

<논 문>

재질분포가 직교이방 조화함수로 변하는 사각 평판의 굽힘 진동 해석

Flexural Vibration of a Rectangular Plate with Orthotropically and Harmonically Varying Material Properties

김진오* · 문병환**

Jin O. Kim and Byung Hwan Moon

(2001년 1월 4일 접수 ; 2001년 3월 22일 심사완료)

Key Words : Flexural Vibration(굽힘 진동), Perturbation Technique(섭동기법), Natural Frequency(고유 진동수), Mode Shape(모드 형상), Flat-Panel Speaker(평판 스피커)

ABSTRACT

The paper describes a theoretical study on the flexural vibration of an elastic rectangular plate with periodically nonuniform material properties. The approximate solution of the natural frequency and mode shape has been obtained using the perturbation technique for sinusoidal modulation of the flexural rigidity and mass density. It has been shown that distributed modes exist in the plate which is a two-dimensional model of the flat panel speaker.

1. 서 론

두께 3 mm 정도로 얇고 가벼운 '평판 스피커'가 수년 전에 출현하였다.^(1,2) 기존의 스피커는 보이스코일에 전달되는 전기신호에 따라 원뿔형 막이 진동하여 소리를 방사하는 방식으로서, 그 음향특성을 해석하고 설계하는 체계적인 방법들이 이미 시도되기도 하였다.^(3,4) 평판 스피커는 Fig. 1에 개략적으로 보인 바와 같이 두 개의 얇은 탄성층이 그 사이에 규칙적으로 보강되어 결합된 평판과 압전 변환기로 구성된다. 전기신호에 따른 변환기의 가진에 의해 판이 발생된 진동이 전파하면서 평판에 분포된 진동 모드를 형성하여 소리를 발생시키는 것으로 알려져 있는데,⁽²⁾ 자세한 이론은 보고되지 않았다.

평판 스피커의 개발은 판 구조물에서의 소음 방사를 억제시키려는 연구 과정에서 얻어진 역설적 부산물로 알려져 있다. 비행기 동체와 같이 일정한 간격으로 보강된 구조물에서의 진동에 의한 소음 방사 현상은 오래 전부터 연구대

상으로 다루어졌다.⁽⁵⁻⁸⁾ 그러한 연구 결과에 따르면 보강 간격의 불규칙성이 소음 방사를 제한할 수 있음이 보여진다.⁽⁹⁾ 따라서 판 구조물에 주기적 규칙성을 유지함으로써 음향 방사를 증대할 수 있다는 것이고, 이것이 평판 스피커의 원리이다. 기존의 연구 보고들은 주기적으로 보강된 구조물을 주기적으로 지지된 조건으로 가정하여 해석하거나,^(5,6) 주기에 해당하는 간격의 균일한 요소들이 결합되었다고 가정하여 결합부에서의 파동 전달로 해석한 것으로서,⁽⁷⁾ 재질이 주기적으로 불균일한 판의 분포 진동모드를 해석하지는 않았다.

본 연구는 평판 스피커의 작동원리를 공개하고 음향특성을 향상시키는 설계에 활용할 해석적 해를 구하기 위한 목적으로 시작되었다. 본 논문에 앞서 저자들은 Fig. 1에 보인 평판을 1차원적으로 단순화하여 조화함수 형태로 재질물성치가 변화하는 보를 대상으로 진동해석과 파동해석을 하여 발표한 바 있다.^(10,11) 진동해석 논문⁽¹⁰⁾에서는 주기적으로 불균일한 재질의 보에서의 굽힘 진동모드에 대해 섭동기법에 의해 근사해를 구하고 유한요소법으로 검증한 결과를 제시하였고, 재질의 주기성에 따라 분포 진동모드가 존재함을 밝혔다.

* 정회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@saint.soongsil.ac.kr

Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0668

** 숭실대학교 대학원 기계공학과

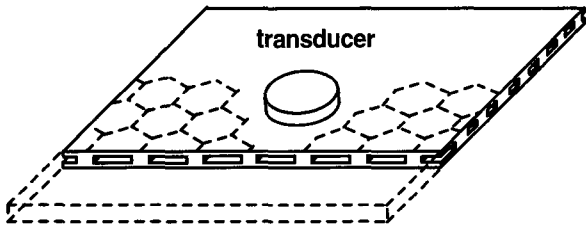


Fig. 1 Schematic diagram of the flat-panel speaker.

그러한 접근방법을 토대로 본 논문은 Fig. 2에 보인 바와 같이 2차원적으로 재질의 주기적 불균일성을 가진 직 4각판으로 평판스피커를 단순화하여 굽힘 진동을 해석한다.

2. 문제의 정식화

Fig. 2에 보인 바와 같이 굽힘 강성이 $D(x, y)$, 단위면적당 질량이 $\rho(x, y)$, 포와송비가 ν 이고 가로 세로 길이가 각각 a, b 인 직사각 탄성 평판의 굽힘 진동의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다. x 축, y 축에 수직인 면에 작용하는 굽힘모멘트를 각각 M_x, M_y , 비틀림 모멘트를 M_{xy} 라 하고, 횡방향 변위를 $w(x, y, t)$ 라 하면, 다음과 같은 힘의 평형 관계식을 얻는다.⁽¹²⁾

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \rho(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

여기서

$$M_x = -D(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$M_y = -D(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

$$M_{xy} = D(x, y) (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

식 (2)~(4)를 식 (1)에 대입하고, 굽힘 운동이 진동수 ω 로 시간에 따라 조화운동을 하는 것을 전제로 $w(x, y, t) = W(x, y) \exp(i\omega t)$ 로 할 때, 운동방정식은 $W(x, y)$ 로써 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D(x, y) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D(x, y) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right] \\ & + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D(x, y) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] = \omega^2 \rho(x, y) W \end{aligned} \quad (5)$$

$0 < x < a, 0 < y < b$

평판의 네변이 자유롭고 네 모서리가 단순 지지되어 있으면, 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

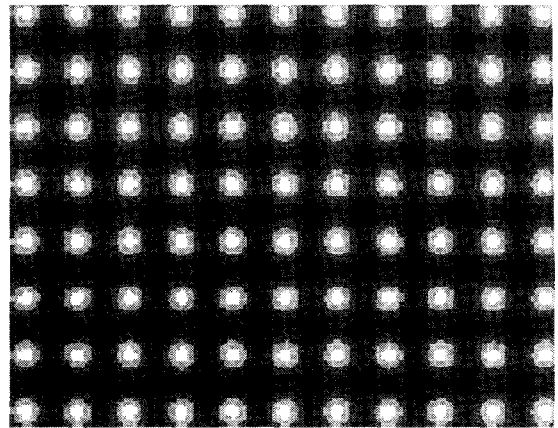


Fig. 2 A rectangular plate model with periodically nonuniform material properties.

$$W(x, y) = 0 \text{ at } (0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b) \quad (6a-d)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \text{ at } x = 0, a \quad (7a, b)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \text{ at } y = 0, b \quad (8a, b)$$

보의 재질이 가로 세로 방향으로 위치에 따라 주기적으로 변화하는 경우, $D(x, y)$ 와 $\rho(x, y)$ 는 각각 다음과 같이 조화함수를 이용하여 표현할 수 있다.

$$D(x, y) = D_0 (1 + \epsilon \sin \xi x) (1 + \epsilon \sin \eta y) \quad (9)$$

$$\rho(x, y) = \rho_0 (1 + \epsilon \delta \sin \xi x) (1 + \epsilon \delta \sin \eta y) \quad (10)$$

여기서 ϵ 는 평균값 D_0 를 기준으로 한 강성 변화 폭이고, $\epsilon \delta$ 는 평균값 ρ_0 를 기준으로 한 단위면적당 질량 변화 폭이다. 또한 ξ 와 η 는 단위길이당 물성치 변화 횟수로서, 편의상 $\xi a = (2k_x + 1)\pi$, $\eta b = (2k_y + 1)\pi$ (k_x, k_y 는 정수)로 전제하여, $\sin \xi a = 0, \sin \eta b = 0$ 으로 한다. 이와 같이 굽힘 강성과 밀도가 위치 x, y 에 따라 변화하는 경우 엄밀해를 구할 수 없으므로 다음과 같이 근사해를 구한다.

3. 섭동기법에 의한 근사해

식 (5)~(8)로 정의된 경계치 문제는 식 (9), (10)으로 표현된 물성치로 인해 엄밀해를 구할 수 없으므로 근사해법을 사용하게 되는데, 물성치가 위치 x, y 에 따라 섭동량만큼 주기적으로 변화하고 있어 섭동기법^(13,14)을 채택한다. 이를 위해 변위 진폭 $W(x, y)$ 와 고유진동수 ω 를 다음과 같이 섭동량 ϵ 의 급수로 전개한다.

$$W(x, y) = W_0(x, y) + \epsilon W_1(x, y) + \epsilon^2 W_2(x, y) + \dots \quad (11)$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (12)$$

식 (11), (12)를 식 (5)~(8)에 대입하고 ϵ 의 으뜸차순으로 정리하여, ϵ 의 차수별 운동방정식과 경계조건에 대해 다음과 같이 단계적으로 해를 구한다.

3.1 $O(\epsilon^0)$ 해

선도차수 $O(\epsilon^0)$ 에 대해서 다음과 같이 고전적인 굽힘 진동 방정식과 경계조건을 얻는다.

$$\frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_0}{\partial y^4} - \beta^4 W_0 = 0 \quad (13)$$

$$W_0(x, y) = 0 \quad \text{at } (0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b) \quad (14a-d)$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (15a,b)$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (16a,b)$$

여기서

$$\beta^4 = \frac{\rho_0 \omega_0^2}{D_0} \quad (17)$$

식 (13)~(16)으로 정의된 문제의 해는 네변이 단순지 가진 평판에 대해 해를 구하는 과정⁽¹⁵⁾과 유사한 방식에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$W_0(x, y) = A_{mn} \sin \alpha_m x \sin \gamma_n y \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

$$\omega_{0, mn} = \sqrt{\frac{D_0}{\rho_0}} \beta_{mn}^2 = \sqrt{\frac{D_0}{\rho_0}} (\alpha_m^2 + \gamma_n^2) \quad (19)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{b}$$

여기서 m, n 은 진동모드를 나타내고, A_{mn} 은 진폭으로서 $A_{mn} = 1$ 로 정규화한다.

3.2 $O(\epsilon^1)$ 해

1차수 $O(\epsilon^1)$ 에 대한 지배방정식은 $W_1(x, y)$ 로써 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_1}{\partial y^4} - \beta^4 W_1 = f(x, y) \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} f(x, y) = & -\xi \cos \xi x \left[\frac{\partial^3 W_0}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_0}{\partial x \partial y^2} \right] \\ & + \xi^2 \sin \xi x \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) \\ & - \eta \cos \eta y \left[\frac{\partial^3 W_0}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_0}{\partial x^2 \partial y} \right] \\ & + \eta^2 \sin \eta y \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$+ \beta^4 \delta (\sin \xi x + \sin \eta y) W_0 + 2\beta^4 \frac{\omega_1}{\omega_0} W_0 \quad (21)$$

식 (18)을 식 (21)에 대입한 후 정리하면

$$\begin{aligned} f(x, y) = & D_1 \cos(\alpha + \xi)x \sin \gamma y \\ & + D_2 \cos(\alpha - \xi)x \sin \gamma y \\ & + D_3 \sin \alpha x \cos(\gamma + \eta)y \\ & + D_4 \sin \alpha x \cos(\gamma - \eta)y \\ & + 2\frac{\omega_1}{\omega_0} \beta^4 \sin \alpha x \sin \gamma y \end{aligned} \quad (22)$$

여기서

$$D_1 = \frac{1}{2} \{ -\beta^4(1-\delta) + \xi[\alpha^3 - \xi(\alpha^2 + \nu\gamma^2) + 2(1-\nu)\alpha\gamma^2] \}$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \{ \beta^4(1-\delta) + \xi[\alpha^3 + \xi(\alpha^2 + \nu\gamma^2) + 2(1-\nu)\alpha\gamma^2] \}$$

$$D_3 = \frac{1}{2} \{ -\beta^4(1-\delta) + \eta[\gamma^3 - \eta(\gamma^2 + \nu\alpha^2) + 2(1-\nu)\gamma\alpha^2] \}$$

$$D_4 = \frac{1}{2} \{ \beta^4(1-\delta) + \eta[\gamma^3 + \eta(\gamma^2 + \nu\alpha^2) + 2(1-\nu)\gamma\alpha^2] \}$$

그리고 $W_1(x, y)$ 에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$W_1(x, y) = 0 \quad \text{at } (0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b) \quad (23a-d)$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (24a,b)$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (25a,b)$$

식 (20)~(22)와 경계조건 (23)~(25)로 정의된 경계치 문제의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_1(x, y) = & -\frac{1}{\alpha^2} [(\alpha + \xi)^2 C_1 + (\alpha - \xi)^2 C_2] \cos \alpha x \sin \gamma y \\ & -\frac{1}{\gamma^2} [(\gamma + \eta)^2 C_3 + (\gamma - \eta)^2 C_4] \sin \alpha x \cos \gamma y \\ & + C_1 \cos(\alpha + \xi)x \sin \gamma y + C_2 \cos(\alpha - \xi)x \sin \gamma y \\ & + C_3 \sin \alpha x \cos(\gamma + \eta)y + C_4 \sin \alpha x \cos(\gamma - \eta)y \\ & + C_5 x \cos \alpha x \sin \gamma y + C_6 y \sin \alpha x \cos \gamma y \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{2}{\beta^2} (\alpha C_5 + \gamma C_6) \quad (27)$$

여기서

$$C_1 = \frac{D_1}{\xi(2\alpha + \xi)[(\alpha + \xi)^2 + \alpha^2 + 2\gamma^2]}$$

$$C_2 = \frac{-D_2}{\xi(2a-\xi)[(a-\xi)^2+a^2+2\gamma^2]}$$

$$C_3 = \frac{D_3}{\eta(2\gamma+\eta)[(\gamma+\eta)^2+\gamma^2+2a^2]}$$

$$C_4 = \frac{-D_4}{\eta(2\gamma-\eta)[(\gamma-\eta)^2+\gamma^2+2a^2]}$$

$$C_5 = \frac{1-\cos \xi a}{a^2 a} [(a+\xi)^2 C_1 + (a-\xi)^2 C_2]$$

$$C_6 = \frac{1-\cos \eta b}{\gamma^2 b} [(\gamma+\eta)^2 C_3 + (\gamma-\eta)^2 C_4]$$

식 (26)과 (27)은 각각 (m, n) 모드의 진동 모드형상 $W(x, y)$ 와 고유진동수 ω 에 대한 제 1차수 근사해이다.

3.3 고유진동수와 모드형상

지금까지 얻은 결과로부터 (m, n) 모드의 고유진동수와 모드형상에 대한 근사해를 구성한다.

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_0} + O(\varepsilon^2) \quad (28)$$

$$W(x, y) = W_0(x, y) + \varepsilon W_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (29)$$

평판 재료의 주기성 ξa , ηb , ε 및 δ 와 포와송비 ν 가 주어지면, 식 (28)과 (29)로부터 주기적 불균일 재료 평판의 고유진동수와 모드형상을 계산할 수 있다.

4. 결과 및 토의

앞에서 구한 수학적 해가 의미하는 물리적 현상을 파악하기 위하여, $\xi a = 21\pi$ (즉 $k_x = 10$), $\eta b = 15\pi$ (즉 $k_y = 7$), $\varepsilon = 0.5$, $\delta = 0$, $\nu = 0.3$ 인 경우에 대해 고유진동수와 모드형상을 계산하였다.

4.1 고유진동수

식 (28)을 이용해 기본모드로부터 십여 개의 모드에 대해 고유진동수비 ω/ω_0 를 계산한 결과를 Fig. 3에 표현하였다. 그림의 (a)는 $n=1$ 이고 m 이 1부터 20까지의 범위에 해당하는 a/ξ 의 함수로 계산된 진동수비 ω/ω_0 를 나타낸 것이다. 그림의 (b)는 $m=1$ 이고 n 이 1부터 14까지의 범위에 해당하는 γ/η 의 함수로 계산된 ω/ω_0 를 나타낸 것이다.

이 그림들이 공통적으로 보여주다시피, 재료의 주기성의 영향으로 고유진동수는 대부분의 모드에서 10~20 % 감소한다. 예외적으로 $a/\xi = 0.5$ 부근과 $\gamma/\eta = 0.5$ 부근에서 점프하는데, 이는 식 (27)에 표현된 C_2 와 C_4 의 분모가 0이 되어 나타나는 현상이다.

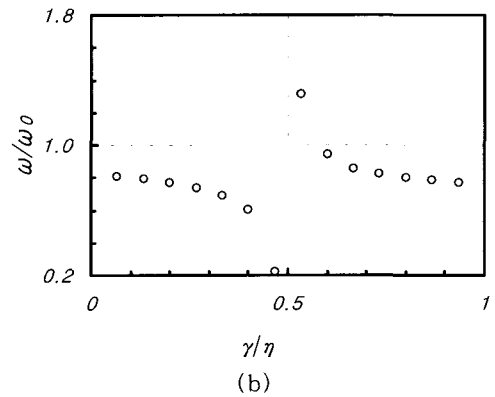
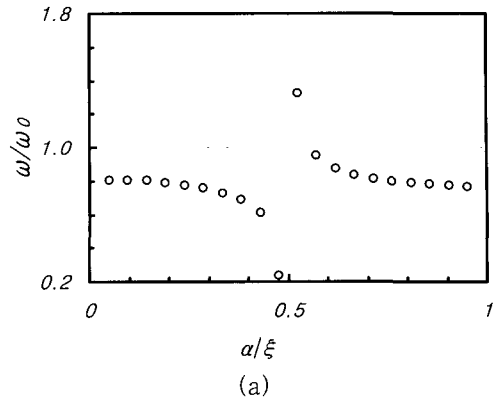


Fig. 3 Natural frequency of the periodically nonuniform plate, ω , normalized to the natural frequency of the uniform plate, ω_0 . The frequency ratio ω/ω_0 has been calculated for several modes and depicted (a) as a function of a/ξ and (b) as a function of γ/η .

4.2 모드형상

식 (29)를 이용해 모드형상 $W(x, y)$ 를 계산하였다. 그중 (1,1)모드, (2,1)모드, (3,1)모드를 Fig. 4에서 보여준다. 그런데 이 그림들에서는 모드형상들이 균일 평판의 모드형상 $W_0(x)$ 과 유사함은 보여주지만 재료 주기성이 모드형상에 미치는 영향은 파악되기 어렵다. 그래서 불균일 재료 평판의 모드형상에서 균일 재료 평판의 모드형상을 제거한 결과에 해당하는 $W_1(x, y)$ 를 Fig. 5에 표현하였다.

Fig. 5에서는 Fig. 4와 같이 3차원으로 나타내면 그림이 너무 혼잡해지는 단점이 있어서, 평판의 특정 단면 $y = b/2$ 에서의 진동 모드형상을 나타내었다. 이 그림들에서 알 수 있듯이, 주기적 불균일 재료 평판의 고유진동모드에는 주기성의 영향이 분할모드로 포함되어 있다. 이러한 모드형상은 마치 고차모드의 진동이 저차모드에서 함께 발생하는 것처럼 나타나며, 평판스피커에서 음향발생 원리로 작용하는 것이다.

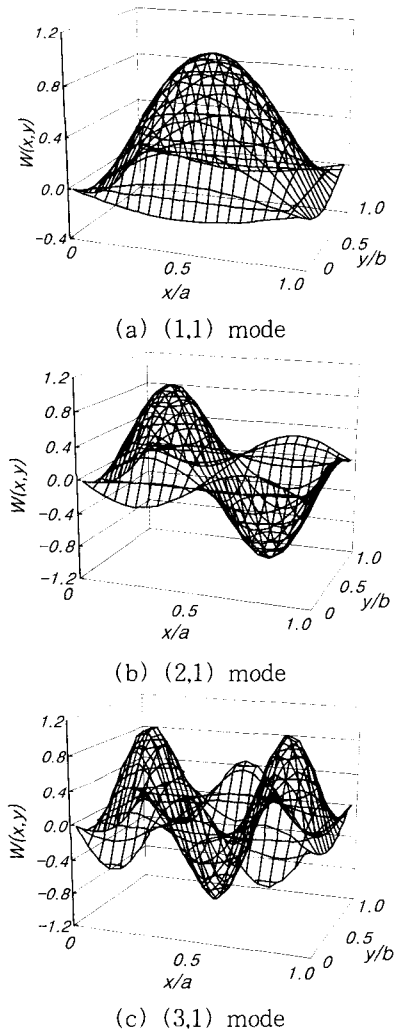


Fig. 4 Mode shapes $W(x,y)$ of the periodically nonuniform plate.

5. 결론

재질이 주기적으로 불균일한 사각 평판의 진동을 섭동기법으로 근사해를 구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 재질의 주기성에 따라 분할된 분포진동 모드가 저차모드에서 공존한다. 이는 평판스피커에 사용되는 주기적 불균일 재질 평판의 분포진동 발생 원리이다.

둘째, 섭동법에 의해서 구한 해석적 근사해에 형상과 재질의 수치를 대입하여 편리하게 주기적 불균일 재질 평판의 진동특성을 계산할 수 있게되었다. 이러한 근사해는 향후에 평판스피커의 음향 방사에 관한 연구에 직접 활용될 수 있을 것이다.

본 논문은 평판스피커에 대한 해석적 접근에 국한하여 근사해석 결과를 제시하였다. 향후 연구에서는 실험을 통

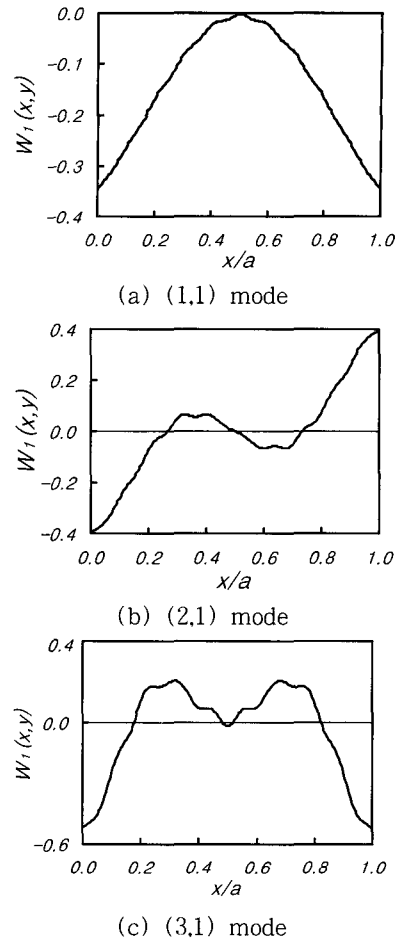


Fig. 5 Mode shape corrections $W_1(x,y)$ of the periodically nonuniform plate at $y=b/2$.

한 확인이 필요하며, 초소형 센서 또는 광학적 비접촉 측정 장치를 사용하는게 바람직하다.

참고 문헌

- (1) Harris, N., Hawksford, M. O., 1997, "The Distributed-Mode Loudspeaker as a Broad-Band Acoustic Radiator", Audio Engineering Society 103rd Convention Preprint 4526 (D-6).
- (2) Colloms, M., 1997, "High Performance Loudspeakers", 5th ed., John Wiley & Sons, New York, pp. 39~50.
- (3) 김정호, 김준태, 김진오, 민진기, 1997, "진동/음향 해석에 의한 스피커의 음향특성 연구", 대한기계학회논문집(A), 제 21 권, 제 10 호, pp. 1742~1756.
- (4) 김준태, 김정호, 김진오, 1998, "직접방사형 스피커의 음향특성 해석 및 설계", 한국소음진동공학회지, 제 8

권, 제 2 호, pp. 274~282.

- (5) Sen Gupta, G., 1970, "Natural Flexural Waves and the Normal Modes of Periodically Supported Beams and Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 13, pp. 89~101.
- (6) Mead, D. J., 1970, "Free Wave Propagation in Periodically Supported Infinite Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 11, pp. 181~197.
- (7) Williams, F. W., Wanxie, Z., Bennett, P. N., 1993, "Computation of the Eigenvalues of Wave Propagation in Periodic Substructural Systems", *ASME J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 115, pp. 422~426.
- (8) Hawwa, M. A., Nayfeh, A. H., 1997, "Flexural Wave Propagation in a Fluid-Loaded Elastic Plate With Periodically Varying Rigidity", *ASME J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, pp. 415~419.
- (9) Hawwa, M. A., Nayfeh, A. H., 1997, "Acoustic Radiation From Multi-Span Baffled Panels", *ASME J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, pp. 80~84.
- (10) 김진오, 문병환, 김준태, 1999, "재질이 주기적으로 불균일한 보의 굽힘 진동 해석", *한국음향학회지*, 제 18 권, 제 3 호, pp. 73~78.
- (11) 김진오, 문병환, 2000, "재질이 주기적으로 불균일한 보에서 전파하는 굽힘 탄성파", *대한기계학회 논문집 (A)*, 제 24 권, 제 8 호, pp. 1923~1930.
- (12) Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S., 1959, "Theory of Plates and Shells", 2nd ed., McGraw-Hill, New York, Ch. 4.
- (13) Van Dyke, M., 1975, "Perturbation Methods in Fluid Mechanics", The Parabolic Press, Stanford, California, pp. 36~37.
- (14) Nayfeh, A. H., 1981, "Introduction to Perturbation Techniques", John Wiley and Sons, New York, pp. 418~426.
- (15) Meirovitch, L., 1967, "Analytical Methods in Vibrations", Macmillan Co., London, pp. 179~189.