad (16)$$

$$I_{\omega z} \ddot{\psi}_{\omega 2} = 2b_p^2(K_{px}(\psi_{f1} - \psi_{\omega 2}) + C_{px}(\dot{\psi}_{f1} - \dot{\psi}_{\omega 2})) + M_{y\omega 2} \quad (17)$$

$$I_{\omega z} \ddot{\psi}_{\omega 3} = 2b_p^2(K_{px}(\psi_{f2} - \psi_{\omega 3}) + C_{px}(\dot{\psi}_{f2} - \dot{\psi}_{\omega 3})) + M_{y\omega 3} \quad (18)$$

$$I_{\omega z} \ddot{\psi}_{\omega 4} = 2b_p^2(K_{px}(\psi_{f2} - \psi_{\omega 4}) + C_{px}(\dot{\psi}_{f2} - \dot{\psi}_{\omega 4})) + M_{y\omega 4} \quad (19)$$

$$M_f \ddot{y}_{f1} = 2K_{sy}(y_c + L_s\psi_c + h_c\theta_c - y_{f1}) + 2C_{sy}(\dot{y}_c + L_s\dot{\psi}_c + h_c\dot{\theta}_c - \dot{y}_{f1}) - 2K_{py}(2y_{f1} - y_{\omega 1} - y_{\omega 2}) - 2C_{py}(2\dot{y}_{f1} - \dot{y}_{\omega 1} - \dot{y}_{\omega 2}) \quad (20)$$

$$M_f \ddot{y}_{f2} = 2K_{sy}(y_c + L_s\psi_c + h_c\theta_c - y_{f2}) + 2C_{sy}(\dot{y}_c + L_s\dot{\psi}_c + h_c\dot{\theta}_c - \dot{y}_{f2}) - 2K_{py}(2y_{f2} - y_{\omega 3} - y_{\omega 4}) - 2C_{py}(2\dot{y}_{f2} - \dot{y}_{\omega 3} - \dot{y}_{\omega 4}) \quad (21)$$

$$I_{\tilde{r}} \ddot{\psi}_{f1} = 2b_p^2 K_{px}(\psi_{\omega 1} + \psi_{\omega 2} - 2\psi_{f1}) + 2b_p^2 C_{px}(\dot{\psi}_{\omega 1} + \dot{\psi}_{\omega 2} - 2\dot{\psi}_{f1}) + 2b_s^2 K_{sx}(\psi_{b1} - \psi_{f1}) + 2b_s^2 C_{sx}(\dot{\psi}_{b1} - \dot{\psi}_{f1}) + 2bK_{py}(-2b\psi_{f1} - y_{\omega 2} + y_{\omega 1}) + 2bC_{py}(-2b\dot{\psi}_{f1} - \dot{y}_{\omega 2} + \dot{y}_{\omega 1}) \quad (22)$$

$$I_{\tilde{r}} \ddot{\psi}_{f2} = 2b_p^2 K_{px}(\psi_{\omega 3} + \psi_{\omega 4} - 2\psi_{f2}) + 2b_p^2 C_{px}(\dot{\psi}_{\omega 3} + \dot{\psi}_{\omega 4} - 2\dot{\psi}_{f2}) + 2b_s^2 K_{sx}(\psi_{b2} - \psi_{f2}) + 2b_s^2 C_{sx}(\dot{\psi}_{b2} - \dot{\psi}_{f2}) + 2bK_{py}(-2b\psi_{f2} - y_{\omega 3} + y_{\omega 4}) + 2bC_{py}(-2b\dot{\psi}_{f2} - \dot{y}_{\omega 3} + \dot{y}_{\omega 4}) \quad (23)$$

$$I_{b2} \ddot{\psi}_{b1} = T_{c1} \text{sgn}(\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_{b1}) + 2b_s^2 K_{sx}(\psi_{f1} - \psi_{b1}) + 2b_s^2 C_{sx}(\dot{\psi}_{f1} - \dot{\psi}_{b1}) \quad (24)$$

$$I_{b2} \ddot{\psi}_{b2} = T_{c2} \text{sgn}(\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_{b2}) + 2b_s^2 K_{sx}(\psi_{f2} - \psi_{b2}) + 2b_s^2 C_{sx}(\dot{\psi}_{f2} - \dot{\psi}_{b2}) \quad (25)$$

$$M_c \ddot{y}_c = -K_{sy}(4y_c + 4h_c\theta_c - 2y_{f1} - 2y_{f2}) - C_{sy}(4\dot{y}_c + 4h_c\dot{\theta}_c - 2\dot{y}_{f1} - 2\dot{y}_{f2}) \quad (26)$$

$$I_{cx} \ddot{\theta}_c = b_s(-4b_s K_{sz}\theta_c - 4b_s C_{sz}\dot{\theta}_c) - h_c(K_{sy}(4y_c + 4h_c\theta_c - 2y_{f1} - 2y_{f2}) + C_{sy}(4\dot{y}_c + 4h_c\dot{\theta}_c - 2\dot{y}_{f1} - 2\dot{y}_{f2})) \quad (27)$$

$$I_{cz} \ddot{\psi}_c = T_{c1} \text{sgn}(\dot{\psi}_{b1} - \dot{\psi}_c) + T_{c2} \text{sgn}(\dot{\psi}_{b2} - \dot{\psi}_c) + L_s(K_{sy}(-4L_s\psi_c - 2y_{f2} + 2y_{f1}) + C_{sy}(-4L_s\dot{\psi}_c - 2\dot{y}_{f2} + 2\dot{y}_{f1})) \quad (28)$$

### 3. 안정성 해석

#### 3.1 Hope 분기점 예측

차량 운동방정식들에 대한 상태공간 표현은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, V) = J(V)x \quad (29)$$

여기서 시스템 상태변수는  $x \in R^{34}$ 이고  $V$ 는 주행속도이다. Jacobian 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$J(V) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{x=0} \quad i, j = 1, \dots, 34 \quad (30)$$

궤형점에서의 차량 안정성은 Jacobian 행렬의 고유치 변화에 의하여 결정된다. 일반적으로 낮은 속도대역에서 식 (30)의 고유치는 모두 음(-)의 실근을 가지며 점근적 안정하지만 주행속도가 증가하여 일정한 속도를 넘어서면 고유치 중 한 쌍의 켈레근이 허수축을 넘어 양(+)의 실근을 가지면서 시스템에 Hope 분기가 발생하게 된다. 이 분기는 시스템이 안정 평형상태에서 주기해를 가지는 불안정상태로 변함을 의미한다. 이때의 분기발생 속도를 선형 임계속도라고 정의한다.

Hope 분기 발생은 다음의 방법들을 통해 예측될 수 있다. Jacobian 행렬의 특성 방정식은 식 (31)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda^n + a_1(V)\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}(V)\lambda + a_n(V) = 0 \quad (31)$$

Hurwitz의 행렬은 식 (31)의 계수를 사용하여 다음과 같이 구성되어질 수 있다.

$$A_i = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2i-1} & a_{2i-2} & a_{2i-3} & a_{2i-4} & \dots & a_i \end{bmatrix} \quad i=1,2,\dots,n \quad (32)$$

여기서  $a_i = i > n$

식 (31)이 한쌍의 켈레 허수근을 가지고 나머지 고유치가 음의 실근을 가지려면 식 (33)을 만족하여야 한다. 이때의 켈레 허수근은 식 (34)를 통해 구해질 수 있다.

$$\Delta_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \Delta_{n-1} = 0, a_n > 0 \quad (33)$$

$$\omega^2 = \frac{\Delta_{n-3}}{\Delta_{n-2}} a_n \quad (34)$$

모든 Jacobian 행렬의 고유치가 음의 실근을 가지는  $V = V_0$ 가 존재하고 또한 식 (35)와 (36)을 만족한다면 이때의 주행속도  $V_c$ 에서 Hope 분기가 시작된다고 볼 수 있다.

$$V_c = \min_V \{ V - V_0 \mid \Delta_{n-1}(V) = 0 \} \quad (35)$$

$$\Delta_{n-3}(V_c) > 0 \quad (36)$$

### 3.2 주기해 해석

주기해는 매개변수인 주행속도를 따라 복잡한 형태로 존

재할 수 있으며 그 위치와 안정성을 판별하기가 어렵다. 기존의 연구에서 주기해 해석은 매 단계마다 임의의 초기치를 정의하고 해가 수렴해가는 흡입점을 찾는 brute-force 방법으로 수행되었다. 그러나 해의 안정성 판별에 이 방법은 많은 시간이 필요하였고 시스템의 모든 주기해 위치를 파악하는 것이 불가능하였다. 본 연구에서는 복잡한 해석모델에서도 주기해의 구조와 그 안정성을 효율적으로 구하기 위해 shooting 방법을 적용하였다. 주기해는 Hope 분기로부터 시작되며 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$x(t) = x(t+T) \quad (37)$$

$t = T\tau$ 로 정의된 새로운 변수를 도입하여 식 (37)을 식 (29)에 적용하면 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\frac{dx}{d\tau} = T f(x, V), \quad x \Big|_{\tau=0} = x \Big|_{\tau=1} \quad (38)$$

초기조건을 가정한 후 식 (38)을 한 단계 적분하면  $x_{\tau=1} = G(x, T, V)$ 이 된다. 경계조건에 의하여 이 식은 식 (39)를 만족하여야 한다.

$$H(x, T, V) = x \Big|_{\tau=1} - x \Big|_{\tau=0} = G(x, T, V) - x \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (39)$$

Newton Raphson 방법에 의하여 위 식이 만족될 때까지 미수들은 반복 계산되어지고 이 후 다음 단계로 진행된다. 주기해의 안정성은 Floquet 정리에 의하여 구해질 수 있다. 먼저 주기해를 식 (40)과 같이 외란  $y(t)$ 를 포함하는 2개의 항으로 나누어 정의한다.

$$x(t) = X_0(t) + y(t) \quad (40)$$

식 (40)을 식 (29)에 대입하고  $X_0(t)$ 에 대하여 전개하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dy}{dt} \approx A(t) y \quad (41)$$

여기서  $A$ 는  $f$ 의 1차 편미분 행렬이다. 위 식을 만족하고  $n$ 개의 독립해로 구성되는 기본행렬을 정의하면 다음과 같다.

$$\dot{Y} = A(t)Y \quad (42)$$

여기서  $Y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_n(t)]$ 이다.  $\tau = t + T$ 로 놓으면 식 (43)과 같이 정리될 수 있다.

$$\frac{dY}{d\tau} = A(\tau - T)Y = A(\tau)Y \quad (43)$$

$y_i(t)$ 는 선형 독립해이므로  $y_i(t+T)$ 도 선형 독립해가

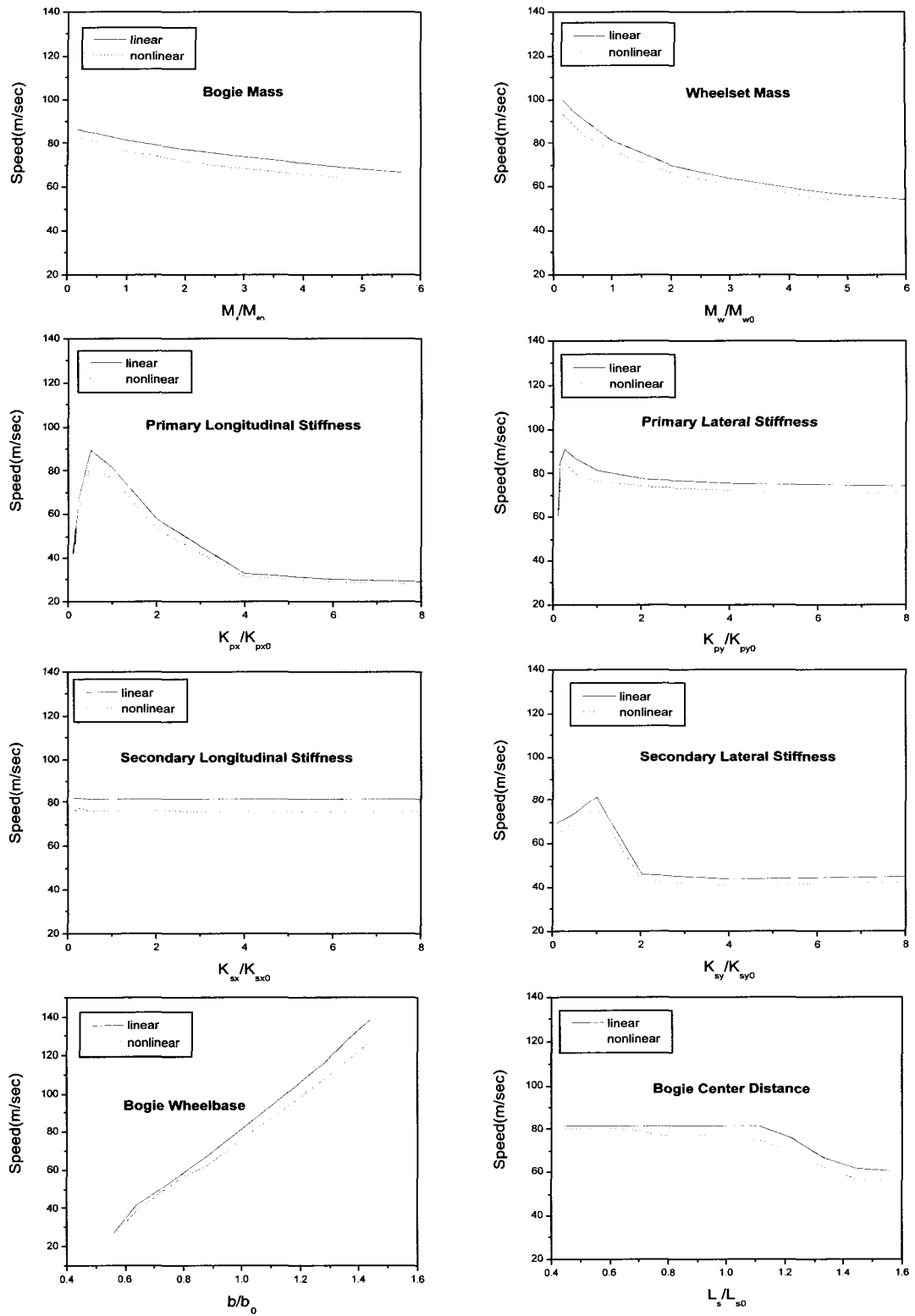


Fig. 4 Critical speeds versus design parameters

되며 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$Y(t+T) = Y(t)\Phi \quad (44)$$

여기서  $\Phi$ 는  $n \times n$  상수 행렬이다. 이 행렬은  $t=0$ 일 때  $R^n$ 상의 초기벡터를  $t=T$ 일 때의  $R^n$ 상의 벡터로 변환시켜주는 역할을 한다.

초기치를  $Y(0) = I\phi$  놓으면 식 (45)와 같아진다. 여기서  $I$ 는 단위 행렬이다.

$$\Phi = Y(T) \quad (45)$$

여기서  $\Phi$ 는 monodromy 행렬이다. Monodromy 행렬은  $n$ 개의 고유치를 가지며 이것을 Floquet 상수라고 한다. 만약 주기해가 안정해라면 상수들은 모두 복소 평면상 단위원내에 놓인다. 안정 주기해가 불안정 주기해로 바뀌는 분기가 발생된다면 Floquet 상수들은 단위원을 벗어나게 되고, 단위원을 벗어나는 형태에 따라 분기는 3종류로 구분된다. 고유치가 +1 방향으로 벗어나면 시스템에는 cyclic-fold 분기가 발생되고 -1 방향으로 진행되면 periodic-doubling 분기가 발생된다. 마지막으로 1쌍의 켤레 복소수 근이 단위원을 동시에 벗어나면 시스템에는 Neimark 분기가 발생된다.

#### 4. 비선형 요소들의 영향

임계속도는 상용 주행속도보다 높은 대역에 존재하는 것이 일반적이다. 실제, 신간선의 경우 운행속도 대역은 300 km/h 대인 것에 반하여 사행동은 약 600 km/h 대에서 발생하는 것으로 보고되고 있다. 사행동 속도가 운행속도보다 높게 설정되어 있다는 것은 곧 곡선 추종성이 필요이상으로 희생된다는 것을 의미한다. 따라서 차량의 임계속도를 가능한 낮추어 곡선 추종성을 향상시킴으로서 전체적인 운행효율을 향상시키는 것이 최근의 추세이다.

차량의 사행동 현상은 매우 비 예측적이고 많은 변수들의 영향을 받으므로 이를 조절하기 위해서는 차량의 비선형적 요소들의 영향을 고려한 정밀한 해석이 선행되어야 할 것이다. 본 장에서는 차량의 설계변수 변화와 비선형 특성들이 선형 및 비선형 임계속도에 미치는 영향을 검토하기 위하여 차량의 이력현상이 가장 영향을 많이 받는 부분이 무엇인지에 대하여 검토하였다.

##### 4.1 설계 변수

차량의 임계속도는 여러 가지 설계변수들에 영향을 받는다. 기존의 연구 등을 통해 선형 임계속도가 현가장치의 강성, 대차 중심간 거리 등과는 비례적으로 그리고 차륜담면, 질량 등과는 반비례적인 관계를 가지는 것으로 알려져

있다. 본 연구에서는 이에 대응하는 비선형 임계속도의 변화를 확인하기 위하여 대차간, 차축간 거리 그리고 질량 및 현가장치의 강성 등을 변화시키며 그 변화를 검토하였다. Fig. 4는 해석결과를 보여준다. 이 결과를 통해 차축과 대차의 질량 및 2차 현가장치의 변화가 임계속도 이력현상 변화에 거의 영향을 미치지 못한 반면 차축과 대차간 거리 그리고 1차 현가장치의 변화는 이력현상과 민감하게 연관되어 있음을 알 수 있다. 특히 현가장치의 변화는 이력현상과 민감하게 연관되어 있음을 알 수 있다. 특히 현가장치의 강성이 작아질수록 이력현상이 줄어드는 공통된 경향이 있음을 알 수 있다.

##### 4.2 현가장치 불연속성

Fig. 5의 왼쪽 그림은 철도차량의 1차 현가장치 시스템을 보여주고 있다. 고무 스프링은 축상(axle box) 스프링과 함께 차축과 대차간 횡방향 그리고 길이방향 강성을 결정하는 현가요소이다. 마모판 열화 및 고정판의 노후화로 고무 스프링과 외부 실린더 사이에 간극(clearance)이 발생되면 간극 이내의 변위를 가지는 운동에서 1차 현가장치의 강성은 축상 스프링에만 의존된다.

Fig. 5의 오른쪽 그림은 운동 변위에 따른 작용력  $F_r$ ,

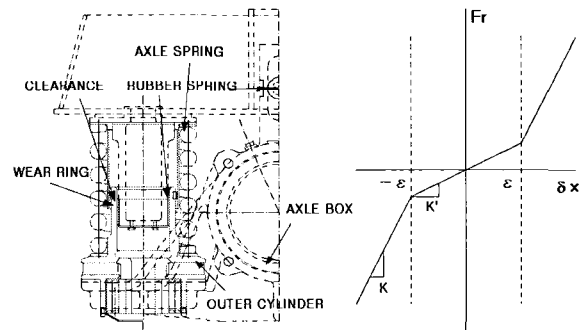


Fig. 5 Axle box suspension system

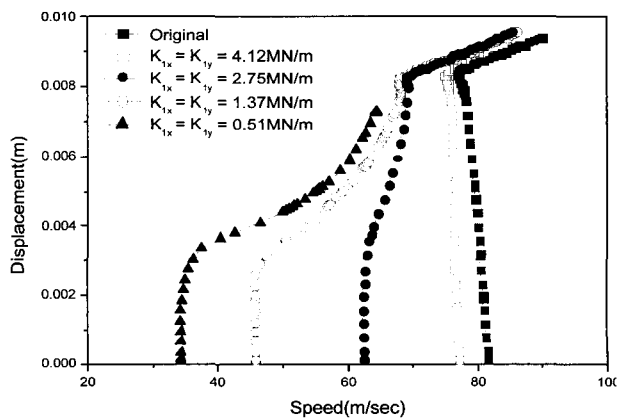


Fig. 6 Bifurcation diagram

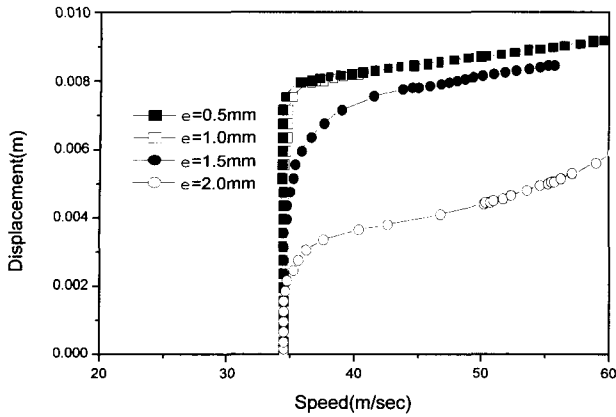


Fig. 7 Bifurcation diagram

의 변화를 나타낸 것으로서 이때의 대표적 강성변화를 보여준다. 이런 강성의 불연속은 1차 현가장치의 전체 행정에 비하여 매우 짧은 구간에 존재하므로 기존의 연구에서 대부분 무시되었거나 또는 평균 강성값이 사용되었기 때문에 해석결과에 그 효과가 정확히 반영될 수 없었다.

Fig. 6은 간극이내 구간 ( $-\epsilon < \delta x < \epsilon$ )에서 축상 스프링 강성  $K$  변화에 따른 분기선도를 도시한 것이다. 간극 범위 이상 구간 ( $|\delta x| \geq \epsilon$ )에서는 고무 스프링과 축상 스프링이 동시에 작용하므로 정상적인 강성 ( $K_{px} = K_{py} = 4.50$  MN/m)을 가질 것이다. 임계속도 이력현상은  $K$ 에 따라 민감하게 변동되었다. 노후화가 진행됨에 따라 이런 불연속성은 차량에서 항상 발생할 수 있는 것이며 실험을 통해 측정된 임계속도와 해석을 통해 예측된 임계속도가 많은 차이가 보이는 원인이 이런 종류의 비선형성에 기인한 것일 수 있음을 보여준다. 간극의 크기에 따른 이력현상 변화는 Fig. 7에 도시되었다. 여기서  $K$ 의 강성은 0.5 MN/m로 고정되었다. 해석결과를 통해 간극 크기가 선형 임계속도보다 비선형 임계속도에 더 큰 영향을 미침을 확인할 수 있다.

### 4.3 차륜 궤적

차량의 운행이 지속됨에 따라 차륜담면의 마모는 빠르게 진행된다. 차륜의 마모는 차량의 운행구간, 운행기간, 차륜 궤적의 종류 및 재질에 따라 매우 다양한 형태를 보이므로 이것이 차량에 미치는 영향을 한가지 성격으로 규정짓기는 힘들다. 본 연구에서는 차륜 마모에 의한 임계속도 이력현상을 신조차륜을 사용한 해석결과와 비교하며 대략적인 경향을 살펴보았다.

Fig. 8은 차륜의 담면이 곡선으로 이루어진 Heuman 방식 차륜에 대한 마모 영향을 도시한 것이고 Fig. 9는 차륜의 담면이 1/40인 직선 경사 궤적에 대한 마모 영향을 도시한 것이다. Heuman 방식은 곡선 추종성이 좋고 내마모

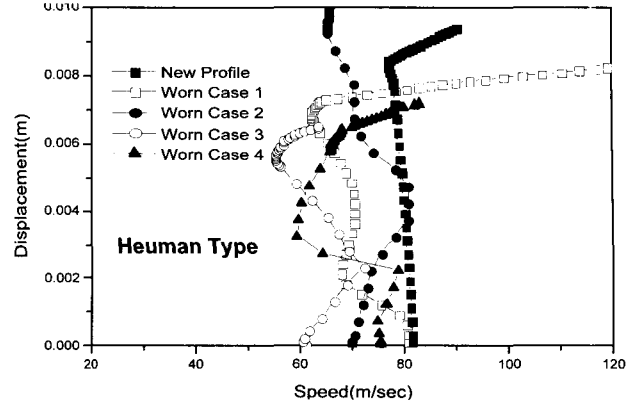


Fig. 8 Bifurcation diagram

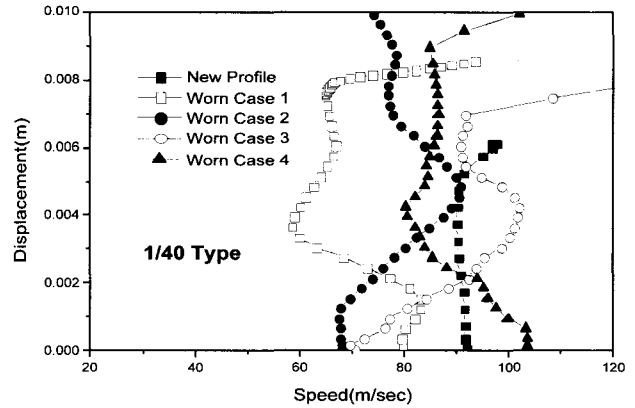


Fig. 9 Bifurcation diagram

성이 우수하여 가장 많이 사용되고 있는 궤적 형태인 반면 1/40 방식은 직선 주행성능이 상대적으로 우수한 것으로 알려져 있다. 규정 삭정(reshaping) 주기인 만 2년에 이른 차량들로부터 마모 차륜의 궤적이 수집되었다. 마모된 차륜이 사용되었을 때 임계속도는 대부분 낮아졌다. Heuman 방식보다 1/40방식의 차륜이 사용된 해석에서 임계속도의 변동폭이 더 커진 것을 볼 수 있으며 이것은 Heuman 방식의 내마모성이 상대적으로 우수하기 때문인 것으로 사료된다. 위의 결과를 통해 임계속도 이력현상이 마모에 대하여 민감하게 변동한다는 사실을 확인할 수 있었으나 일정한 경향을 보이지는 않았다.

### 4.4 비대칭 현가장치 배치(자기조향대차)

Yoshihiro Suda<sup>(14)</sup>는 차량의 곡선 추종성을 향상시키기 위하여 길이방향 전방 1차 현가장치의 강성  $K_{pxf}$ 를 길이방향 후방 1차 현가장치의 강성  $K_{pxr}$  보다 작게 하는 방법을 제안하였다. 이때 전방과 후방 길이방향 현가장치는 약 10배의 강성차이가 되도록 설계된다.

Fig. 10은 그가 제안한 차량모델 및 물성치( $K_{pxf}=1.2$  MN/m,  $K_{pxr} = 12.0$  MN/m)에서 길이방향 전방 현가장



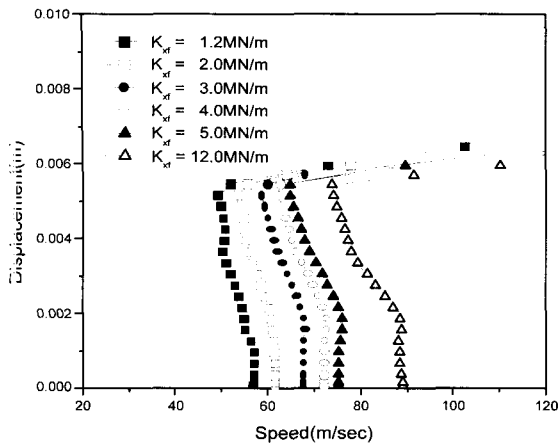


Fig. 10 Bifurcation diagram

치의 강성이 점차 증가될 때의 임계속도 변화를 도시한 것이다. 길이방향 전방 현가장치의 강성이 커질수록 임계속도는 증가하지만 이력현상 역시 동시에 증가됨을 볼 수 있다 따라서 적절한 비대칭 현가장치의 배치는 곡선 추종성 향상과 함께 임계속도 이력현상의 감소를 유도할 수 있을 것이다.

### 5. 해석결과 검증

#### 5.1 실차실험

해석결과를 검증하기 위하여 Fig. 11과 같이 차량을 주행시험대에 놓고 임계속도 측정실험을 실시하였다. Table 1의 제원을 가진 두 대의 차량이 실험에 사용되었다. 두 대의 차량 중 하나는 Heuman 방식의 곡선 차륜 궤적을 사용하고 운행년수가 15년된 매우 노후된 차량이며 다른 하나의 차량은 1/40 방식의 직선 차륜 궤적을 사용하는 운행년수가 1년이 지나지 않은 신조 차량(new car)이다. 물

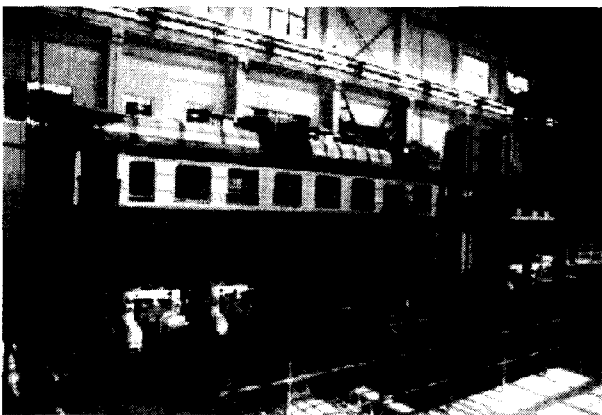


Fig. 11 Test passenger car

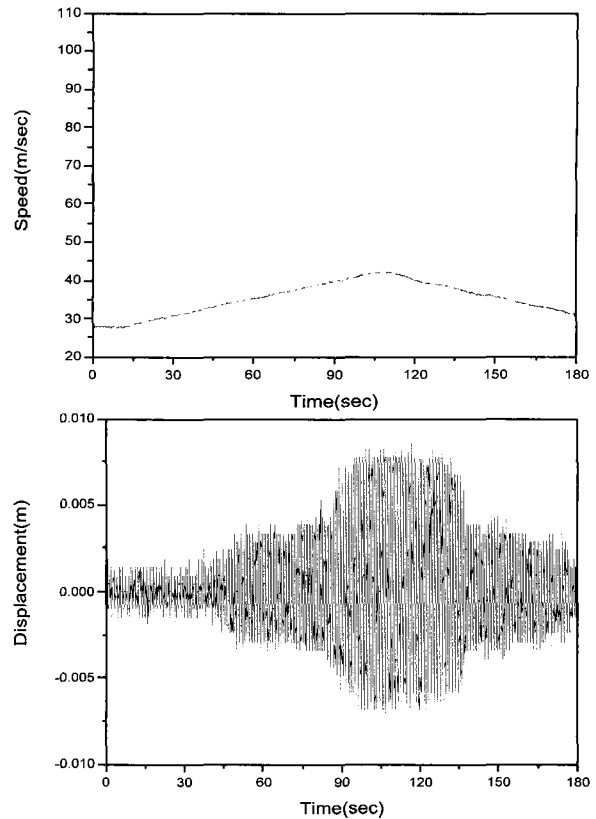


Fig. 12 Critical speed test results of the old car

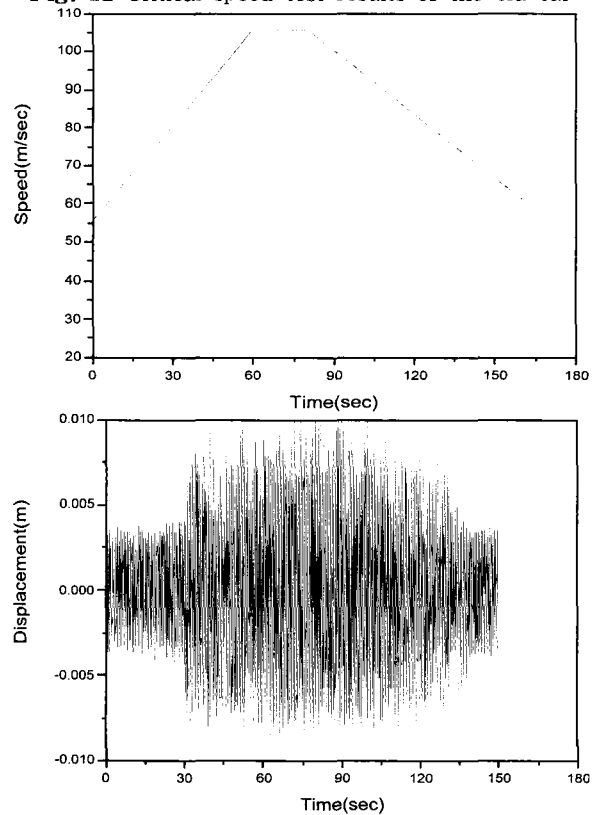


Fig. 13 Critical speed test results of the new car

성치 실험결과 노후된 차량의 1차 현가장치에 약 1.5 mm 정도의 간극을 가진 불연속부가 존재함을 확인하였다. 간극 이내에서의 강성은 약 1.25 MN/m이다. 차륜 검측기를 사용하여 두 차량의 차륜 궤적이 측정되었다.

두 차량의 임계속도 측정실험 결과는 Fig. 12와 13에 도시되었다. 왼쪽 그림은 주행 시험대의 운행 속도이고 오른쪽 그림은 대차의 횡방향 변위다. 노후차량의 선형 임계속도는 약 35 m/sec, 그리고 비선형 임계속도는 약 30 m/sec에서 발생되었다. 반면, 신조 차량은 선형 임계속도가 80.5 m/sec 그리고 비선형 임계속도가 72.2 m/sec에서 발생되었다.

5.2 실험결과 검토

실차실험 결과를 검증하기 위하여 두 차량에 대한 분기 해석을 수행하였다. 차륜 궤적 마모도와 현가장치 불연속성이 고려된 경우, 현가장치 불연속성만이 고려된 경우 그리고 두 가지 요소가 모두 고려되지 않은 경우 등 총 3 경우에 대하여 해석결과와 실차실험 결과를 비교하였다. 신조 차량의 경우 현가장치 불연속성이 없었으므로 차륜 마

모도가 고려된 경우와 그렇지 않은 경우에 대해서만 비교하였다. Fig. 14는 노후차량에 대한 해석결과를 보여준다. 모든 비선형 요소가 고려되지 않았을 때 차량의 선형 및 비선형 임계속도는 82 m/sec 그리고 비선형 임계속도는 76 m/sec로 예측되었다. 그러나 현가장치 불연속성이 고려되면 선형 임계속도는 33 m/sec로 변하고 임계속도 이력현상은 소멸된다. 이것은 첫 번째 해석결과에 비하여 임계속도 발생 대역이 실제와 근접하게 예측된 결과이나 실험에서 나타난 이력현상의 발생은 예측되지 않았다. 마지막으로 마모도를 해석에 추가로 고려하면 선형 임계속도가 37 m/sec 그리고 비선형 임계속도는 32 m/sec에서 발생되며 위 두 경우에 비하여 실험과 가장 가까운 결과를 나타낸다. Fig. 15는 신조 차량의 분기해석결과를 보여준다. 차륜의 마모가 고려되지 않았을 경우 선형 임계속도는 80 m/sec 그리고 비선형 임계속도는 53 m/sec에서 발생된다. 이 결과는 임계속도 이력현상이 실제보다 과도하게 예측된 것으로서 실험과의 연관성을 찾기 힘들다. 마모도가 해석에 추가로 고려될 경우 선형 임계속도 및 비선형 임계속도는 각각 83 m/sec와 75 m/sec로 예측되며 마모도가 고려되지 않았던 모델에 비하여 실제에 보다 근접한 결과를 얻을 수 있었다. 위의 해석결과를 통해 차량 임계속도 및 그 이력현상의 정확한 예측을 위해서는 현가장치의 불연속성과 마모도가 반드시 고려되어야 할 중요한 요소임을 알 수 있다.

6. 결론

본 연구는 철도차량의 사행동 이력현상에 영향을 주는 여러 인자들과 이로 인한 영향을 해석적으로 예측하기 위하여 수행되었으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 차축과 대차의 질량 및 2차 현가장치는 임계속도 이력현상에 거의 영향을 미치지 못하는 반면 차축과 대차 간 거리 그리고 1차 현가장치의 변화는 이력현상과 민감하게 연관되어있다. 특히 현가장치의 강성이 작아질수록 이력현상은 점차 줄어드는 경향을 보인다.
- (2) 현가장치의 노후화로 인해 발생하는 강성의 불연속이나 간극의 생성 등은 차량의 임계속도 저하에 큰 영향을 미치며 해석 예측치가 실험결과와 차이를 가지게 되는 주요 원인이 될 수 있음을 확인하였다.
- (3) 차륜 마모는 임계속도 및 그 이력현상과 밀접한 관계가 있다. 그러나 마모 형태에 따라 매우 다양한 이력현상을 유발시키므로 일정한 경향을 찾을 수는 없다.
- (4) Yoshihiro Suda.<sup>(14)</sup>가 제안한 비대칭 현가장치 배치 기법의 적용으로 임계속도 이력현상이 다소 완화됨을 확인하였다. 또한 비대칭 현가장치의 적절한 배치를 통해 곡선

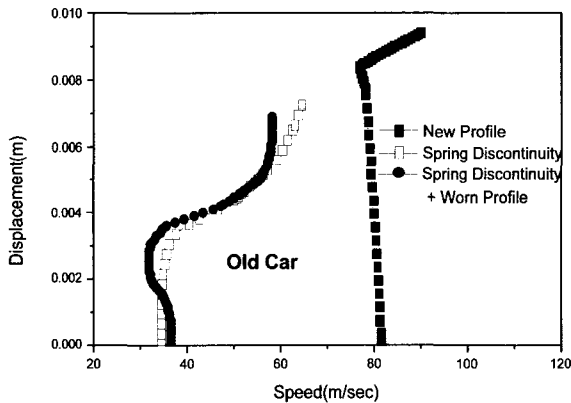


Fig. 14 Bifurcation diagram

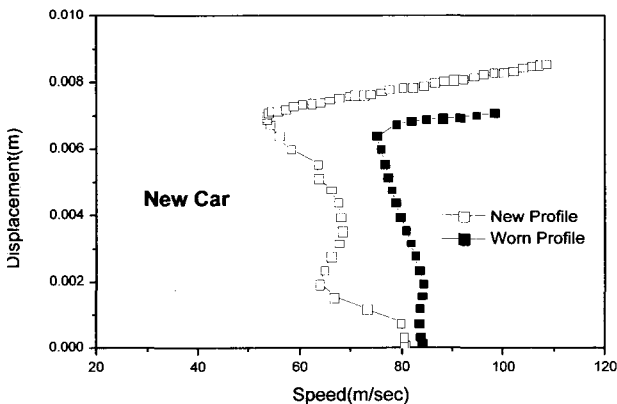


Fig. 15 Bifurcation diagram

추종성 향상과 임계속도 이력현상의 적절한 감소가 가능할 것으로 예상된다.

(5) 차륜 마모도와 현가장치의 강성 불연속성과 같은 비선형 요소들을 해석에 고려함으로써 차량의 임계속도 및 이력현상 등이 좀더 현실적으로 예측될 수 있음을 확인하였다.

(6) 선형 및 비선형 임계속도 사이의 속도로 차량이 주행한다면 필요이상의 외란이 주행 중 발생할 경우 안정성이 급격히 악화되어 위험할 수 있다. 그러므로 차량의 최고속도는 비선형 임계속도 이하로 제한되어야 한다.

### 참 고 문 헌

(1) Klingel W., 1883, "Über den Lauf der Eisenbahnwagen auf gerader Bahn," Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens in technischer Beziehung, pp. 113~123.

(2) Cooperrider, N. K., 1972, "The Hunting Behaviour of Conventional Railway Trucks," ASME J. Eng. Industry 94, pp. 752~762.

(3) Tetsuji Hirotsu, Yuzo Morita, Fumi Iwasaki and Shuji Ishida, 1984, "Simulation of Hunting of Rail Vehicles," Bulletin of JSME, Vol. 27, pp. 2241~2248.

(4) Huilgol RR, 1978, "Hof-Friedrichs Bifurcation and the Hunting of a Railway Axle," Quart J. Appl. Mech., Vol. 36, pp. 85~94.

(5) Moelle D and Gasch R, 1982, "Non-linear Bogie Hunting," in Proc. 7th IAVSD Symp. Cambridge, Swets & Zeitlinger, Lisse, pp. 455~467.

(6) Gasch R, Moelle D and Knothe K, 1984, "The Effect of Nonlinearities on the Limit Cycles of Railway Vehicles," in Proc. 8th IAVSD Symposium on Vehicle Systems Dynamics in The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, Swets & Zeitlinger, Amsterdam/Lisse, pp. 207~224.

(7) Hans True, 1993, "Dynamics of a Rolling wheelset," Applied Mechanics Division of ASME, Vol. 46, pp. 438~444.

(8) Carsten Knudsen, Rasmus Feldberg and Alfred Jäschinski, 1991, "Nonlinear Dynamic Phenomena in the

Behaviour of a Railway Wheelset Model," J. Nonlinear Dynamics, pp. 389~404.

(9) 정우진, 김성원, 2000, "철도차량의 임계속도에 관한 연구," 대한기계학회논문집, A권, 제 24 권, 제 8 호, pp. 1991~1999.

(10) Mehdi Ahmadian and Shaopu Yang, 1998, "Effect of Suspension Nonlinearities on Rail Vehicle Bifurcation and Stability," Rail Transportation of ASME, pp. 97~106.

(11) Pascal and Sauvage, 1991, "New Method for Reducing the Multi Contact Wheel/rail Problem to One Equivalent Contact Patch," Proc. 12. IAVSD Symposium.

(12) Kalker J. J., 1980, "Review of Wheel/Rail Rolling Contact Theories, The General Problem of Rolling Contact," Applied Mechanics Division of ASME, Vol. 40, pp. 77~92.

(13) Vijay K. Garg and Rao V. Dukkipati, 1984, "Dynamics of Railway Vehicle Systems," Academic Press, pp. 103~176.

(14) Yoshihiro Suda and Ronald J. Anderson, 1994, "Improvement of Dynamic Performance of Trucks with Longitudinally Unsymmetric Structures by Semi-Active Control for Rail Vehicles," JSME International, Vol. 37, No. 3, pp. 542~548.

(15) Ali H. Nayfeh and Balakumar Balachandran, 1994, "Applied Nonlinear Dynamics," John Wiley & Sons.

(16) Jing Zeng, Jiye Zhang and Zhiyun Shen, 1999, "Hopf Bifurcation and Nonlinear Oscillations in Railway Vehicle Systems," Proc. 16. IAVSD Symposium.

(17) Hyunyoung Kim and Eungsoo Shin, "Nonlinear Vibration Analysis of a Parametrically Excited Robot with joint Flexibility," Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers, Vol. 23, No. 2, pp. 199~208.

(18) 정우진, 김성원, 2000, "비선형 임계속도 검증을 위한 실험적 연구," 한국철도학회논문집, 제 3 권, 제 1 호, 한국철도학회, pp. 12~18.