

# 샘플치 $H_\infty$ 문제: 최악의 외란의 폐경로 표현을 통한 이산화 기법 적용

## (The Sampled-Data $H_\infty$ Problem: Applying the Discretization Method via a Closed-Loop Expression of Worst-Case Disturbance)

조도현\*      박진홍\*\*  
(Do-Hyeon Cho) (Jin-Hong park)

### 요약

리프팅 기법을 사용하지 않고 최악의 경우에 대한 등가 이산화 절차를 통하여 샘플치  $H_\infty$  문제를 다루었다. 이산 문제 특성화를 유도하기 위해서 표준 선형 2차 이론의 결과를 이용하였다. 제안한 방법은 한 번의 행렬 지수함수 풀이만을 필요로 하므로 리프팅 기법에 비해 매우 간단하지만, 리프팅 기법을 사용하여 구한 샘플치  $H_\infty$  최적 제어기와의 성능차이가 거의 없었다. 또한, 제안한 방법을 도립진자 모델에 적용하였다.

### ABSTRACT

This paper aims at deriving an equivalent finite dimensional discrete-time system for  $H_\infty$  type problem for sampled-data control systems. A widely used approach is based on the lifting technique, but it needs somewhat complicate computation. Instead, this paper derives an equivalent finite-dimensional discrete-time system directly from a description of the sampled-data system which is achieved via a closed-loop expression of the worst-case intersample disturbance.

Keywords : Sampled-Data System, Lifting, Worst-Case Disturbance, Matrix Exponential, Inverted Pendulum.

### 1. 서론

연속 신호와 이산 신호가 동시에 존재하는 혼성 시스템(hybrid system)을 샘플치 시스템(sampled-data system)이라 한다[1]. 샘플치 시스템은 포함된 표본화기(sampler)와 영차 유지기(zero order holder)에 의해 시변성을 갖기 때문에 표준 이산 문제로 다루기 힘들다[2].

이러한 샘플치 시스템에 대한  $H_\infty$  최적 제어 문제는 많은 논문들에서 연구되었다[3,4].

샘플치  $H_\infty$  문제에 대한 풀이법 중 널리 사용되는 방법은 Bamieh와 Pearson에 의해 제시되고[5,6], Chen과 Francis에 의해 개선된, 리프팅 기법(lifting technique)에 기초한 것으로, 이 방법은 샘플치  $H_\infty$

\* 정회원 : 혜전대학 전자계열 교수

\* 정회원 : 혜전대학 전자계열 교수

논문접수 : 2001. 7. 16.

심사완료 : 2001. 7. 24.

문제를 등가의 유한차원 이산  $H_\infty$  문제로 변환한다 [1,2,4]. 리프팅 방법은 최악의 경우의 외란에 대한 개 경로 표현을 통해 시스템을 나타낸다. 샘플치  $H_\infty$  문제를 풀이하기 위한 또 다른 방법은, 이산상태와 연속상태를 모두 포함하는 점프(jump)를 갖는 상태방정식 표현방법[3,7]에 기초한 것이다. 이 방법은 Toivonen과 Sågfors에 의해 최악의 경우의 폐경로 표현을 통해 시스템을 나타내고, 한 번의 행렬 지수함수 풀이를 통해 간단히 등가의 유한차원 이산시스템을 구현하는 기법으로 개선되었다[7]. 비록 두 방법에 의한 시스템 표현은 다르더라도, 결과로써 구해진 등가의 이산시간 시스템은 등가임이 증명되었으며, 이 풀이 방법은 리프팅 기법에 비해 간단하다[7,8].

이 논문은 Toivonen과 Sågfors의 기법과 리프팅 기법의 등가성[7]이용하여, 제어기의 존재조건에 따르는 가정조건을 만족시키기 위한 하중만으로 구성된 일반화 제어대상을 구성한 뒤, 등가 이산시간 제어대상을 구현한다. 그렇게 구현된 이산시간 제어대상에 대한 샘플치  $H_\infty$  제어기를 설계하고, 위에서 구현한 이산시간 제어대상과 샘플치  $H_\infty$  제어기으로써 폐경로 시스템을 구성하여, 각각의 출력에 대한 이산 시스템의 무한대 노름을 관찰한다. 각각의 출력은 시스템의 성능 혹은 강건성과 관련되어 있으므로, 원하는 성능 및 강건성을 반영하기 위해 상수하중을 추가하여, 새로운 일반화 제어대상을 구현한다. 새롭게 구성된 일반화 제어대상에 대하여 등가 이산시간 제어대상을 구성하고, 최종적인 이산시간  $H_\infty$  제어기를 구한다.

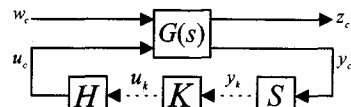
**2. 최악의 외란의 폐경로 표현을 통한 등가 이산시간 시스템 구현**

연속시간 제어대상  $G(s)$ 를 식(1)과 같이 표현되는 고려하자[9,10].

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= Ax(t) + B_1 w_c(t) + B_2 u_c(t), \quad x(0) = 0 \\ z_c(t) &= C_1 x(t) + D_{12} u_c(t) \\ y_k &= C_2 x(kh) + D_{21} v_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

여기서,  $x(t)$ 는 상태 벡터,  $w_c(t)$ 와  $v_k$ 는 연속 및 이산 외란,  $u_c(t)$ 는 제어입력,  $z_c(t)$ 와  $y_k$ 는 제어할 신호와 측정 출력이다. 측정 출력  $y_k$ 는 표본화 순간  $kh$ 에서만 유용하다.

식(1)의 제어대상을 포함하는 샘플치 제어 시스템은 [그림 1]과 같이 표현된다.



[그림 1] 샘플치  $H_\infty$  제어 시스템

[Fig. 1] Sampled-data  $H_\infty$  control system

여기서,  $K$ 는 이산  $H_\infty$  제어기,  $H$ 와  $S$ 는 각각 영차 유지기와 표본화기이다.

샘플치  $H_\infty$  최적 제어 문제의 해는 다음의 가정들을 필요로 한다.

- (가정1) : 이산 시스템  $(e^{Ah}, \int_0^h e^{A(h-t)} B_2 dt)$ 과,  $(C_2, e^{Ah})$ 는 각각 안정가능, 검출 가능하다.
- (가정2) : 연속 시스템  $(A, B_1)$ 과  $(C_1, A)$ 는 각각 안정가능, 검출 가능하다.
- (가정3) :  $D_{12}^T D_{12} > 0, D_{21}^T D_{21} > 0$ .

제어신호가 영차 유지기에 의해 생성된다고 가정하면, 최악의 경우를 고려한 성능 척도는 각각  $L_2$  및  $\ell_2$  공간상의 외란  $w_c$ 와  $v_k$ 에 관련한 페루프 시스템의 유도 노름 식(2)로 정의된다.

$$\gamma(K) := \sup_{(w_c, v_k \neq 0)} \left\{ \frac{\|z_c\|_{L_2}}{[\|w_c\|_{L_2}^2 + \|v_k\|_{\ell_2}^2]^{1/2}} \right\} \quad (2)$$

샘플치  $H_\infty$  문제는  $\gamma(K) < \gamma$ 를 만족하는 안정화 제어기  $K$ 를 찾는 것이다.

식(1)의 샘플치 시스템을 식(3)과 같은 점프를 갖는 선형 시스템으로 표현한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= A_c x_e(t) + B_{c1} w_c(t), \quad t \neq kh \\ x_e(kh) &= A_d x_e(kh^-) + B_d u_k \\ z_c(t) &= C_{c1} x_e(t) \\ y_k &= C_d x_e(kh^-) + D_{21} v_k \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $x_e(t) := [x'(t), u'(t)]'$  이고, 각 시스템 행렬은 식(4), 식(5)와 같다.

$$A_c := \begin{bmatrix} A & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{c1} := \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{c1} := [C_1 \ D_{12}] \quad (4)$$

먼저, 리프팅 변환을 사용하지 않고, 식(3)으로 표

$$A_d := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_d := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, C_d := [C_2 \ 0] \quad (5)$$

현된 시스템으로부터  $H_\infty$  샘플치 문제에 대한 이산화 기반 방법을 이용하기 위하여, 표본화 구간  $[kh, kh+h)$ 에서 식(2)의 2차 비용에 대하여 식(6)을 도입한다.

$$L_k(w_c, x(kh), u_k) := \int_{kh}^{kh+h} (z_c^T z_c - \gamma^2 w_c^T w_c) dt. \quad (6)$$

식(2)을 만족하기 위한 필요조건은 식(6)이  $w_c$  내에서 유계된 상한을 갖는 것이므로, 식(6)의 최대치는 표준 선형 최적제어 방법에 의한,  $L_2[kh, kh+h)$ 내의 유일한 요소  $w_c^0$ 에 의해 얻어지며, 식(7)과 같은 대칭 양의 반정부호 행렬  $P(t)$ 를 도입한다.

$$P(t) := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}(t) \quad (7)$$

식(7)은 식(8)의 리카티 미분 방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) &= A_c^T P(t) + P(t) A_c + \gamma^{-2} P(t) B_{c1} B_{c1}^T P(t) + C_{c1}^T C_{c1} \\ P(h) &= 0, \quad t \in [0, h]. \end{aligned} \quad (8)$$

식(3)에 의해 정의되고, 식(6)과 관련한 신호  $z_c$ 를 고려한다. 비용  $L_k(w_c, x(kh), u_k)$ 는 필요충분조건으로 식(8)의 리카티 미분 방정식이  $[0, h)$ 에서 유계된 해를 갖는다면, 모든  $x(kh)$ 와  $u_k$ 에 대해  $w_c$

내에서 유계된 상한을 갖는다. 이 경우,  $L_k(w_c, x(kh), u_k)$ 의 최대치는 최적 폐경로 기법 식(9)에 의해 얻어진다.

$$w_c^0(t+kh) := \gamma^{-2} B_{c1}^T P(t) x_c(t+kh), \quad t \in [0, h] \quad (9)$$

더욱이, 식(6)의 비용은 식(10)과 같이 표현될 수 있으며,

$$L_k(w_c, x(kh), u_k) = \begin{bmatrix} x(kh) \\ u_k \end{bmatrix}^T P(0) \begin{bmatrix} x(kh) \\ u_k \end{bmatrix} - \gamma^2 \int_{kh}^{kh+h} \bar{w}^T(\tau) \bar{w}(\tau) d\tau \quad (10)$$

$\bar{w}(\cdot)$ 은 최적 폐경로 기법 식(11)로 부터의 점 유도이다.

$$\bar{w}(t+kh) = w_c(t+kh) - \gamma^{-2} B_{c1}^T P(t) x_c(t+kh), \quad t \in [0, h] \quad (11)$$

식(3)으로 표현된 샘플치 시스템이 식(11)을 만족한다고 가정하고, 식(12)와 같은 유한차원 이산 시스템을 정의한다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B_1 \bar{v}_k + B_2 u_k \\ \bar{z}_k &= C_1 x_k + D_{12} u_k \\ y_k &= C_2 x_k + D_{21} v_k \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, 각 시스템 행렬은 식(13)과 같이 정의되며,

$$\begin{aligned} A &:= \Phi(0, h), \\ B_1 B_1^T &:= \int_0^h \Phi(h, \lambda) B_1 B_1^T \Phi^T(h, \lambda) d\lambda \\ B_2 &:= \int_0^h \Phi(h, \lambda) [B_2 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P_{12}(\lambda)] d\lambda \\ C_2 &:= C_2 \\ D_{21} &:= D_{21} \\ \begin{bmatrix} C_1 \\ D_{12} \end{bmatrix} [C_1 \ D_{12}] &:= P(0) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,  $\Phi(\cdot, \cdot)$ 는  $A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P_{11}(t)$ 에 관한 상태 전이 행렬이다.

$u = Ky$ 인 임의의 제어기에 대하여  $K$ 는 식(3)의 샘플치 시스템을 안정화하고  $\gamma(K) < \gamma$ 를 만족한다는 것과  $K$ 가 식(12)의 이산 시스템을 안정화하고  $H_\infty$  노름 유계  $\|\bar{z}\|_2^2 - \gamma^2 [\|\bar{v}\|_2^2 + \|v\|_2^2] < 0, \forall (\bar{v}, v) \neq 0$ 를 만족한다는 것은 동가가 된다.

식(13)의 명확한 시스템 행렬 유도를 위해, 행렬 식(14)를 정의한다.

$$\Pi(t) = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}(t) = \exp\left(-\begin{bmatrix} A_c & \gamma^{-2}B_{c1}B_{c1} \\ -C_{c1}C_{c1} & -A_c \end{bmatrix}t\right) \quad (14)$$

행렬  $A_c$ 와  $B_{c1}$ 의 구조로부터  $\Pi_{11}$ 과  $\Pi_{12}$ 가 식(15)와 같이 분할됨을 관찰할 수 있다.

$$\Pi_{11} = \begin{bmatrix} \Pi_{1111} & \Pi_{1112} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Pi_{12} = \begin{bmatrix} \Pi_{1211} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

식(13)의 시스템 행렬은 식(16)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \Pi_{1111}(h)^{-1} \\ B_1 \bar{B}_1 &= -\gamma^2 \bar{A} \Pi_{1211}(h), \\ B_2 &= -\bar{A} \Pi_{1112}(h) \\ \begin{bmatrix} C_1 \\ D_{12} \end{bmatrix} [C_1 \ D_{12}] &= \Pi_{21}(h) \Pi_{11}(h)^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

식(6)~(16)은 리프팅 기법을 사용하지 않고 등가 유한 차원 이산시스템을 유도하였으나 리프팅 기법을 통하여 얻은 결과가 이산 시스템 결과와 밀접한 관계가 있다.

리프팅에 기초한 절차에서, 식(1)의 샘플치 시스템의 이산 특성화는, 무한 차원 공간  $L_2[0, h)$ 의 입출력을 갖는 이산 시스템으로 표현된다[1,4]. 샘플치 시스템은 식(17)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \bar{A}x_k + \bar{B}_1 \hat{w}_k + \bar{B}_2 u_k, \quad x_0 = 0 \\ \hat{z}_k &= C_1 x_k + D_{11} \hat{w}_k + D_{12} u_k \\ y_k &= C_2 x_k + D_{21} v_k \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $x_k$ 는 표본화 순간에서의 상태,  $L_2[0, h)$ 의  $\hat{w}_k$ 와  $\hat{z}_k$ 는 표본화 구간 동안의 시스템의 입출력을 나타낸다. 각 시스템 행렬은 [1,4]에서와 같이 정의되었다.

구성에 의해서,  $\|\hat{w}\|_{l_2} = \|w_c\|_{L_2}$ ,  $\|\hat{z}\|_{l_2} = \|z_c\|_{L_2}$ , 그리고 식(17) 시스템의  $l_2^{L_2[0, h)}$  유도노름은 임의의 안정화 제어기 K에 대하여 식(18)의  $\gamma(K)$ 와 같다.

$$\gamma(K) = \sup_{(\hat{w}, v \neq 0)} \left\{ \frac{\|\hat{z}\|_2}{[\|\hat{w}\|_2^2 + \|v\|_2^2]^{1/2}} \right\} \quad (18)$$

이산화 절차와 리프팅에 기초한 해를 어떻게 연결하는가를 보이기 위해서, 식(8)의 샘플간 비용이 천이 시스템 식(17)의 신호의 형태로써 식(19)과 같이 표현될 수 있다.

$$L_k(w_c, x(kh), u_k) = L_k(\hat{w}_k, x_k, u_k) = \|\hat{z}_k\|_2^2 - \gamma^2 \|\hat{w}_k\|_2^2 \quad (19)$$

표준 유한차원 이산  $H_\infty$  문제와 동일하게,  $\gamma(K) < \gamma$ 를 만족하기 위한 필요조건은  $\|\mathcal{D}_{11}\| < \gamma$ 이다.

식(17)에서 정의된 신호  $\hat{z}_k$  및 관련된 비용 식(20)을 고려한다. 필요충분조건으로  $\|\mathcal{D}_{11}\| < \gamma$ 라면 비용  $L_k(\hat{w}_k, x_k, u_k)$ 는  $\hat{w}_k$ 에서 유계된 상한을 갖는다. 이것은 식(20)에 의해  $L_k(\hat{w}_k, x_k, u_k)$ 의 최대치가 얻어진다.

$$\hat{w}_k^* := \gamma^{-2}(I - \gamma^{-2}D_{11}^*D_{11})^{-1}D_{11}^*[C_1 x_k + D_{12} u_k] \quad (20)$$

여기서  $D_{11}^*$ 은 수반 연산자를 나타낸다. 더욱이, 비용 식(19)은 식(21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} L_k(\hat{w}_k, x_k, u_k) &= \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ D_{12}^* \end{bmatrix} (I - \gamma^{-2}D_{11}^*D_{11})^{-1} [C_1 \ D_{12}] \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \\ &\quad - \gamma^2 \langle \hat{w}_k - \hat{w}_k^*, (I - \gamma^{-2}D_{11}^*D_{11})(\hat{w}_k - \hat{w}_k^*) \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

여기서  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는  $L_2[0, h)$ 상의 내적을 의미한다.

식(21)의 변수 변환을 시스템 방정식 식(17)에 적용하면 샘플치  $H_\infty$ 문제에 대한 등가의 유한차원 이산 특성화를 얻는다. 식(17)의 샘플치 시스템을 고려하고,  $\|\mathcal{D}_{11}\| < \gamma$ 라고 가정한다. 유한 차원 이산 시스템 식(22)을 정의한다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A\tilde{x}_k + B_1^*v_k + B_2^*u_k \\ z'_k &= C_1^*x_k + D_{12}^*u_k \\ y_k &= C_2^*x_k + D_{21}^*v_k \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A &:= A + \gamma^{-2}B_1D_{11}^*(I - \gamma^{-2}D_{11}D_{11}^*)^{-1}C_1 \\ B_1^*B_1^* &:= B_1(I - \gamma^{-2}D_{11}^*D_{11})^{-1}B_1 \\ B_2^* &:= B_2 + \gamma^{-2}B_1D_{11}^*(I - \gamma^{-2}D_{11}D_{11}^*)^{-1}D_{12} \\ \begin{bmatrix} C_1^* \\ D_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^* & D_{12}^* \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} C_1^* \\ D_{12}^* \end{bmatrix} (I - \gamma^{-2}D_{11}D_{11}^*)^{-1} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

그러면  $K$ 는 식(17)의 시스템을 안정화하고  $\gamma(K) < \gamma$ 를 만족한다는 것과  $K$ 가 식(22)의 시스템을 안정화하고  $H_\infty$  노름 유계  $\|z\|_2^2 - \gamma^2(\|v\|_2^2 + \|u\|_2^2) < 0$ , all  $(v, u) \neq 0$ 를 만족한다는 것은 등가이다.

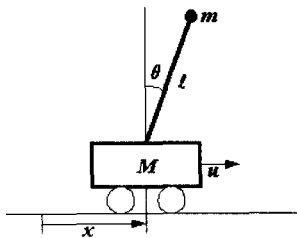
이산 특성화는 참고문헌[1]에서 보인 특성화와 동일하다.

식(13) 및 식(23)의 시스템 행렬은 같다.

### 3. 독립진자에 대한 적용

앞에서 논의한 두 방법을 독립진자 모델에 적용하여, 각 방법에 의해 구해진 등가의 이산시간 시스템 및 각 제어시스템의 시간응답과 최적  $\gamma$ 를 비교하여 두 방법의 성능특성을 비교한다.

논문에서 고려한 독립진자 시스템의 구성은 [그림 2]와 같다.



[그림 2] 독립진자 시스템

[Fig. 2] Inverted pendulum on the cart

여기서,  $x$ 와  $\dot{x}$ 는 각각 기준점에서 이동한 수레의 거리와 속도이고,  $\theta$ 와  $\dot{\theta}$ 는 각각 기준 축에서 이동한 진자의 각도와 각속도이며,  $M$ 과  $m$ 은 각각 수레와

진자의 질량,  $l$ 은 진자의 길이이다.

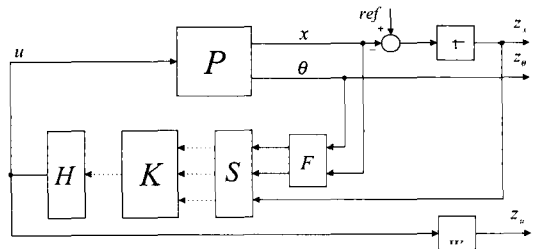
간략화를 위해 수레와 레일사이의 마찰을 무시하고, 진자 각도를  $0^\circ$ 근방으로 선형화하며, 입력을 전압  $V$ 로 변환하여 식을 정리하면, 시스템의 운동방정식은 식(24)과 같은 선형 상태공간으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_m K_g}{N_1 R r^2} & -\frac{3g}{4N_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_m K_g}{N_2 R r^2} & \frac{g}{N_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m K_g}{N_1 R r^2} \\ 0 \\ -\frac{K_m K_g}{N_2 R r^2} \end{bmatrix} V \quad (24)$$

여기서,  $K_m$ 과  $K_g$ 는 전동기 회전력 상수 역기전력 상수와 내부 치차 비이며,  $r$ 은 전동기의 치차 반지름,  $R$ 과  $F$ 은 전기자 저항과 마찰 계수이고  $g$ 는 중력가속도이다.

또한,  $N_1 = M + \frac{m}{4}$ ,  $N_2 = -\frac{4M - m}{3}$ 이다.

샘플치  $H_\infty$  제어 시스템에 있어서, 그 강건성과 성능은 일반화 제어대상 구성에 포함된 하중함수에 매우 크게 영향을 받는다. 본 논문에서는 가급적 제어기의 차수증가를 피하기 위해, 주파수 의존적인 하중을 피하고, 상수하중을 사용하였다. 제안하는 하중함수 설정 방법을 이용하기 위해서는 우선, 어떠한 하중도 포함하지 않는 일반화 제어대상을 구성할 필요가 있다. 일반화 제어대상을 구성하기 위한 블록선도는 [그림 3]과 같다.



[그림 3] 일반화 제어대상을 구하기 위한 블록선도

[Fig. 3] Block Diagram for Constructing a generalized plant

[그림 3]에서  $P$ 는 제어대상,  $x$ 는 수레위치,  $\theta$ 는 진자 각도,  $ref$ 는 기준입력,  $W_u$ 는 제어입력을 제한하는 하중이며,  $F$ 는 반-알리아싱(anti-aliasing) 여파기,

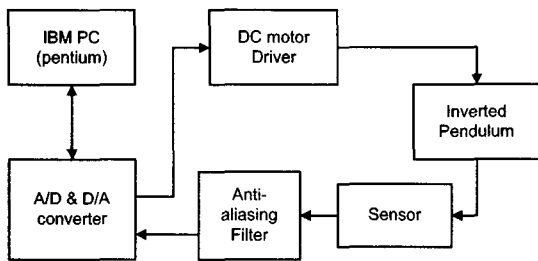
$z_x, z_\theta, z_u$ 는 제어하고자 하는 신호이다. 하중  $W_u$ 는 제어기의 대역폭 및 제어입력을 제한하기 위한 것으로 식(25)와 같다.

$$W_u = \frac{0.5(s+3)}{(s+30)} \quad (25)$$

샘플치  $H_\infty$  제어기의 설계 목표는 모델링 오차에 대한 불확실성에도 불구하고 수레의 위치가 기준 신호를 잘 추종하며, 정상상태에서의 수레위치 편차를 줄이는 것이다.

논의한 방법을 통해 등가의 이산시간 시스템을 구현하고, 시스템에 대하여 이산시간  $H_\infty$  제어이론을 적용하고, 샘플치  $H_\infty$  제어기를 구하는 MATLAB 알고리즘을 구현하였다.

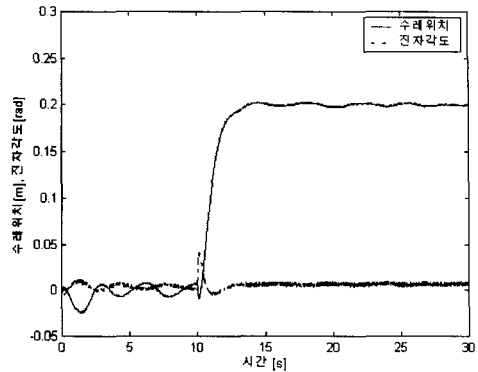
이 논문의 실험실현을 위한 실험장치 구성은 [그림 4]와 같다.



[그림 4] 실험장치 블록선도

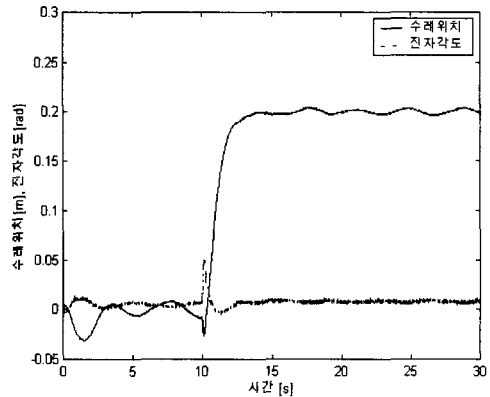
[Fig. 4] Block diagram of experiment devices

공칭모델(진자길이:0.6m, 진자질량:0.2kg)에 대한 실험실현 ( $h=0.01[s]$ )으로 [그림 5]는 최악의 경우의 폐경로 표현을 통해 구성된 등가 이산시스템에 대한 결과이고, [그림 6]은 리프팅 기법에 의해 구성된 등가 이산시스템의 결과이다.



[그림 5] 등가이산 시스템의 시간응답(0.6m, 0.2kg)

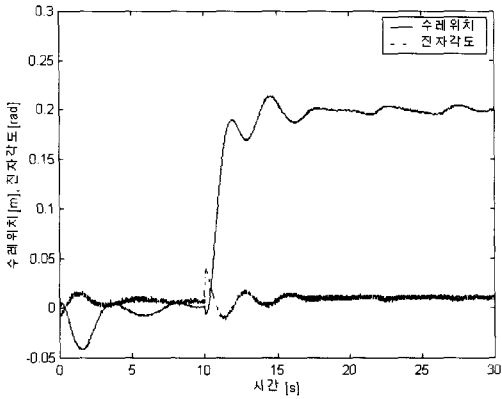
[Fig. 5] Time responses of equivalent finite-dimensional discrete-time system(0.6m, 0.2kg)



[그림 6] 리프팅 기법의 시간응답(0.6m, 0.2kg)

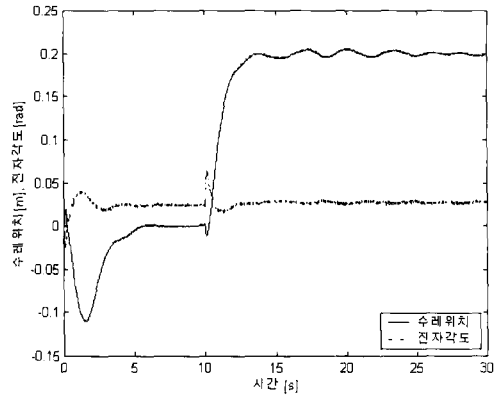
[Fig. 6] Time responses of system using lifting technique(0.6m, 0.2kg)

진자길이(0.66m) -10% 변동과 진자질량(0.5kg) 25% 변동에 대한 최악의 경우의 폐경로 표현을 통해 구성된 등가 이산시스템의 결과는 [그림 7]이고, [그림 8]은 리프팅 기법에 의해 구성된 등가 이산시스템에 대한 결과이다.



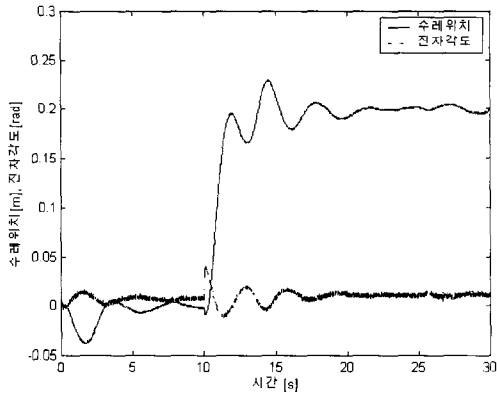
[그림 7] 등가이산 시스템의 시간응답

[Fig. 7] Time responses of equivalent finite-dimensional discrete-time system



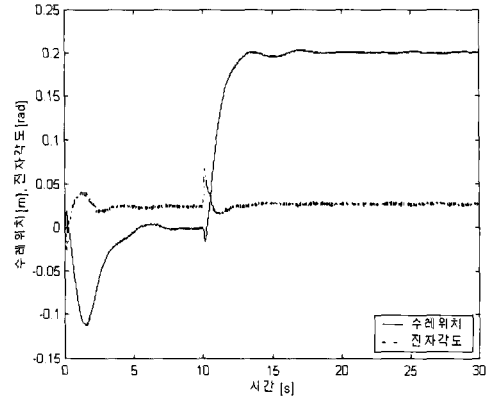
[그림 9] 등가이산 시스템의 시간응답

[Fig. 9] Time responses of equivalent finite-dimensional discrete-time system



[그림 8] 리프팅 기법에 대한 시간응답

[Fig. 8] Time responses of lifting method



[그림 10] 리프팅 기법에 대한 시간응답

[Fig. 10] Time responses of system using lifting technique

진자길이(0.3m) -50% 변동과 진자질량(0.05kg) -250% 변동을 주었을 때 최악의 경우의 폐경로 표현을 통해 구성된 등가 이산시스템은 [그림 9]와 같은 결과를 나타내고, 리프팅 기법에 의해 구성된 등가 이산시스템은 [그림 10]와 같은 결과를 나타낸다.

[그림 10]를 살펴보면, 불확실성을 고려한 시스템의 응답이 진자 길이와 질량의 변동에도 강건하며, 정상상태에서의 수레위치에 대한 성능이 악화되지 않음을 알 수 있다.

## 6. 결론

이 논문에서는 샘플치  $H_\infty$  문제에 대하여 리프팅 기법을 사용하지 않고, Toivonen과 Sgfors가 제안한, 최악의 경우에 대한 이산화 절차를 연구하였다. 이 방법은 이산 문제 특성화를 유도하기 위해서 표준 선형 2차 이론의 결과를 이용하였으며, 그 절차는 한번의 행렬 지수함수 풀이만으로 등가 이산시간 시스템이 얻어지므로 리프팅 기법에 비해 매우 간단하다. 특히, 이 방법에 의한 결과는 리프팅 기법의 결과와 수학적으로 서로 등가임이 증명되어 있으며, 본 연구에서는 실제 예제에 적용하여 두 방법의 등가성을 확인할 수 있었다.

또한, 본 연구에서는, 시스템의 성능 및 강건성과 밀접한 관련이 있는 하중함수 설정에 있어서, 제어기의 차수 증가를 피하기 위해, 가급적 상수하중만을 이용하면서도 폐경로 시스템의 강건성과 성능을 만족하도록 하는 방법에 대하여 연구하여 설계절차의 간소화를 시도하였고, 실제 도입진자 시스템에 대한 모의실험과 실물실험을 통하여, 하중함수 설정이 시스템의 모델 불확실성에도 불구하고 수레의 위치편차를 줄이는 성능을 가짐을 보였다.

### ※ 참고문헌

[1] B. Barmieh and J. B. Pearson, "A general framework for linear periodic systems with application to  $H_\infty$  sampled-data control", IEEE Trans. Automat. Control, vol. 37, pp. 418 - 435, 1992.

[2] T. Chen and B. A. Francis, Optimal Sampled-Data Control Systems, Springer-Verlag, 1995.

[3] W. Sun, K. M. Nagpal and P. P. Khargonekar, " $H_\infty$  control and filtering for sampled-data systems", IEEE Trans. Automat. Control, vol. 38, pp. 1162 - 1175, 1993.

[4] H. T. Toivonen, Digital control with  $H_\infty$  optimality criteria, Control and Dynamic Systems, vol. 71, pp. 215 - 262, 1995.

[5] B. Bamieh, J.B. Pearson, B.A. Francis, and A. Tannenbaum, "A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control" Systems & Control Letters, vol. 17, pp. 79-88, 1991.

[6] P. A. Iglesias, K. Glover, "State space approach to discrete time  $H_\infty$  control", Int. J. Control, vol. 54, pp. 1031-1073, 1991.

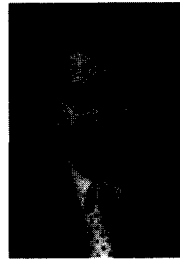
[7] H. T. Toivonen and M. F. Sågfors, "The sampled-data  $H_\infty$  problem: a unified framework for discretization-based methods and Riccati equation solution", INT. J. Control, vol. 66, No. 2, pp. 289 - 309, 1997.

[8] R.W. Brockett, Finite dimensional linear systems, John Wiley And Sons, INC., 1790

[9] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems", IEEE Trans. Auto. Control, vol. AC-34, pp. 831-847, 1989.

[10] K. Zhou, Robust and optimal control, Prentice Hall, 1996.

### 조도현



1987년 광운대학교 전자공학과 졸업(공학사)  
 1990년 동 대학 대학원 전자공학과 석사과정 졸업(공학석사)  
 1998년 동 대학원 제어계측공학과 박사과정 졸업(공학박사)  
 1991~1993년 LG전자 중앙연구소 근무  
 1998~1999년 삼성종합기술원 근무  
 2001~현재 혜전대학 전자계열 교수  
 관심분야 : 강건성제어, 로봇제어, PLC응용

### 박진홍



1991 광운대학교 전자공학과 졸업  
 1993 광운대학교 대학원 전자공학과 공학석사  
 1997 광운대학교 대학원 전자공학과 공학박사  
 1992 - 현재 혜전대학 전자계열 전임강사