

Optimal Control of Distributed Parameter Systems Via Fast WALSH Transform

金 泰 勳* · 金 珍 泰** · 李 勝*** · 安 斗 守§
 (Tai-Hoon Kim · Jin-Tae Kim · Seung Lee · Doo-Soo Ahn)

Abstract - This study uses distributed parameter systems as the spatial discretization technique, modelling in lumped parameter systems, and applies fast WALSH transform and the Picard's iteration method to high order partial differential equations and matrix partial differential equations. This thesis presents a new algorithm which usefully exercises the optimal control in the distributed parameter systems.

In exercising optimal control of distributed parameter systems, excellent consequences are found without using the existing decentralized control or hierarchical control method. This study will help apply to linear time-varying systems and non-linear systems. Further research on algorithm will be required to solve the problems of convergence in case of numerous applicable intervals.

Key Words : distributed parameter system, fast Walsh transform, optimal control

1. 서 론

대부분의 시스템은 그 구조가 시간과 공간에 널리 분포되어 있기 때문에 집중정수 모델로 표현하여 시스템의 동적 특성을 해석하고 제어하기에는 여러 가지 문제점들이 있다. 시스템의 상태는 시간과 공간의 영향을 받는 상태변수가 되므로 그 동적 특성은 편미분 방정식으로 표현되어 분포정수계로 모델링하게 된다.[1-2]

분포정수계는 시스템이 두 개 이상의 독립변수로 표현되고, 또한 각 변수에 대한 미분을 포함하는 편미분 방정식으로 표현되므로 분포정수계에 직접적인 최적제어 논리를 도입하여 최적화하는 것은 매우 어렵다. 따라서 분포정수계를 특정 동적점(equilibrium point)에서 집중정수계로 변환한 후 기존의 최적제어방법을 도입함으로써 분포정수계의 최적화를 수행하고 있다.[3-4]

분포정수계를 집중정수계로 모델링하여 처리 할 경우 매우 큰 차원의 시스템으로 변환되어 제어기의 설계가 어렵고 분산형 제어이론을 도입 할 경우 분산된 각 부 시스템간의 상호 정보 전달관계의 처리에 있어서 복잡한 과정을 거쳐야 하는 어려움이 있다.

1973년 M.S. Corrigton[5]은 WALSH 함수 유한급수전개를 이용하여 미분방정식의 해를 구하는 방법을 제시하였는데, 이 방법에 의하면 미분방정식으로 주어진 시스템에 WALSH 함

수 및 그 특성을 이용함으로써 시스템의 정보를 간략화된 행렬대수방정식으로부터 얻을 수 있다. 이러한 이유에서 시스템 해석 및 제어이론 등에 직교함수 (orthogonal functions)가 도입되고 있다.[6-7]

C. F. Chen 과 C. H. Hsiao[8]가 WALSH 함수 유한급수전개를 이용하여 시스템의 해석을 위한 알고리즘을 개발하였으나 그 적용대상이 선형 시불변계의 해석 및 제어 문제에 국한되었다. 그 후 구간 $[0, T]$ 에서 WALSH 함수 유한급수전개를 이용하는 기법이 사용되었는데, 이는 세부구간 $[0, T/m]$ 에서 WALSH 함수 단일항 전개를 이용하고 이를 m 번 반복 적용하는 효과와 같다는 사실에 근거한 WALSH 함수 단일항 전개 (Single Term Walsh Series)를 이용하는 방법이다. 이 방법은 선형계 뿐만 아니라 비선형계에서의 응용이 간편하여 현재까지 널리 이용되고 있다[9-10]. 그러나 WALSH 함수 단일항 전개 방법은 WALSH 함수의 고유특성을 배제한 방법으로서, WALSH 함수 단일항 전개방법은 기존 WALSH 함수의 특성을 이용할 수 없으며, 응용분야에 한계가 있다.

본 연구에서 제시하고자하는 새로운 알고리즘은 WALSH 함수 고유 특성을 그대로 유지할 수 있는 유한급수전개방법을 이용하면서, 계산의 편리성을 위하여 고속 WALSH 변환[11]을 사용하는 것이다.

본 연구에서 제시하는 알고리즘을 이용하게 되면, 기존의 WALSH 함수를 사용할 경우 문제가 되던 역행렬 연산 과정이 필요 없게 된다.

본 연구에서는 Picard의 반복연산법[12]을 적용하여 시스템을 해석하기 위하여, 상태방정식을 적분방정식으로 변환하고, 적분 항에 포함된 미지의 상태벡터를 최초 초기조건으로 가정하여 적분방정식으로부터 상태벡터를 구하고, 이 값을 다시 적분 항에 포함된 상태벡터에 치환하여 새롭게 수정된 상태벡터를 구하였으며, 반복연산을 통하여 오차가 0으로 수렴할 때의

* 正 會 員 : 프라임테크 선임연구원
 ** 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 博士課程
 *** 正 會 員 : 大林大 自動化 시스템 工學科 教授 · 工博
 § 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 教授 · 工博
 接受日字 : 2001年 4月 12日
 最終完了 : 2001年 9月 5日

상태벡터를 찾아내고자 하였다. 또한 WALSH 함수의 특성을 이용하여 미분방정식을 간략화 된 대수방정식으로 변환하여 처리할 수 있도록 하였다. 그리고 WALSH 함수를 도입할 때 수반되는 적분연산행렬이 많은 0 요소를 포함하는데 착안하여 고차적분연산행렬을 직접 이용하지 않고 대응되는 요소만을 이용하여 리카티방정식의 해 및 시스템의 해를 보다 간편하게 결정할 수 있음을 보였다.

본 연구에서 고려한 분포정수계의 형태는 고차 편미분형, 행렬 편미분형으로서, 이를 공간분할기법을 이용하여 상미분방정식으로 표현되는 집중정수계로 모델링하였고, 고속 WALSH 변환과 Picard의 반복연산법에 의하여 분포정수계의 최적제어를 수행하여 최적제어입력을 결정하였으며, 그 결과를 Sage의 방법과 비교 검토하였다.

2. 고속월쉬변환[11]

고속월쉬변환은 이산월쉬변환을 보다 신속하게 처리하기 위해 사용된다. 월쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 모든 월쉬함수는 m 개의 세부구간에서 +1 혹은 -1 의 값만으로 구성되므로 각 월쉬계수들은 원 함수의 이산값들의 가·감산에 의하여 간단히 계산할 수 있다. 고속월쉬변환 알고리즘은 Welch과 Guinn에 의해 제시되었으며 고속푸우리에변환(fast Fourier transform)의 주파수축을 알고리즘(decimation-in frequency Algorithm)을 기초로 하여 개발되었다[13].

고속월쉬변환 알고리즘은 그림 2.1과 같으며 그림에서 점선은 감산을 나타내고 실선은 가산을 나타낸다.

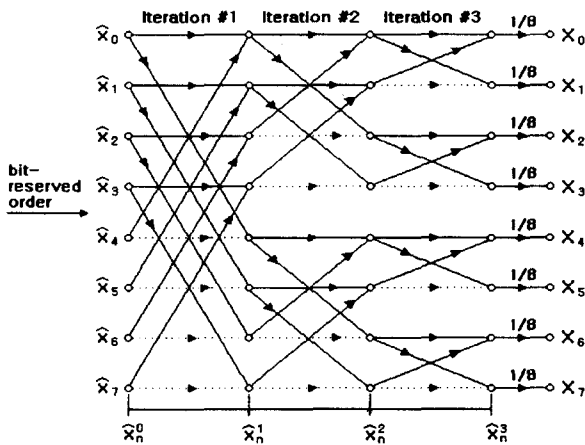


그림 2.1 고속월쉬변환 신호흐름선도

Fig 2.1 The flow diagram for a paley-order fast Walsh transform

그림에서와 같이 고속월쉬변환은 다음의 과정을 따른다.

[1] 월쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 고속월쉬변환은 $\log_2 m$ 개의 단으로 나눈다.

[2] 최초의 단($p=0$)에 \hat{x}_i 를 비트 자리바꿈(bit-reverse)하여 증가순서대로 재배열하고 p 번째 단과 $p-1$ 번째 단과의 관계는 다음과 같다.

$$x_{(h)}^p = x_{(h)}^{p-1} + x_{(j+h)}^{p-1} \tag{2.1}$$

$$x_{(j+h)}^p = x_{(h)}^{p-1} - x_{(j+h)}^{p-1} \tag{2.2}$$

단, $j = m/2^p$, $h = l + k \times 2^v$, $k = 0, 1, \dots, 2^{p-1} - 1$,
 $l = 0, 1, \dots, j - 1$, $v = \log_2(j+1)$

[3] 고속월쉬변환과 역변환은 똑같은 과정에 의해 이루어지며, 고속월쉬변환의 경우에는 식 (2.1), (2.2)의 계산결과에 $1/m$ 을 곱하면 된다.

월쉬함수 m 항전개를 이용하는 경우 고속월쉬변환은 $p (= \log_2 m)$ 개의 단계가 필요하고 각 단계에서 m 번의 가·감산이 필요하므로 총 $m \log_2 m$ 번의 가·감산을 통하여 이루어진다.

3. 분포정수계의 집중정수 모델링

3.1 분포정수계의 집중정수 모델링

분포정수계(Distributed Parameter Systems)는 공간과 시간의 함수인 2개의 독립변수를 갖는 편미분방정식으로 표현된다. 분포정수계의 해석, 제어 및 필터링 등을 위해 간단화 작업이 이루어져 왔는데, 이러한 간단화 작업은 일반적으로 편미분 방정식으로 표현되는 분포정수계를 상미분 방정식으로 표현되는 집중정수계(Lumped Parameter systems)로 변환하는 과정이 주를 이룬다.

분포정수계를 집중정수계로 변환하는 방법에는

- (1) 공간분할기법(Spatial Discretization Technique)[4]
- (2) 갤러킨(Galerkin) 접근방법[14-15]
- (3) 리쯔(Ritz) 접근방법[3,15]

등이 있는데, 본 연구에서는 첫 번째 방법인 공간분할기법을 사용하여 분포정수계를 집중정수계로 모델링하였다.

3.2 고차 편미분 방정식형태로 표현되는 분포정수계의 모델링

다음과 같은 분포정수계를 고려한다

$$\frac{\partial x(y, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial x(y, t)}{\partial y} + a_0 x(y, t) + b_0 u(y, t) \tag{3.1}$$

초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$x(y, 0) = x_0(y) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial x(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial x(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=y_l} = 0 \tag{3.3}$$

식(3.1)-(3.3)으로 표현되는 분포정수계에 대한 집중정수모델을 구하기 위해 공간분할기법의 응용방법을 적용하면 공간 위치를 나타내는 변수 y 를 $n-1$ 개로 분할하여 미소증분을

$$\Delta y = \frac{y_l}{n-1} \tag{3.4}$$

이라 하고 중앙차분법(Central Difference Formulas)을 이용하여 공간이산모델로 표현되는 집중정수모델을 결정한다.

시간의 도함수 $x(y,t)$ 를 다음과 같다고 할 때

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial t} = \frac{d}{dt} x_i(t), \text{ 단, } i=1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

중앙차분법에 의해 공간변수에 대한 2차 편미분을 근사화하여 식(3.1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i(t) &= a_2 \frac{x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)}{\Delta y^2} \\ &+ a_1 \frac{x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t)}{\Delta y} + a_0 x_i(t) + b_0 u_i(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

단, $i=1, 2, \dots, n$

따라서 식(3.1)은 다음과 같이 n개의 1차 선형 미분방정식으로 근사화된다.

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = \widehat{a}_2 x_2(t) + \widehat{a}_1 x_1(t) + \widehat{a}_0 x_0(t) + b_0 u_1(t) \quad (3.7a)$$

⋮

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = \widehat{a}_2 x_{i+1}(t) + \widehat{a}_1 x_i(t) + \widehat{a}_0 x_{i-1}(t) + b_0 u_i(t) \quad (3.7b)$$

⋮

$$\frac{d}{dt} x_n(t) = \widehat{a}_2 x_{n+1}(t) + \widehat{a}_1 x_n(t) + \widehat{a}_0 x_{n-1}(t) + b_0 u_n(t) \quad (3.7c)$$

$$\text{단, } \widehat{a}_0 = \frac{a_2}{\Delta y^2}, \widehat{a}_1 = -\frac{a_1}{\Delta y} - 2\frac{a_2}{\Delta y^2}, \widehat{a}_2 = \frac{a_1}{\Delta y} + \frac{a_2}{\Delta y^2}$$

식(3.7)에서 $x_0(t)$ 와 $x_{n+1}(t)$ 은 식(3.3)의 경계조건으로부터 결정된다. 즉, 식(3.3)의 $y=0$ 인 경계조건을 중앙차분법을 이용하여 근사화하면 식(3.7a)와 식(3.7c)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= \widehat{a}_2 x_2(t) + \widehat{a}_1 x_1(t) + \widehat{a}_0 x_0(t) + b_0 u_1(t) \\ &= \widehat{a}_2 x_2(t) + (\widehat{a}_1 + \widehat{a}_0) x_0(t) + b_0 u_1(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_n(t) &= \widehat{a}_2 x_{n+1}(t) + \widehat{a}_1 x_n(t) + \widehat{a}_0 x_{n-1}(t) + b_0 u_n(t) \\ &= (\widehat{a}_2 + \widehat{a}_1) x_n(t) + \widehat{a}_0 x_{n-1}(t) + b_0 u_n(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

따라서 식(3.1)은 다음과 같은 n차 상태방정식으로 변환할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.11)$$

단,

$$\mathbf{B} = b_0 \mathbf{I}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\widehat{a}_1 + \widehat{a}_0) & \widehat{a}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{a}_0 & \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{a}_0 & \widehat{a}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widehat{a}_0 & \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{a}_0 & (\widehat{a}_1 + \widehat{a}_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_0 = [x_0(\Delta y) x_0(2\Delta y) \dots x_0(n\Delta y)]^T \quad (3.12)$$

결국 식(3.1)의 분포정수계로 표현되는 편미분방정식이 식(3.10)의 n차 상태방정식의 집중정수계로 변환되었음을 알 수 있다.

3.3 행렬식으로 표현된 분포정수계의 모델링

다음과 같은 분포정수계를 고려한다.

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y,t)}{\partial t} = \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{x}(y,t)}{\partial y} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(y,t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(y,t) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{x}(y,0) = \mathbf{x}_0(y) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{x}(0,t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(y_f,t) = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{x}(y,t) = \begin{bmatrix} x_1(y,t) \\ x_2(y,t) \\ \vdots \\ x_p(y,t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(y,t) = \begin{bmatrix} u_1(y,t) \\ u_2(y,t) \\ \vdots \\ u_q(y,t) \end{bmatrix}$$

식(3.13)-(3.15)로 표현되는 분포정수계에 대한 집중정수모델을 구하기 위해 공간분할기법을 적용하고, 중앙차분법에 의해 공간변수를 근사화하여 다시 식(3.13)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) &= -\frac{\mathbf{A}_1}{\Delta y} \mathbf{x}_i(t) + \frac{\mathbf{A}_1}{\Delta y} \mathbf{x}_{i+1}(t) \\ &+ \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_i(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

단 $i=1, 2, \dots, n$

따라서 위 식은 n개의 1차 선형 미분방정식으로 근사화될 수 있으며, 다음과 같은 pn차 상태방정식으로 변환할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (3.17)$$

$$\text{단, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}}_0 & \widehat{\mathbf{A}}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{A}}_0 & \widehat{\mathbf{A}}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{\mathbf{A}}_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

3.4 평가함수의 모델링

분포정수계에서 식(3.18)으로 표현되는 평가함수를 최소화하는 제어입력 $u(y,t)$ 를 결정하고자 할 때, 평가함수를 집중정수모델의 평가함수로 근사화 시켜야 하는 문제를 포함하고 있다. 이 평가함수를 공간분할기법에 의하여 근사화 하는 방법은, 다음과 같은 평가함수에서

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{y_f} [x^2(y,t) + u^2(y,t)] dy \right\} dt \quad (3.18)$$

대괄호로 표시된 수식을 공간분할기법에 의해 다음과 같이 근사화하여서

$$\begin{aligned} J_y &= \int_0^{y_f} [x^2(y,t) + u^2(y,t)] dy \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^2(i\Delta y, t) + x^2((i+1)\Delta y, t)}{2} \Delta y \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u^2(i\Delta y, t) + u^2((i+1)\Delta y, t)}{2} \Delta y \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \{x_i^2(t) + u_i^2(t)\} + \frac{x_1^2(t) + x_n^2(t)}{2} + \frac{u_1^2(t) + u_n^2(t)}{2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

단, $x_i(t) = x(i\Delta y, t)$

식(3.18)을 다음과 같이 만드는 것이다.

$$J = \frac{1}{2} \Delta y \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (3.20)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4. 고속 WALSH 변환에 의한 분포정수계의 해석 및 최적제어

4.1 고속 WALSH 변환에 의한 분포정수계의 최적제어

다음과 같이 편미분 방정식으로

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} + a_0 x(y,t) + b_0 u(y,t) \quad (4.1)$$

또는 행렬식으로 다음과 같이 표현되는 분포정수계에서

$$\frac{\partial \mathbf{x}(y,t)}{\partial t} = \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{x}(y,t)}{\partial y} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(y,t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(y,t) \quad (4.2)$$

다음의 평가함수를 최소화하기 위한

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{y_f} [x^2(y,t) + u^2(y,t)] dy \right\} dt \quad (4.3)$$

최적제어문제는, 공간분할기법에 의한 집중정수 모델링을 통하여 다음과 같이 표현되는 시스템에서

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

평가함수 J 를 최소화 하도록 하는

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (4.5)$$

최적제어 문제로 변형된다. 최적제어 벡터 $\mathbf{u}(t)$ 는 최대 원리에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \\ &= -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2 고속 WALSH 변환에 의한 리카티해 및 최적제어 입력의 결정

식(4.6)에서 $\mathbf{K}(t)$ 는 리카티해로 다음의 2점 경계치 문제로부터 그 해를 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

단, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}(T) = 0$

$\tau = T - t$ 로 치환하면 식(4.7)은 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

단, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}(0) = 0$

위 식(4.8)의 상태전이 행렬을

$$\boldsymbol{\Phi}(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11}(\tau) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(\tau) \\ \boldsymbol{\Phi}_{21}(\tau) & \boldsymbol{\Phi}_{22}(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

라 하면 $\boldsymbol{\lambda}(0) = 0$ 이므로 식(4.8)의 해를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}_{11}(\tau) \mathbf{x}(0) \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}_{21}(\tau) \mathbf{x}(0) \quad (4.11)$$

식(4.10)에서 $\mathbf{x}(0)$ 를 식(4.11)에 대입하면

$$\lambda(\tau) = \Phi_{21}(\tau) \Phi_{11}^{-1}(\tau) \mathbf{x}(\tau) \quad (4.12)$$

최적제어벡터는 식(4.6)과 식(4.12)에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \Phi_{21}(T-t) \Phi_{11}^{-1}(T-t) \mathbf{x}(t) \\ &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

단, $\mathbf{K}(\tau) = \Phi_{21}(\tau) \Phi_{11}^{-1}(\tau)$

따라서 식(4.9)의 상태천이행렬을 구함으로써 리카티해를 결정할 수 있다. 상태천이행렬은 식(4.8)-(4.11)로부터 알 수 있듯이 다음의 초기조건을 이용하여

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

단, $(p=1, 2, \dots, n)$

식(4.8)의 해를 구함으로써 결정할 수 있다. 단, \mathbf{e}_p 는 p 번째 요소만 1이고 나머지 요소는 모두 0인 n 차 열 벡터이다. 식(4.8)의 초기조건을 식(4.9)로 하고 $\mathbf{x}(\tau)$ 와 $\lambda(\tau)$ 를 구하면

$\Phi_{11}(\tau)$ 와 $\Phi_{21}(\tau)$ 의 p 번째 열 벡터가 구해진다.

p 번째 열벡터는 다음의 과정으로 결정된다. 식(4.15)를 적분하고

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + \mathbf{F} \int_0^\tau \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (4.15)$$

편의상 다음과 같이 식(4.16)으로 나타낸다.

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{F} \int_0^\tau \mathbf{y}(\tau) d\tau \quad (4.16)$$

단, $\mathbf{y}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

식(4.16)의 해를 최초 $\mathbf{y}^0(t) = \mathbf{y}_0$ 로 가정하여 해를 구하고 반복 적용할 때 k 번째의 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}^k(\tau) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{F} \int_0^\tau \mathbf{y}^{k-1}(\tau) d\tau \quad (4.17)$$

$\mathbf{y}^k(\tau)$ 와 초기조건을 각각 WALSH 함수로 전개하여 식(4.17)에 대입하고 적분연산행렬을 도입하면 다음의 식(4.18)을 얻을 수 있고,

$$\mathbf{Y}^k \mathbf{Wal}(\tau) = \mathbf{Y}_0 \mathbf{Wal}(\tau) + \mathbf{F} \mathbf{Y}^{k-1} \mathbf{P} \mathbf{Wal}(\tau) \quad (4.18)$$

단, \mathbf{Y}^k 는 $\mathbf{y}^k(\tau)$ 의 WALSH 계수 행렬,

$\mathbf{Wal}(\tau)$ 는 m 개의 WALSH 함수로 구성되는 m 차 벡터

여기에서 양변의 WALSH 벡터를 소거하면 다음의

$$\mathbf{Y}^k = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{F} \mathbf{Y}^{k-1} \mathbf{P} \quad (4.19)$$

대수방정식으로부터 $\mathbf{y}^k(\tau)$ 의 WALSH 계수행렬 \mathbf{Y}^k 을 구할 수 있다. 식(4.19)의 계산은 다음과 같이 이루어진다.

(1) $i=0$ 인 경우

$$\mathbf{Y}_i^k = \mathbf{Y}_{00} + \mathbf{F} \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{j+1}} \mathbf{Y}_{2^j-1}^{k-1} \quad (4.20)$$

(2) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단, $n=1, 2, \dots, p-1$)인 경우

$$\mathbf{Y}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \mathbf{F} \mathbf{Y}_{2^n-1-i}^{k-1} + \mathbf{F} \sum_{j=n+1}^k \frac{1}{2^{j+1}} \mathbf{Y}_{2^j-1-i}^{k-1} \quad (4.21)$$

(3) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단, $n=p$)인 경우

$$\mathbf{Y}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \mathbf{F} \mathbf{Y}_{2^n-1-i}^{k-1} \quad (4.22)$$

이상에서 구한 \mathbf{Y}^k 로부터 고속 WALSH 역변환을 이용하여 $\mathbf{y}^k(\tau)$ 를 구한 다음 식(4.23)의 오차가 0으로 수렴될 때까지 위의 과정을 반복한다.

$$e(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}^k(\tau) - \mathbf{y}^{k-1}(\tau)\| \quad (4.23)$$

위 오차 $e(\tau)$ 가 0으로 수렴될 때의 $\mathbf{y}^k(\tau)$ 가 식(4.16)의 해인 $\mathbf{y}(\tau)$ 이다.

이상에서 구한 $\mathbf{y}(\tau)$ 는 식(4.14)의 초기조건에 의한 결과로 $\Phi_{11}(\tau)$ 와 $\Phi_{21}(\tau)$ 의 p 번째 열 벡터와 같다. 그러므로 식(4.7)의 모든 초기조건에 대한 식(4.15)의 해를 구함으로써 상태천이행렬 $\Phi_{11}(\tau)$ 와 $\Phi_{21}(\tau)$ 를 결정할 수 있고 이로부터 리카티해, 최적제어입력을 구할 수 있다.

4.3 고속 WALSH 변환에 의한 최적상태 결정

또한 최적상태는 4.2절에서 구해진 최적제어입력을 이용하여 다음의 과정을 따라 구할 수 있다.

먼저 구해진 식(4.6)을 식(4.4)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t)] \mathbf{x}(t) \quad (4.24)$$

식(4.24)의 양변을 적분하여 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\gamma}(\tau) d\tau \quad (4.25)$$

단, $\boldsymbol{\gamma}(\tau) = [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\tau)] \mathbf{x}(\tau)$

식(4.25)의 해를 최초에 $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ 로 가정하여 k 번 반복적용 했을 때의 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\gamma}^{k-1}(\tau) d\tau \quad (4.26)$$

식(4.26)의 양변의 벡터들을 각각 WALSH 변환하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{X}_i^k \text{Wal}(i,t) = \mathbf{X}^k \text{Wal}(t) \quad (4.27)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{k-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{\Gamma}_i^{k-1} \text{Wal}(i,t) = \boldsymbol{\Gamma}^{k-1} \text{Wal}(t) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{X}_{0,i} \text{Wal}(i,t) = \mathbf{X}_0 \text{Wal}(t) \quad (4.29)$$

여기서 $\boldsymbol{\Gamma}^{k-1}$ 은 $\boldsymbol{\gamma}^{k-1}(\tau)$ 의 WALSH 계수행렬로 Picard의 반복연산에서 나타나는 이전 단계에서 구한 $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 와 시스템 행렬 및 리카티해의 곱을 고속 WALSH 변환하여 구할 수 있다.

식(4.26)에 식(4.27)~(4.29)의 관계 및 적분연산행렬을 도입하면 다음과 같다

$$\mathbf{X}^k \text{Wal}(t) = \mathbf{X}_0 \text{Wal}(t) + \boldsymbol{\Gamma}^{k-1} \mathbf{P} \text{Wal}(t) \quad (4.30)$$

식(4.30)의 양변의 WALSH 벡터를 소거한 후 다음의

$$\mathbf{X}^k = \mathbf{X}_0 + \boldsymbol{\Gamma}^{k-1} \mathbf{P} \quad (4.31)$$

대수방정식으로부터 $\mathbf{x}^k(t)$ 의 계수 \mathbf{X}^k 를 구할 수 있으며 그 과정은 다음과 같다.

(1) $i=0$ 인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = \mathbf{X}_{00} + \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{j+1}} \boldsymbol{\Gamma}_{2^j-1}^{k-1} \quad (4.32)$$

(2) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단, $n=1, 2, \dots, p-1$)인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \boldsymbol{\Gamma}_{2^n-1-i}^{k-1} + \sum_{j=n+1}^p \frac{1}{2^{j+1}} \boldsymbol{\Gamma}_{2^j-1-i}^{k-1} \quad (4.33)$$

(3) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ (단, $n=p$)인 경우

$$\mathbf{X}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} \boldsymbol{\Gamma}_{2^n-1-i}^{k-1} \quad (4.34)$$

식(4.32)~(4.34)에서 구한 \mathbf{X}^k 를 고속 WALSH 역변환하면 $\mathbf{x}^k(t)$ 를 구할 수 있으며 전 단계의 반복연산에서 구한 $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 와 비교하여 다음의 오차가 0으로 수렴할 때까지 반복한다.

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t)\| \quad (4.35)$$

식(4.35)의 오차를 만족할 때의 $\mathbf{x}^k(t)$ 가 식 (4.24)의 해인 $\mathbf{x}(t)$ 가 되며, 바로 최적상태가 된다.

5. 적용예 : 고정된 금속판의 열 교환

금속판을 분포적으로 가열시킬 때 금속판의 온도의 분포는 식(5.1)과 같은 편미분 방정식의 분포정수계로 표현된다.

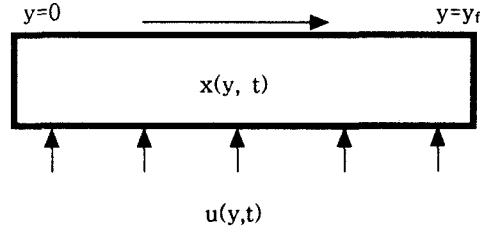


그림 5.1 금속판의 분포적인 가열
Fig. 5.1 Distributed Heating Thin Metal

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial y^2} + u(y,t) \quad (5.1)$$

$$x(y,t_0 = 0) = x_0(y) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial x(y,t)}{\partial y} \Big|_{y=y_f} = 0 \quad (5.3)$$

여기서 $x(y,t)$ 는 금속판의 온도이며 $u(y,t)$ 는 금속판을 분포적으로 가열시키는 가열입력이다. 다음의 평가함수를 최소화 하는 $u(y,t)$ 를 구하는 문제를 고려한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \int_0^{y_f} [Qx^2(y,t) + Ru^2(y,t)] dy \right\} dt \quad (5.4)$$

식(5.1)에 대한 집중정수모델을 얻기 위하여 공간분할기법을 이용한다. 길이가 y_f 인 금속판을 n 개로 분할하고 분할된 부분에서의 온도 분포는 시간의 함수로 표현된다. 이때 증분의 크기는 $\Delta y = \frac{y_f}{n-1}$, $n=5$ 이다. 식(5.1)로 표현되는 분포정수계를 확산방정식에서 초기 조건을 다음과 같다고 할 때

$$x(y,0) = 1 + y, \quad Q = R = 1 \\ y_f = 4.0, \quad t_f = 1.0, \quad \Delta y = 1.0$$

이산화 표현된 분포정수계는 다음과 같은 집중정수계로 모델링된다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_5(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_5(t) \end{bmatrix}$$

또한 식(5.4)는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (5.6)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

그림 5.2, 5.4는 분포정수계의 최적제어입력을, 그림 5.3, 5.5는 분포정수계의 최적상태궤적을 4장의 과정에 의해 얻은 결과로, 분포정수계를 5차의 집중정수계로 모델링하고 WALSH 함수 64항 전개를 이용하여 얻은 결과이다.

그림 5.3에서 5개의 상태변수는 금속판의 온도분포 $x(y,t)$ 를 4개로 분할하여 집중정수계로 모델링할 때 나타나는 상태변수이다. 즉 $x_1(t)$ 는 $y=1$ 일 때의 금속판의 온도변화인 $x(1,t)$ 를 의미하며, $x_2(t)$ 는 $y=1+\Delta y$ 일 때의 금속판의 온도변화인 $x(2,t)$ 를 의미한다. 나머지 상태변수도 마찬가지이다.

이들 집중정수 모델에 대한 상태변수를 합성하여 분포정수계의 온도분포를 나타내는 변수 $x(y,t)$ 를 3차원 그래프로 나타내면 그림 5.4와 같다.

이와 같은 궤적에 대한 최적제어입력 값을 그림 5.2, 5.4에 나타냈다. 그림 5.2의 제어입력 들은 각 지점에서의 가열입력을 나타낸다. $u_1(t)$ 는 $y=1$ 에서의 가열입력 즉 $u(1,t)$ 를 의미하며, $u_2(t)$ 는 $y=1+\Delta y$ 일 때의 가열입력 $u(2,t)$ 를 의미한다. 나머지 가열입력도 마찬가지이다. 그림 5.2를 합성하여 3차원 그래프로 나타내면 그림 5.4와 같다.

6. 검토 및 고찰

본 연구의 적용 예에서는 Picard의 반복연산에서 나타나

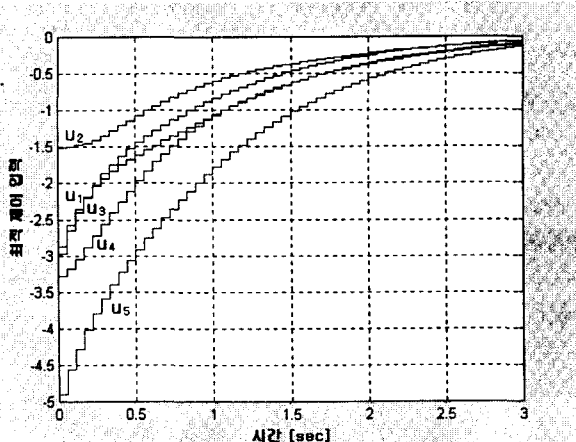


그림 5.2 적용 예 5.1의 최적제어입력(2차원)
Fig. 5.2 Optimal Control Input of Example 5.1(2D)

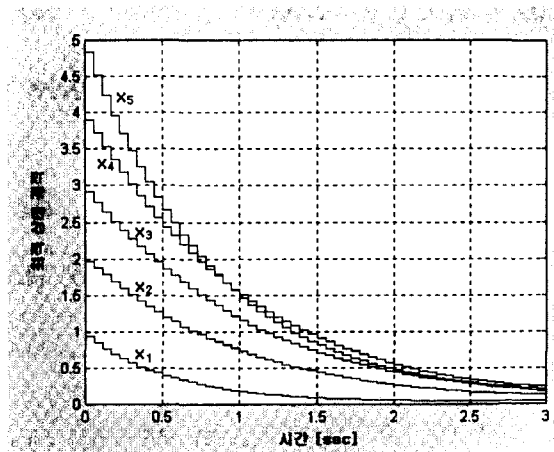


그림 5.3 적용 예 5.1의 최적 상태 궤적(2 차원)
Fig. 5.3 Optimal State Trajectory of Example 5.1(2D)

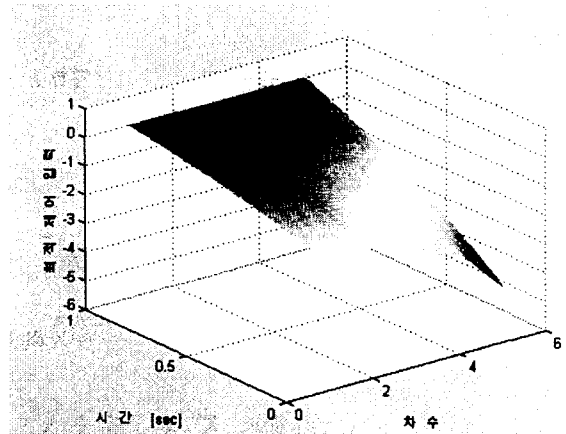


그림 5.4 적용 예 5.1의 최적제어입력 (3차원)
Fig. 5.4 Optimal Control Input of Example 5.1 (3D)

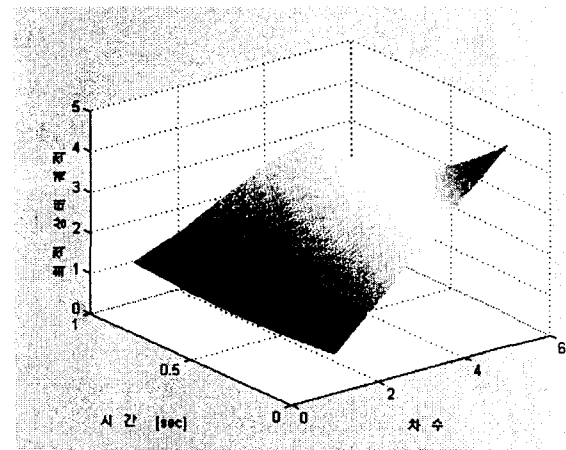


그림 5.5 적용 예 5.1의 최적 상태 궤적(3 차원)
Fig. 5.5 Optimal State Trajectory of Example 5.1(3D)

는 오차의 수렴 한계값을 10^{-8} 으로 하였을 때의 결과이다. 적용 예와 유사한 연구 결과는 A.P. Sage[16]와 M.L. Wang[17], 안두수와 이명규[18]등에 의해 얻어진바 있다.

Sage는 단순히 공간분할기법만을 사용하여 분포정수계를 집중정수계로 모델링하여 일반적인 최적제어를 수행하였고, Wang은 레젠드라 함수의 특성을 이용하여 레젠드라 계수들을 상태벡터로 구성되는 집중정수 모델을 구성하고 여기에 직접 최적제어를 적용하여 같은 결과를 얻었으며, 안두수와 이명규는 분산형 최적제어를 도입하여 같은 결과를 얻었다.

표 6.1에서는 본 연구의 방법을 사용하여 구한 평가함수의 값과, Sage가 일반적인 최적제어 방법을 사용하여 구한 평가함수 값[16]을 비교하여 나타내었다. 두 방법 모두 전개항수를 증가시키에 따라 평가함수 값이 감소함을 알 수 있었다.

표 6.1 예제의 평가함수 값 비교

Table 6.1 Comparison of Performance Values of Example

M	본 연구	Sage의 방법
64	.1541866E+02	.1547371E+02
32	.1541917E+02	.1552859E+02
16	.1542124E+02	.1563721E+02

표 6.2는 본 연구의 2점 경계치 문제에서 나타나는 반복 연산의 횟수와 오차의 수렴여부를 나타낸다. 오차수렴에 있어 전개항수가 증가하여도 반복횟수에 커다란 변화가 없었다. 그러나 동일한 반복 횟수에서는 전개항수가 커질수록 오차가 약 50%씩 줄고 있음을 알 수 있다.

또한 적용 예에서 그림 5.2와 5.3은 최적제어입력과 최적 상태궤적의 결과를 2차원적으로 도시하여 수렴성을 나타내었으며 그림 5.4와 5.5는 시뮬레이션 결과를 3차원적으로 도시한 결과로서 이를 통하여 고차계에서의 각각의 상태벡터와 제어벡터의 공간적 변화 모형을 추론할 수 있는 자료로 활용할 수 있으리라 사료된다.

여기서 최적상태궤적을 살펴보면 $x_1(t)$ 가 매우 잘 수렴함과 더불어 전체적인 시스템의 최적제어가 잘 수행됨을 알 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서는 분포정수계를 공간분할기법을 사용하여 집중정수계로 모델링하고 고속 WALSH 변환과 Picard의 반복연산법을 고차 편미분 방정식과 행렬 편미분 방정식에 적용하여 분포정수계의 최적제어를 간편하게 수행할 수 있는 새로운 알고리즘을 제시하였다.

본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) WALSH 함수 단일항 전개방법은 세부구간 수만개의 시스템차수에 해당하는 수많은 역행렬의 계산을 필요로 하나 본 연구방법에서는 이러한 역행렬의 연산이 필요 없다.

(2) 식(4.20)~식(4.22)에서 보는 것과 같이, WALSH 함수를 도입할 때 수반되는 고차 적분연산행렬에 포함된 많은 0 요소들을 연산에서 제외할 수 있기 때문에 리카티 방정식의 해 및 시스템의 해를 보다 간편하게 결정할 수 있다.

표 6.2 적용 예에 대한 오차의 수렴정도($e(t) \leq 10^{-8}$)

Table 6.2 Convergence of Error of Example

전개 반복 횟수	m=16	m=32	m=64
1	.468292E-01	.234318E-01	.117180E-01
2	.601565E-01	.300781E-01	.150391E-01
3	.443249E-01	.220491E-01	.110104E-01
4	.254412E-01	.125000E-01	.622264E-02
5	.105497E-01	.506904E-02	.250920E-02
6	.340240E-02	.157893E-02	.774654E-03
7	.863818E-03	.381492E-03	.184779E-03
8	.179054E-03	.739997E-04	.352223E-04
9	.307340E-04	.116675E-04	.542886E-05
10	.448566E-05	.153300E-05	.693202E-06
11	.563066E-06	.169517E-06	.740130E-07
12	.620790E-07	.160920E-07	.000000E-00
13	.000000E-00	.000000E-00	

(3) 고속 WALSH 변환과 Picard의 반복연산법에 의한 단순한 가·감산처리에 의하여, 분포정수계를 집중정수계로 모델링할 경우 시스템의 차수가 증가하게 되는데에 따른 연산량의 증가에 무관하게 시스템의 해석 및 최적제어를 수행할 수 있다.

(4) WALSH 함수의 고유특성을 표출할 수 있는 WALSH 함수 유한급수 전개를 사용하였고, WALSH 함수의 전개 항수에 관계없이 분포정수계의 해석 및 최적제어를 수행하였다.

위에서 언급한 결론을 통하여 분포정수계의 최적제어를 수행함에 있어 기존의 분산형 제어나 계층별 제어 등의 기법을 사용하지 않고도 우수한 결과를 얻을 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Seidman, T.I., "Approximation Methods for Distributed Parameter Systems", Distributed Parameter Systems, Pergamon Press, Elmsford, NY, pp273-, 1983
- [2] Kitamura, s., Y.Taniguchi, "Parameter Estimation of One and Two-Dimensional Heat Conduction Processes using a Microcomputer", Int. J. of Control, Vol.34, pp955-, 1981
- [3] G.R. Spalding, "Modeling Techniques for Distributed Parameter Systems", Control and Dynamic Systems, Academic Press, pp105-130, 1982
- [4] D.J. Cooper, "Comparition of linear distributed parameter filters to lumped approximants", AICHE J., Vol.32, pp.186-194, 1986
- [5] M.S.Corrington, "Solution of Differential and Integral Equations with Walsh Functions", IEEE Trans. Circuit

- Theory, vol.20, pp.470-476, 1973
- [6] M.Razzaghi, "Fourier Series Approach for the Solution of Linear Two-Point Boundary Value Problems with Time Varying Coefficients", Int.J.System Science, vol.21, no.9, pp.1783-1794, 1990
- [7] F.L.Lewis and D.W.Foutain, "Walsh Function Analysis of Linear and Bilinear Discrete Time Systems", Int. J. Control, vol.53, no.4, pp.847-853, 1991
- [8] C.F.Chen and C.H.Hsiao, "A State Space Approach to Walsh Series Solution of Linear Systems", Int.J.System Science, vol.6, pp.833-842, 1975
- [9] 이한석, 안두수, "월쉬단일항전개를 이용한 비선형계의 3계층 최적 제어", 대한전기학회논문지, 제45권, 제12호, pp.1769-1776, 1996
- [10] Jian-Min Zhu, "Novel Approach to Hierarchical Control via Single Term Walsh Series Method", Int. J. System Science, vol.19, no.9, pp.1859-1870, 1988
- [11] 안두수, "직교함수와 응용". 복두출판사, 1997
- [12] Ronald R.Mohler, *Nonlinear Systems*, vol.1, Prentice Hall, 1991
- [13] Koda, M. , "Finite Difference Implementation of Distributed Parameter Filters", Automatica, Vol.15, pp.687-, 1979
- [14] Y.Yoshimura, "Identification on heat transfer system using the Galerkin method", Int.J.System Science, Vol.13, pp. 247-255, 1982
- [15] S. G. Tzafestas, "Design of distributed parameter optimal controllers and filters via Walsh-Galerkin expansions", Control System Lab. Uni. of Patras, Greece, pp.201-217, 1978
- [16] A.P. Sage, "Optimal system control", Prentice-Hall, N.J., 1977
- [17] M.L.Wang, R.Y.Chang, "Optimal Control of Linear Distributed Parameter Systems by Shifted Legendre Polynomials", Trans.of ASME, Vol.105, pp.222-226, 1983
- [18] 안두수, 이명규, "분포정수계의 분산형 최적제어에 관한 연구", 대한전기학회 논문지, Vol 39, No.10, pp.1075-1085, 1990

저 자 소 개



김 태 훈 (金 泰 勳)

1971년 2월 1일 생. 1995년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1997년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~현재 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 박사과정

Tel : 031-290-7167

E-mail : taihoon@netsgo.com



이 승 (李 勝)

1963년 5월 12일 생. 1988년 성균관대 공대 전기공학과 졸업. 1990년 성균관대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2000년 성균관대 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1993~현재 대림대 자동화시스템공학과 공학

부 부교수

Tel : 031-467-4890, 4853

E-mail : slee@daelim.ac.kr



김 진 태 (金 珍 泰)

1972년 1월 1일 생. 1997년 경성대 공대 전기공학과 졸업. 1999년 성균관대 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~현재 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터공학과 박사과정

Tel : 031-290-7167

E-mail : oshkjt@ece.skku.ac.kr



안 두 수 (安 斗 守)

1937년 6월 9일 생. 1960년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1964년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1982년 중앙대 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1971~현재 성균관대 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수

Tel : 031-290-7101

E-mail : dsahn@ece.skku.ac.kr