韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 12집, 2001. 8. 103-124.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 12, Aug. 2001. 103-124.

중학교 1학년 수학 부진아의 진단 및 처방에 관한 사례연구

정 보 나 (한국교원대학교 대학원)
조 완 영 (충북대학교)

수학은 계통성이 강한 학문이다. 이러한 수학의 특성은 학습의 결손이 있거나 학습속도가 느린 학생들에게 수학을 학습하는 데 어려움의 근원이 된다. 특히 중학교 수학에서는 처음으로 형식적인 수학이 도입되기 때문에, 중학교 1학년에서 수학을 제대로 이해하지 못할 경우 그 학생은 수학 장애아, 수학부진아로 전락할 가능성이 있다. 그러나 학교에서의 개별지도는 어려운 실정이다. 따라서 수학 부진아를 선정하여 수학학습에서의 어려움을 진단하고, 학생의 오개념과 오류를 분석한 후, 그 학생에게 맞는 학습 전략을 선택하여 처방 지도하고자 한다. 이를 통해 학생의 이해와 사고과정을 알아보고 태도변화를 고찰하는 것을 목적으로 한다.

Ⅰ. 서 론

수학과목은 선수학습과 후속학습이 위계적으로 연결되면서 새로운 것이 첨가되거나 누적적으로 조직되는 계통성이 뚜렷한 과목이다. 이러한 수학과목의 특성은 학생들의 수학학습에 영향을 미친다. 또한 이 특성은 특히 학습속도가 느린 학생들에게는 수학학습을 어렵게 하는 원인이 된다. 그러나 수학수업에서 이 어려움은 해결되지 못하고 있다. 현장의 수학교실에서는 수업의 개별화가 실현하기 어려운 실정이기 때문이다. 교사는 다수의 학생을 지도하고 수업을 운영하기 위해 학습성취의 중간 수준에 맞는 수업을 진행하는 것이 보편적이며, 이 수준에서 전통적인 일제 수업을 하고 있는 실정이다. 따라서 학습 속도가 느린 학생들은 계통성이 강한 수학 교과의 학습에서 계속적으로 학습 결손이 누적됨으로써, 학력이 저하되고 학습 의욕도 잃어가고 있다. 이러한 학생들을 수학학습의 부진아로 생각하게 된다.

초등학교 수학과 고등학교 수학의 다리 역할을 하는 중학교 수학은 비형식적 수학에서 형식적 수학으로 전환되는 시기이다. 특히 이 시기에 학습 결손이 생기거나 학습속도가 느린 학생들은 형식적인 수학으로의 전환이 어렵게 된다. 이것은 그 이후의 수학학습에 많은 어려움을 겪게 하는 것은 물론, 이 어려움을 극복하지 못하는 경우, 수학 부진아, 수학 장애아로 전락되며 결국은 수학을 포기하게 된다. 따라서 중학교 수학학습은 미래의 수학학습을 위해 결정적이다. 그렇기 때문에 이 시기에 발생하는 수학 부진은 원인을 진단하고 처방 지도되어야만 하고, 이를 통해 학생들의 미래 수학학습을 위한 토대를 마련해야 한다.

그러나 학교 현장에서는 수학 부진아를 단순히 시험 성적이 낮은 아동으로 생각하는 경향이 있다. 현장교사들 모두 수학 부진아의 지도가 중요하다는 것을 공감하고 있지만 현장의 여건상 부진아가 가진 어려움을 다각도로 진단하여 처방 지도하는 것은 어려운 일임에 틀림이 없다. 따라서 본 연구자는 중요하지만 현장에서 하기 힘든 수학 부진아의 진단 및 처방에 관한 연구가 필요하다고 생각한다.

본 연구에서는 현장 교사가 추천하는 수학 부진아를 선정하여 그 학생이 수학 학습에서 가진 어려움을 진단하고, 그 학생의 오개념과 오류를 분석한 후, 그 학생에게 맞는 학습전략을 선택하여 처방 지도하고자 한다. 또한 이 과정에서 학습 내용에 대한 학생의 이해와 사고과정을 알아봄과 동시에, 학생의 수학에 대한 태도 변화를 살펴보고자 한다. 이 연구를 통해 분석된 학생의 오류와 오개념, 채택된 지도전략은 현장교사에게 수학 지도시의 시사점을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

II. 이론적 배경

A. 학습 부진아

학습 부진아의 개념은 한마디로 정의하기 어렵다. 그 정의들을 살펴보면 다음과 같다. 학습 부진아에 대한 개념을 정의할 때 가장 많이 쓰이는 방법이 일반지능(IQ)수준에 따른 구분으로 해당 아동의 지능 수준에 비추어 볼 때 어느 수준의 학습을 성취할 것이라고 기대하는 데, 실제로 그 정도의 성취를 이루지 못할 때 학습 부진이 발생했다고 보는 것이다. 이상노(1971)는 개인의 지능에 비추어, 학습 성취가 떨어지는 아동, 특히 낮은 학업 성취아를 정신박약아와 학습 부진아로 구분하였다. 정신박약아는 내적 능력인 선천적 능력이 부족한 아동을 말하며, 학습부진아는 외적 요인인 환경적·성격적 요인에 의한 낮은 학업 성취아를 말한다. 정원식 외(1979)는 개인의 학습 가능성으로 보아 기대되는 성취 수준에 미달되는 아동이라고 정의하고 있다.

또 다른 정의에서는 학습 장애아와 학습 부진아로 구분하는 데, 학습장애아의 경우 선천적 요인에 의한 것으로, 학습부진아를 외적인 요인, 즉 환경요인이나 그 영향을 받은 개인의 성격이나, 태도, 학습습관 등의 요인으로 인하여, 학습 지체의 누적과 그 누적에서 오는 학습에 대한 동기 부족으로 인해 낮은 학업성취를 보이는 현상을 가르킨다고 본다. 즉, 나타나는 결과의 발생 원천이 내적이냐, 외적이냐의 문제로 파악할 수 있다.

김순택(1979)는 '학교 학습에서 해당 학습 과제를 성공적으로 학습하지 못하는 학생을 학습부진아로 규정하고 있으며, 황정규(1979)는 학습 장애와 학습 부진을 구분함 없이 학습 저성취를 학습 부진으로 규정하고 있다.

이 글에서 학습 부진아란 박성익(1986)의 관점을 따른다.

> 학습 부진아란 정상적인 학교 학습을 할 수 있는 능력이 있으면서도 선수학습 요소의 결손으로 인하여, 설정된 교육목표에 비추어 볼 때 수락할 수 있는 최저학업 성취수준에 도달하지 못한 학습자를 말한다.

박성익은 이러한 정의를 제시하면서, “정상적인 학교 학습을 할 수 있는 능력이 있는 학습자”라는 말 속에는 ① 지능이나 기초학습 기능 등에서 충분한 학업성취의 가능성을 가지고 있는 아동들 ② 경미한 학습 장애를 가진 아동, ③ 정서나 행동 장애를 가진 아동들을 포함시키고 있다. 즉 어떤 원인으로 인한 것이건 최저 수준에 미달된 학업성취를 보이는 학생들을 학습 부진아로 본 것이라 할 수 있겠다. 그러나, 여기에는 저지능, 정신지체아, 문자 미해독자등 잠재적인 능력의 부족으로 정규학습의 적용이 불가능한 학생들은 제외된다.

따라서 학습부진아의 경우, 외적요인에 따른 최저 학업성취수준 미도달자로 정의하기 때문에, 학습부진의 원인을 조사할 필요가 있다. 보령수학교육연구회(1998)의 연구결과에 의하면, 학습부진의 원인을 환경요인과 학생변인, 수업변인으로 나누고 있다. 살펴보면 다음과 같다.

<표 1> 학습 부진의 원인

변인	요인	내용
환경변인	가정환경 요인	부모의 무관심, 경제적 빈곤, 결손 가정의 불화
	학교 환경 요인	급우간의 인간관계, 교사에 대한 불만
학생변인	인지적 요인	선행 학습의 결손, 학습 방법의 미숙, 사고력의 미흡
	정의적 요인	학습 의욕과 흥미부족, 부정적 자아 정체감, 정서불안
수업변인	교수-학습 요인	획일적인 교육 과정, 과다한 학습 내용, 지도방법의 부적절

B. 오류

오류는 사전적으로 ‘그릇되어 이치에 틀림’, ‘바르지 못한 논리적 과정 및 결과로 생긴 추리나 판단’(우리말 큰 사전), ‘논리학에 있어서 바르지 못한 논리적 과정, 특히 외견상 바르게 보이면서 통속적 의미로는 참이 아닌 것으로 쓰이기도 하며, 착각·관측상의 오차 등으로 인한 지각상의 착오를 가리키기도 함’(교육학 용어사전)으로 정의되어 있다.

오류는 오개념에서 출발한다. 수학에서 오개념은 오류를 야기시켜, 후속학습과 연계되는 논리적인 이해를 방해하고 학습의욕을 저하시키고 흥미를 잃게 하며, 결국은 수학적 자신감을 상실하여, 수학부진의 원인이 된다. 그러나 수학에서의 오류는 학생의 오개념을 확인할 수 있게 해준다. 따라서 오류는 학생의 오개념을 진단하고 처방지도할 수 있는 기회를 제공하여, 그 개념의 의미를 파악하고 탐구할 수 있는 활동의 기회를 제공한다. 따라서 이 오류를 파악하여 새로운 학습 기회를 제공한다면 학생들에게 보다 더 의미 있는 수학학습이 될 수 있다.

특히, 수학 과제에 대한 의미론적 오개념이 학생들의 오류를 야기시킨다. 이러한 오류의 원인은 수학과제에서 얻어진 정보를 대상화하고, 과정화하고, 유지하고 재산출하는, 학생들에 의한 수행절차를 검토함으로서 정의될 수 있다. 독일의 수학자 Hendrik Radatz(1979)는 오류를 범하게 되는 범주를 다섯 가지로 구분하고 있다.

첫째, 언어의 어려움 때문에 생기는 오류(언어의 난이성; langage difficult),

둘째, 특별한 정보를 획득하는 어려움에서 생기는 오류(공간적인 정보 획득의 어려움; difficulties in obtain spatial information),

셋째, 필수적인 기술, 사실, 개념에 관한 미숙으로부터 생기는 오류(필수적인 기술, 사실, 개념의 부족한 숙련; deficient mastery of prerequisitie skills, facts and cincepts)

넷째, 잘못된 연합 혹은 사고의 경직에서 생기는 오류(사고의 경직 혹은 부정확한 연합; incorrent associations or rigidity of thinking)

다섯째, 관련 없는 규칙 혹은 전략의 응용에서 생기는 오류(부적절한 규칙이나 전략의 적용; application of irrelevant rules or strategies)

Pippig(1975)은 이 오류의 범주 중 네 번째 범주인 사고의 경직이나 부정확한 연합에 의한 오류, 반대의 치환으로부터 생기는 오류들을 다음과 같이 다섯 가지 분류하였다.

① 보존의 오류 : 과제나 문제의 단순한 영역에서 자주 나타난다.

② 연합의 오류 : 단순 요소 사이의 부정확한 연합의 경우이다.

③ 방해의 오류 : 다른 연산이나 개념이 서로 방해하는 경우이다.

④ 동화의 오류 : 부정확한 듣기나 읽기나 쓰기에서 실수를 유발시키는 경우이다.

⑤ 전 작업으로부터의 반대 치환의 오류 : 일단의 연습이나 언어적 문제로부터 얻게 되는 잘못된 생각의 효과를 동일시하는 경우이다.

Radatz(1979)는 오류에 대한 진단은 수학 학습에 대한 정보를 제공하고 교사에게 개별 교수를 고려하게 함은 물론 교사 스스로 교수 영향에 민감하게 함으로써 실질적인 도움을 제공한다고 주장하고 있다.

C. 변수와 방정식

중학교 1학년에서 도입되는 형식화된 수학개념이 바로 변수개념이다. 아이디어를 표현하고 기술하는 편리한 수단을 제공하는 변수에 의해 규칙을 쉽게 진술할 수 있다. 또한 문제해결에서 변수로 대체시킴으로써 새로운 계산을 하지 않고도 임의의 많은 개별적인 경우를 표현할 수 있게 한다(schoenfeld & Arcavi, 1988). 즉 변수는 일반화를 위한 형식적인 도구가 된다.

변수를 표현하는 것은 기호이다. 이 기호는 대수의 기본적인 표현도구이며 언어다. 수학에서 기호적 언어는 의사소통의 도구로서, 수학적 개념, 구조, 관계성을 표현하기 위한 사고의 도구로서 두가지 역할을 하고 있다(Kaput, 1989; Esty & Teppo, 1994; 재인용 Warren & Anne, 1996). Kaput(1989)에 의하면, 대수는 일종의 언어 체계인데 그것을 이용해 대부분 수학이 의사소통된다고 한다. 대수적 사고의 발달은 대수적 언어 체계에 대한 이해로 특징지워진다. 따라서 대수를 언어로 받아들이는 경우, 대수적 언어의 어의론적(semantic), 구문론적(syntactic)인 기능에 대한 충분한 이해가 요구된다. Kaput(1989)은 "수학적 능력을 가진 새는 하나의 날개를 날 수 없다."는 은유적인 표현으로 어의론적인 기능과 구문론적 기능 중 단 하나의 기능만으로는 유용하지 않음을 밝히고 있다.

어의론에서는 대수식과 그것에 의해 나타내어진 대상 사이의 대응관계 즉 대수식의 의미를 고찰하는 반면, 구문론에서는 대수식의 구문 구조만을 고찰하고 그 표현 외의 의미는 문제 삼지 않는다.

학교 교육에서는 대수 지도에 있어서 이 두 가지 기능-어의론적 기능과 구문론적 기능-은 모두 중요하다. 어의론적 기능만에 초점을 맞추면 대수식을 사용하여 효과적으로 문제를 해결할 수 없고, 구문론적 기능만을 강조하면 방정식은 잘 풀지만 실생활 문제에 응용하지 못하는 경향이 있다.

따라서 실제 대수 지도에서는 이 두 가지를 지도 단계에 따라서 어떻게 융합시킬 것인가가 중요한 교육적 과제가 된다(박근덕, 1996). 대수적 기호 언어의 이해를 증진시키는 것은 수학적 사고 발달에 주요한 단계가 된다. 중요한 것은 대수적인 언어가 의미를 전달하는 매체라는 것을 학생들이 아는 것이다. 학생들에게 어의론적으로 부족한 상태에서 형식적 언어로써 구문론적 대수를 배우도록 허용하는 것은 그들의 계속적인 수학학습을 저해하는 것이 될 것이다(김남희, 1994).

이것은 최근 수학교육에서 문제해결의 강조와 맥을 같이 한다. 문제해결은 기초기능 뿐 아니라 실생활에 수학을 응용할 수 있는 능력을 키우기 때문에 수학교육의 목표가 되고 있다. 실생활 문제를 도입하기 위해 학교수학에서는 문장제 문제를 주로 사용한다. 대수영역에서의 문장제 문제는 방정식이라는 수학적 모델을 이용하여 수학화한 후 방정식을 풀어서 나온 답을 다시 해석하는 과정을 거친다.

그러나 교실에서 학생들에게 제시되는 문장제는 교실 밖에서 접하는 문제와는 다르다. 읽기 능력을 기초로 하는 문장제는 문제의 의미와 중요성이 실제 문제에서 표면화되지 않기에, 학생들은 많은 어려움을 갖게 된다. 개념에 대한 지식은 문장제의 이해와 풀이를 위해 필수적인 것이다. 따라서 용어의 의미를 잘 모르는 학생들, 수학적 사실을 확실히 알지 못하는 학생들, 또는 이와 관련된 원리를 알지 못하는 학생들은 문장제를 해결하는 데 어려움을 겪는다. 학생들은 무엇을 변수로 나타내야 하는 지 모르며, 그것을 알고 있더라도 문제에 적절한 관계를 식으로 세우지 못한다. 또한 문장제를 해결함에 있어 답이 문제의 조건에 적합한가를 확인하지 않기에 오류를 범하는 경우가 있다. 결국 문장제 문제를 해결하기 위해선 방정식의 이해와 풀이, 미지수의 이해는 필수적인 요소가 된다.

D. 변수와 방정식 지도 전략

오늘날 우리는 변수의 사용을 너무나 당연하게 여기며, 서로 다른 수학적 맥락에서 변수를 사용한다. Usiskin은 대수식의 여러 유형에서 사용되는 변수의 다양한 의미를 제시하였다. 일반화된 산술의 맥락에서 볼 때 변수는 패턴을 일반화하는 도구이다. 변수를 사용하는 다양한 맥락과 변수기호의 진화과정은, 수학적 개념을 특정 기호로 나타내는 것과 관련된 복잡성과 수학적 의미가 개인의 해석과정 없이 기호에 의해 직접 전달될 수 없다는 것을 보여준다.

Kuchemann(1981)는 문자 사용의 단계를 통해 변수 이해를 향상시킬 수 있음을 입증하였다. 그는 변수를 이해하는 단계를 여섯 단계로 구분하고 있다.

<표 2> Kuchemann에 제시한 변수 이해 단계

단계구분	특징	단계구분	특징
1	하나의 수 값을 갖는 문자	4	특별한 미지수로서 사용된 문자
2	사용되지 않는 문자	5	일반화된 수로 사용된 문자
3	하나의 대상으로 사용된 문자	6	하나의 변수로 사용된 문자

궁극적으로 변수에 대한 아이디어는 수를 나타내는 문자들을 사용하는 것 이상을 포함하고 있다. 그러나 그러한 것보다 정교한 학습에 대하여, 아동들은 대입을 함으로써 수를 갖는 문자들을 가지고 철저한 경험을 할 필요가 있다(심진옥, 1998).

방정식은 변수 개념과 등호의 개념을 알아야 하는 개념이다. 변수 개념이 제대로 형성되었다 하더라도 등호개념이 제대로 형성되지 않는다면 학생들은 방정식을 구문론적(절차적)으로 풀 수는 있지만 진정한 방정식의 의미를 파악하지 못하기 때문에, 좀 더 새로운 문제 상황인 문장제 문제 해결에 어려움을 겪게 된다. 이렇듯 중요한 방정식 개념을 지도하는 전략으로 현재 오스트레일리아 중등학교에서 일반적으로 이용되는 4가지 접근 방법인 은유적 모델을 제시한다(MacGregor, 1998).

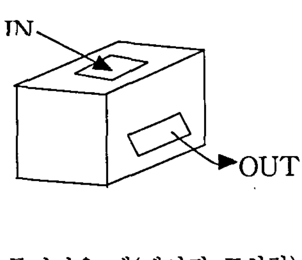
첫째, **"수에 관한 이야기"의 은유**이다. 방정식은 수에 발생한 이야기로 해석될 수 있다. 예를 들어, $(4[x-1]-2)\div 2=9$는 *수 x가 있다. 우리는 1을 빼고, 4를 곱한 다음, 2를 뺀다. 그리고 2로 나눈다. 답은 9이다. 처음 수는 얼마인가?* 로 해석될 수 있다. 이것을 다이어그램으로 표현한다(<그림 1>).

$$\boxed{\;x\;} \xrightarrow{-1} \boxed{} \xrightarrow{\times 4} \boxed{} \xrightarrow{-2} \boxed{} \xrightarrow{\div 2} 9$$

<그림 1>

답으로부터 거꾸로 추적하여, 빈 상자 안에 수를 쓰는 방법을 사용한다. 왜냐하면, 해법의 각 단계는 산술계산이기 때문이다. 이 접근방법은 초보자들이 대수적인 절차는 피하고, 우변에 한 개의 항으로 상수가 있는 방정식을 매우 성공적으로 풀 수 있다는 것을 보여 준다. 그렇지만, 이 방법은 등호가 항상 좌변의 절차와 우변의 답을 분리시키는 것으로 이해하도록 하는 잘못된 신념을 강화시킬 수도 있다.

둘째, **"함수 기계" 은유**이다. 두 변수가 관련된 방정식은 함수 기계로 이해될 수 있다. 이야기 은유처럼, 함수 기계는 수에 일어난 일을 기술하는 것으로 방정식을 나타낸다. 초기 값이 변하여 나중 값에 대응되는 규칙 개념을 학생들이 이해하도록 돕기 위해 학생들에게 표와 그림이 주어진다.



투입	결과
2	7
4	11
5	13

학생들에게 값의 집합이 주어졌을 때(예시된 표처럼), 숨겨진 규칙을 발견하고 그 규칙을 말로 표현한다. 그리고 두 변수의 관계를 방정식으로 나타낸다. 예를 들어, 표의 규칙은 언어로는 "초기 값

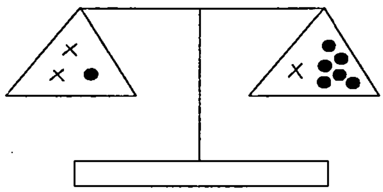
의 두 배에 3을 더하는 연산"이고 $x \times 2+3=y$ 를 적는다.

셋째. **"조리법" 은유**이다. 조리법 은유는 학생들이 조리법, 공식, 그리고 방정식 개념을 연결시키는데 도움을 주고자 한다. 조리법은 방정식처럼 표현될 수 있다. 예를 들어,

1jug우유= 2cups milk powder + 8 cups water.

이 조리법은 당신에게 우유 1jug를 만드는 방법을 알려준다. 유사하게, $y=2(a+b)$같은 공식은 변수 y를 알 수 있는 조리법이나, 혹은 지시를 보여주는 것으로 학생들은 a와 b의 값이 y값을 계산해낼 수 있게 한다는 것을 쉽게 이해한다. 조리법 모델을 이용하여 학생들에게 공식에서 변수를 실제 값으로 대체해서 계산하는 연습을 시킬 수 있고, 왼쪽엔 방정식이 오른쪽엔 답이라는 절차를 가지고 있다는 것을 보여줄 수 있다.

넷째, **"균형" 은유**이다. 이 모델에서 대수 항과 수들은 대칭 저울에 있는 사물을 나타낸다. 예를 들어, 방정식 $2x+1=x+6$은 아래와 같이 나타낼 수 있다.



교사는 사물이 어떻게 더해지고 빼지는지, 저울의 균형을 유지해 평형을 이룰 수 있는지, 즉 한쪽에 "미지의 것"과 다른 쪽에 수를 제외하고는 아무 것도 남지 않을 때까지 행해야 할 연산이 어떤 것인지를 보여준다. 피아제 관점에서, 균형 은유는 인지적 발달 수준이 형식 조작기 수준에 도달한 학생들에게만 적절하다. 이것이 사실이라면, 중학교의 낮은 학년에 있는 많은 학생들에게 유용한 모델이 아니다. 그러나, 절차적 모델 중의 하나가 제시된 후에 곧 바로 학생들에게 제시되고 있다.

방정식에서 가장 어려워하는 부분이 문장제 문제이다. 문장제를 해결하기 위해서는 문장을 대수로 전환한 후, 대수 문장을 산술적 문장으로, 산술적 문장을 다시 원래의 문제 상황으로 전환하는 것이 필요하다. 대부분의 학생들은 문장제를 이해하고, 아이디어를 표현하고 조작하는 데 필요한 모델과 언어에 관한 이해가 부족한 실정이다(이정은, 1998). 따라서 문장제 문제 해결을 위한 전략이 필요하고 또한 중요하다. Vos(1976)는 중등 대수 교실에서 전략의 중요성을 강조하고, 수학적 능력이 낮은 학생들은 전략을 통한 지도가 효과적임을 주장하였다. 이정은(1998)은 문장제 문제해결전략을 다음 세가지로 정리하고 있다.

첫째, 다이어그램을 통한 전략이다.Mayer와 Threadgill-Sowder와 Sowder는 그림의 사용이 학생들에게 일반적으로 더 도움을 준다고 하였다.

둘째, 표 만들기를 통한 전략이다. 표만들기 전략은 주어진 문제의 정보를 표로 나타냄으로써 직접 해를 구하는 것은 아니나 그 정보를 일목요연하게 조직화하거나, 시행 착오를 체계화하여 규칙성의

발견에 도움을 줄 수 있고, 그 답을 직접 구할 수 있다. 또한 표를 만듦으로써 문제에 외재되어 있는 정보 외에 내재되어 있는 정보를 알 수 있게 해준다. 이 전략은 때때로 문제를 이해하기 위해서 필요하나 주로 문제를 해결하는 과정에서 유용하다.

셋째, 스키마를 통한 전략이다. Kintsch & Greeno(1985)는 문장제 해결에 있어 학생들에게 문제의 초기 상태와 해법 계획을 통해 문제해결 스키마를 구성시킴으로서 문제 해결 능력을 향상시킬 수 있음을 보였다.

Ⅲ. 방법론

A. 임상실험

중학교 1학년을 대상으로 임상 실험이 수행되었다. 임상 실험의 기본적이며 진정한 목표는 연구자가 학생의 수학적 지식을 학습하고 구성하는 방법을 알고 학생의 오류와 오개념은 분석하여 처치하는 것에 초점을 맞춘다. 따라서 교사와 학생 사이의 상호작용은 학생의 수학적 개념을 발견하고 확인하며 학생의 수학적 활동을 착수 및 유지시키게 된다. 이러한 지속적인 상호작용을 통해 활동이 지속된다. 임상실험은 교사, 학생 사이의 대화적 상호작용을 통한 수학적 활동을 특징으로 하는 교수 에피소드로 구성된다. 임상실험에서 무엇보다도 효과적인 것은 학생의 반응에 대해 곧바로 인지할 수 있고 또한 그 반응에 대한 피드백을 제공할 수 있다는 점이었고, 지도계획이 그 이해정도에 따라 수정·보완될 수 있다는 점이었다.

B. 대상

연구대상은 청주시의 S중학교 1학년 여학생 1명이었다. 이 학생은 현장 교사의 추천을 받은 학생으로 다른 과목에 비해 수학과목이 부진한 학생이었다. 성적은 반에서 15등이지만 수학성적은 30등이었다. 특히 수학성적은 중간고사 때 76점(학급등수 : 10등, 전과목 석차 : 9등)이었으나 기말고사 때는 26점(학급등수 : 30등, 전과목 석차 : 15등)으로 50점이나 떨어졌기 때문에 수학에 대한 흥미나 자신감을 완전히 상실한 상태였다. 임상실험에 돌입한 시기는 2학기 중간고사 바로 전이었는데, 그 학생은 1학기 기말고사 시험범위인 문자와 식 단원에서 특히 방정식을 어려워하였다. 학생의 성격은 조용하고 차분하며 수줍음을 많이 타는 편이었다. 침착하고 착하여 친구들과 원만하게 지내며 중학교 1학년 또래에 비해 키가 작은 편이고 다소 마른 체격이었다. 수학학습에서는 성실하게 과제를 수행하지만 어려운 문제나 창의적인 과제에 도전하지 않는 편이다.

C. 실험 설계

본 연구는 학생의 오개념과 오류를 분석하고 그 원인을 파악함과 동시에 오류의 교정 과정을 밝혀내기 위한 임상실험으로 사전면담과 진담검사를 포함하였으며 6회에 걸쳐 실시되었다. 진단평가를

실시하여 학생이 갖는 어려움의 원인을 찾아내고 그 오류에 따른 처방지도계획을 작성하였다. 실험은 학생의 학교인 S중학교 과학실과 학생의 아파트에서 실시되었다. 또한 처치 일시는 학생의 2학기 중간고사 전에 끝나도록 계획하였다. 이는 학생이 2학기 중간고사 수학시험에 자신감을 갖고 임할 수 있도록 하기 위한 것이며, 또한 이 시험을 통해 학생의 학습정도와 이해정도를 파악하고자 계획한 것이었다.

실험기간 : 2000년 9월 20일 ~ 10월 1일

실험내용

<표 3> 실험처치 주제

실험처치	주제	실험처치	주제
1	사전면담, 진단검사	4	단항식과 다항식의 계산
2	문자의 필요성과 사용	5	등식, 방정식, 항등식
3	기본적인 용어정의와 개념 지도	6	문장제 문제

D. 자료 수집

자료로 문서자료, 비공식적인 면담자료, 학생과 연구자와 의사소통을 담은 오디오테이프를 사용하였다. 학생의 수학적인 오류를 진단하기 위한 진단검사 결과와 오류 처치를 위해 제공된 활동지, 과제를 해결한 학생의 학습노트, 학생의 학습 내용과 해결 방법을 기록한 연구자의 노트를 문서자료로 수집하였다. 수학적 사고를 알아보기 위해 매일의 활동을 오디오테이프로 녹취하여 전사하였다. 학생의 전반적인 상황을 파악하기 위해 비공식적인 면담이 실시되었다. 우선 학생과의 면담, 추천한 현장 수학교사와의 면담, 학부모님과의 면담을 통해, 학생의 가정환경, 성격, 교우관계, 학습정도, 학습 성향, 수학성취도, 수학에 대한 성향 및 태도와 자신감등을 파악하였고, 이 실험과정에서 나타난 수학 학습에 대한 변화와 태도의 변화를 조사하였다.

Ⅳ. 분 석

A. 학생에 대한 분석

학습부진아에 관한 박성익(1986)의 관점을 따르면, 학생(이후 쟈니로 명명함)은 학습부진아로 정의할 수 있다. 우선 쟈니는 지능이나 기초학습 기능 등에서 충분한 학업성취의 가능성을 가지고 있는 아동이며 경미한 학습 장애를 가진 아동이며 이러한 학습부진으로 인해 자신감이 결여되어 정서나 행동 장애를 가진 아동이라고 볼 수 있기 때문이다.

학습부진의 원인을 살펴보기 위해 비공식적 면담(교사, 학생, 학부모)과 공식적 면담을 하였다. 그 결과 쟈니의 학습부진의 원인은 학생변인에서 인지적 요인과 정의적요인, 수업변인에서 교수학습 요인인 것으로 분석되었다. 우선 인지적요인으로 선행학습의 결손을 꼽을 수 있다. 변수라는 개념이나 등호개념을 완전하게 이해하고 있지 못하였으며 기초적인 개념 미숙과 숙련의 부족 등을 들 수 있

다. 또한 학습하는 방법을 찾지 못하고 있었으며, 이 때문에 학습의욕과 흥미를 잃은 상태였고 자신감이 결여된 상태였다. 이러한 원인을 분석한 결과 수업시간에 잘 듣지 않았던 것으로 드러났다.

B. 진단검사

아동과의 예비면담을 통하여 1학기 기말고사의 수학성적(26점)이 중간고사의 수학성적(76점)보다 50점 떨어졌다는 사실과 학생 자신이 방정식이 가장 어렵다고 말한 사실을 근거로 학생의 수학 부진의 원인은 기말고사 내용에 해당하는 문자와 식, 방정식 특히 중학교 1학년에서 본격적으로 도입하는 문자에 관한 어려움일 것이라고 추측하고 수와 연산, 문자와 식, 방정식에서 학생이 느끼고 있는 어려움과 오류를 찾아내어 처치하고자 진단검사를 실시하였다. 진단검사의 평가문항을 분석하면 다음과 같다.

<표 4> 진단검사 평가 문항 분석

수와 연산		단항식과 다항식		방정식	
1	정수의 계산	3	문자에 수 대입	7	방정식
2	분수의 계산	4	단항식과 다항식의 곱셈	8	문장제 문제
		5	단항식과 다항식의 나눗셈		
		6	다항식의 뺄셈		

진단검사 분석결과는 다음과 같다.

첫째, 수와 연산에서 정수와 유리수의 기본 계산을 할 수 있다.

둘째, 문자에 식을 대입하여 계산할 수 있다.

셋째, 분배법칙을 이용한 단항식과 다항식의 곱을 계산할 수 있지만 문자항과 상수항에 관한 뺄셈에서 양변을 문자항의 계수로 나누어 해를 구하는 것으로 보아 방정식과 다항식의 기본 개념을 이해하지 못하고 있다.

넷째, 다항식을 단항식으로 나눌 수 있다.

다섯째, 다항식과 다항식의 뺄셈에서 방정식의 개념과 혼동하여 해를 구하고 있다. 등호의 개념을 이해하지 못하며 방정식의 뜻을 알지 못한다.

여섯째, 간단한 방정식의 경우, 이항을 이용하여 해를 구할 수 있다.

일곱째, 문장제 문제의 경우, 전혀 식을 세울 수 없었으며 해보려는 시도조차 하지 않았다.

여기서 쟈니의 오류를 분석해보면, Hendrik Radatz(1979)가 오류를 분류한 다섯가지 범주 중에 세번째 범주인 필수적인 기술, 사실, 개념에 관한 미숙으로부터 생기는 오류, 네 번째 범주인 잘못된 연합 혹은 사고의 경직에서 생기는 오류, 첫 번째 범주인 언어의 어려움 때문에 생기는 오류에 속한다. 변수개념과 방정식개념에서의 오류는 세 번째, 네 번째 범주에 속하며 문장제 문제해결의 오류에서는 첫 번째, 세 번째 범주에 속하는 것으로 분석되었다. 전반적으로 살펴보면, 쟈니는 어의론적 기능이 부족함을 알 수 있었다. 이에 따라 어의론적 의미를 강조하고 필수적인 기술을 숙련시키는 필

요하다고 생각되었다.

C. 처방계획 및 지도(처치) 전략

진단검사 분석결과를 가지고 다음과 같은 처방지도를 계획하였다.

· 수학에서 문자의 필요성과 사용 이유

· 기본적인 용어(항, 단항식, 다항식, 상수항, 동류항, 계수, 차수, 일차식, 이차식, 등식, 방정식, 항등식)의 정의와 개념 지도

· 단항식과 다항식의 계산

· 등식, 방정식, 항등식

· 문장제 문제(소금물 문제, 시간과 거리문제, 도형과 결합된 방정식 문제)

이러한 처방계획 하에 다음과 같은 처치전략을 수립하였다.

첫째, 문자를 도입하는 이유나 문자의 역할을 느끼도록 하기 위해 바둑돌을 이용한 활동을 하였다.

둘째, 개념(용어와 용어의 정의) 정립을 위해 암기하는 활동과 더불어 예를 만들어 보고 그 예가 개념에 타당한 지를 확인하고 그 과정에서 오류를 찾아내는 활동을 하였다.

셋째, 단항식과 다항식의 계산, 방정식의 계산을 혼동하는 것을 처치하기 위해, 균형은유 모델을 이용하여 등호 "="의 의미와 등호의 쓰기 활동과 함께 등호의 개념을 이해하는 활동을 하였다.

넷째, 방정식을 계산할 수 있었지만 등호의 성질을 이용한다는 사실을 인식하지 못한 채 알고리즘을 이용하여 방정식을 풀고 있었기 때문에, 응용문제나 활용 문제 해결에 어려움을 겪었다. 이는 "말하기(표현하기-의미부여하기 ; 어의론적 표상)"활동을 통해 의미를 생각하고 자신의 생각을 의사 소통하는 활동을 지속적으로 하였다.

다섯째, 문장제 문제는 문제를 풀기 위한 활동이 아니라 실생활과 관련하여 이해하는 활동을 먼저 하였다. 등식을 만들기 위해 같아질 수 있는 것을 찾아보고 그 상황을 다이어그램을 이용하여 그림으로 표현한 후, 등식을 세우는 활동을 하였다.

여섯째, 다항식의 계산에서는 등호를 빠뜨리지 않고 쓸 수 있도록 등호의 의미를 가지고 지속적으로 쓰기 활동을 강조하였으며, 방정식에서도 등호를 중심으로 양변을 내려쓰는 활동을 지속적으로 강조하였다. 특히 일차방정식의 활용 문제에서는 시각적인 도구인 그림을 그려서 문제의 조건을 상징적으로 표현하는 방법과 조건을 기록하고 식을 세우는 활동을 하였다.

일곱째, 자신의 생각을 표현하고 정당화하는 "말하기(표현하기)" 활동을 지속적으로 실시하였다.

처방지도 계획에 의해 9월 20일부터 10월 1일까지 5차시에 걸쳐 실시하였다. 단기간에 임상실험이 실시된 이유는 학생의 중간고사가 10월 3일부터였고 그 범위는 함수단원이었기 때문에 임상실험의 내용이 학생의 중간고사 시험에도 긍정적인 영향을 끼칠 것으로 판단하여 그 이전에 실시되었으며, 계획에 없던 함수의 단원은 학생이 가지고 있는 문제집을 가지고 과제를 제시하고, 학생 스스로 풀고 질문을 받는 형식으로 도움을 주었다.

D. 임상실험

a. 1차 실험

1차 실험은 수학에서 문자의 필요성과 역할을 이해하고 문자의 사용 규칙을 학습하는 것을 목표로 하였다. 실험 구조를 분석하면 다음과 같다. 1차 실험은 3개의 활동<활동1. 바둑돌을 10개씩 그룹짓는 활동, 활동2. 바둑돌을 5개씩 그룹짓는 활동, 활동3. 문자표현 및 계산 활동>으로 구성되었다. 활동1과 활동2는 구체물을 가지고 조작하는 활동으로 이 활동을 통해 문자가 필요한 이유와 역할을 이해하도록 하였다. 이러한 이해를 바탕으로, 식으로 표현하고 문자를 계산하는 활동인 활동3과 연결시켰다.

다음은 쟈니가 문자의 필요성과 역할을 이해하는 과정이다. 두 가지 상황을 주었다. (상황1) 묶음의 수가 모두 8개이고, 바둑돌의 개수가 모두 65개라면 흰 바둑돌과 검은 바둑돌의 묶음의 수는 각각 몇 개인가? (상황2) 묶음의 수가 모두 15개이고 바둑돌의 개수가 모두 95개라면, 흰 바둑돌과 검은 바둑돌의 묶음의 수는 각각 몇 개인가? 이 상황은 검은 바둑돌은 10개씩 묶고 흰 바둑돌은 5개씩 묶는 것을 전제로 하고 있었는데, 다음은 두 번째 상황의 문제해결 후에 발생한 에피소드이다.

연구자 : x를 왜 사용했지?
쟈　니 : 모르는 수 대신 사용했어요.
연구자 : 문자를 사용해서 구해보니까 어떠니?
쟈　니 : 좀 더 간편하게 개수를 구할 수 있어요.
연구자 : 만약 문자를 사용하지 않고 구하려면 묶음의 개수가 15가 되는 모든 경우를 생각해봐야 했을 거야. 만약에 운이 좋다면 한번만에 생각해 낼 수도 있지만 숫자가 커지면 커질수록 그럴 가능성이 별로 없겠지? 그 동안 쟈니는 문자에 대해 어떻게 생각했었니?
쟈　니 : 문자를 보면 답답했어요. 너무 어렵고 문자가 나오면 문제를 풀지 않고 다른 문제로 넘어갔어요.
연구자 : 그럼 이 문제를 풀면서 문자는 어떤 역할을 하는 것 같니?
쟈　니 : 음. 문자는 어렵게 하려고 한 것이 아니라 더 간편하게 문제를 해결할 수 있어요.
연구자 : 그럼 앞으로 문자가 나오면 어렵다고 생각하지 말고 더 간편하게 풀 수 있다고 생각하자. 약속!

세 번째 활동인 문자표현 및 계산 활동에서는 문자끼리의 계산 규칙을 알고는 있지만 괄호와 나눗셈 기호에 어려움을 느끼고 있는 것으로 분석되었다. 또한 정확하게 쓰는 것이나 자신이 계산한 것을 검산하지 않음을 알 수 있었다. 그렇기 때문에 잦은 실수를 범하였다. 따라서 쟈니에게 좀 더 많은 연습이 필요하다고 생각되어 연습할 수 있는 과제를 제시하였다.

b. 2차 실험

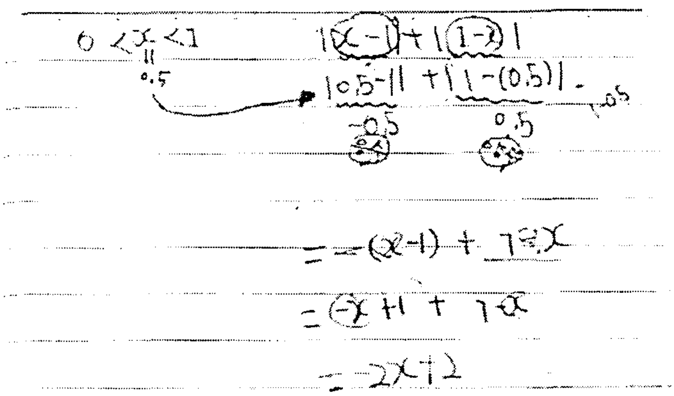
2차 실험의 목표는 용어의 정의를 알고 단항식과 다항식을 계산할 수 있으며 절대값이 들어있는 식에 도전하도록 하는 것이었다. 2차 실험은 활동 세 개로 구성되었다. 활동1은 용어와 용어의 정의를 찾는 활동으로, 두 그룹으로 제시된 예를 가지고 그 그룹의 공통성을 찾고 그룹에 이름을 짓는 활동이었다. 쟈니가 지은 이름과 수학교과서의 표현을 비교하도록 하였다. 활동2는 단항식과 다항식

을 계산하는 문제로 구성되었다. 활동3은 절대값의 기호를 없애는 활동으로 절대값이 들어있는 식을 계산하는 것이었다.

세가지 활동 중에 두 번째 활동을 제외한 첫 번째, 세 번째 활동에 쟈니는 많은 어려움을 느끼고 있었다. 활동1에서 공통점을 찾아 용어의 이름을 정하는 활동에서는 쟈니는 항, 등호, 다항식, 방정식, 항등식이라는 용어를 하나도 알지 못하고 표현하지 못했다. 교과서에 있는 용어를 찾아서 확인하는 과정에서 쟈니는 "아! 맞아"라는 말을 사용하며 깨닫는 듯하였다.

활동2인 단항식과 다항식을 계산하는 활동에서 쟈니는 동류항의 개념과 분배법칙의 사용법을 알고 있었다. 그러나 분배법칙에서 분배하는 수가 음수일 경우 부호처리에 실수가 있었고 등호를 계속 사용하지 않았다. 결국 쟈니는 구조화된 쓰기 활동이 부족함을 알 수 있었다. 이 활동을 통해 다항식의 계산에서 등호의 의미를 확인함으로써 방정식 계산의 오류가 확실히 수정되었다.

활동3인 절대값의 기호를 없애는 활동에서 수와 문자 사이에 얼마나 큰 차이가 있는 지를 알 수 있었다. 수의 경우 절대값을 구할 수 있었지만, 문자의 경우 손도 대지 못하고 있었다. 특히, 여기서는 문자 대신에 수를 대입하여 일반적인 규칙을 찾는 활동을 한 후에야 비로소 깨달았다. 이 과정에서 다항식일 경우 더욱더 어려움을 겪었는데 다항식의 경우도 하나의 수처럼 생각하는 활동이 효과가 있었다.



<그림 3> 절대값의 계산

c. 3차 실험

3차 실험은 방정식과 항등식의 개념을 이해하고 등호의 성질을 이용하여 해를 구하는 것을 목표로 하였다. 이 실험은 세 개의 활동으로 구성되었다. 활동1은 지난 시간에 학습한 용어의 정의를 말하고 예를 제시하는 활동이었다. 활동2는 활동1에서 제시한 방정식과 항등식의 해를 구하는 활동이었다. 활동3은 문자가 두 개 이상 들어 있는 문장제 문제를 해결하는 활동이었다.

활동1에서 쟈니는 암기한 용어의 정의를 정확하게 설명하였지만 예를 들어보라고 요구하자 당황

하는 빛이 역력했다. 항과 상수항의 예는 정확하였지만 다항식과 단항식의 예는 제시하지 못했고 방정식과 항등식의 정의는 정확하게 기억하고 있었지만 항등식의 예와 방정식의 예를 바꾸어 제시하였다. 암기는 하고 있었지만 그 개념을 정확하게 이해하지 못하고 있음을 알 수 있었다. 다시 한번 정의를 암기하고 반성하는 시간을 주자, 쟈니는 곧바로 자신의 오류를 수정하였다. 이 활동을 통해 학생이 정의를 기억하고 있다는 것이 개념을 알고 있다는 것과는 차이가 있을 수 있다는 사실을 알 수 있었다.

활동2에서 쟈니는 자신이 제시한 방정식과 항등식을 풀었다. 쟈니의 오류는 등호의 개념을 인식하지 못한 것이기 때문에 2차실험을 통한 교정에 의하여 방정식을 잘 해결하였다. 방정식과 항등식의 풀이 후에 설명하도록 요구하였을 때, 쟈니는 매우 쑥스러워하며 '이것', '저것'이라는 지시대명사와 제스쳐에 의존하여 설명하였다. 그 설명이 의사소통으로서는 다소 부족하였지만 등식의 성질을 분명히 이해하여 이항하고 있음을 알 수 있었다. 따라서 진단검사에서 나타난 구문론적 기능에 의존한 오류는 어의론적 기능이 보완되어 수정되었음을 알 수 있었다. 또 하나의 발견은 불능방정식(해가 없는 방정식)의 계산에서 나타났다. 불능방정식의 해를 0이라고 생각했다. 연구자가 제시한 해가 없는 방정식과 비교한 후에야 불능방정식의 해가 없음을 인식하였다.

활동3은 문자가 두 개 이상 들어있는 문장제 문제를 해결하는 활동이었다. 처음 문제를 대할 때는 두려움과 당황함이 역력했다. 문제를 잘 읽고 구하고자 하는 것을 쓰고 조건을 적어놓고 해의 정의를 말해보고 해를 대입하여 방정식을 풀고 그 결과를 구하고자 하는 것에 이용하는 과정이 연구자의 안내에 의해 쟈니 스스로 해결하였다. 연구자는 "아무 것도 도와주지 않았어. 쟈니가 어려워했던 문제를 쟈니 혼자 해결했구나! 정말 장하다"고 칭찬하였더니 얼굴이 상기되면서 너무 기뻐하였고 자신감을 갖는 듯 하였으며, 그 다음 제시된 두 문제는 자신이 이 절차에 의해 스스로 해결하였다. 너무나 잘한다는 칭찬에 활짝 웃었다. 이 활동은 연구자나 쟈니 모두가 성취감과 자신감을 얻은 활동이었다.

이 활동을 통해 개념을 이해하는 데 가장 좋은 방법은 아동이 개념을 암기하여 이야기하는 것보다 그 기억한 개념을 예를 제시하여 스스로 개념을 확인하도록 하는 방법(Gagne의 수학적 개념)이 효과적이라는 사실을 알 수 있었다. 또한 처치에서 성공적이었던 요인은 문제 설정과 문제 해결 과정으로, 자신이 예로 설정한 문제를 가지고 문제를 해결해 가는 과정에서 더욱 더 흥미를 느끼고 자신감을 갖는 것으로 나타났다.

또한 아동이 평소에 매우 어려워했던 문제(도전과제)를 제시하였을 때, 그 어려움을 스스로 해결해 가는 과정에서 연구자의 안내, 자신의 성취, 연구자의 격려와 칭찬이 아우러져 만족감과 성취감, 흥미와 학습동기를 유발하는 듯하였다. 역시 Polya의 말처럼 문제다운 문제 제시가 중요하다는 사실을 깨달았다.

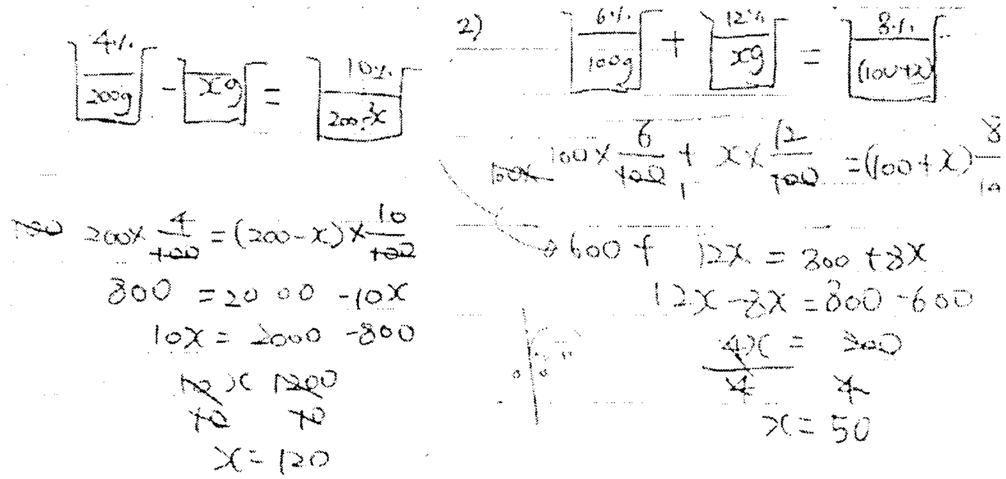
이 처치가 끝난 후 아동과 연구자 모두 뿌듯하고 흐뭇한 기분이었다. 연구자는 아동이 수학에 대한 흥미와 자신을 갖고 열심히 학습할 것이라는 생각이 들었다.

d. 4차 실험

4차 실험의 목표는 문장제 문제를 해결하는 것이었다. 특히 소금물 문제해결을 목표로 하였다. 여기서는 문장제 문제를 해결하기 위해 다이어그램을 이용한 그림을 그리는 활동을 하였다. 이 과정에서 주목할 점은 위의 문제를 일상생활에서 소금물을 혼합하여 농도를 재는 활동으로 인식하지 않고 있다는 사실이다. 왜냐하면 문제를 해석하여 시각화된 그림으로 나타내는 활동을 하면서 소금물에 물을 더 넣으면 소금물이 어떻게 되겠는지에 대해서 또 그것과 농도는 어떻게 변하는 지에 대해 전혀 연결을 시키지 못하고 있었고, 이 사실은 연구자에게는 참으로 큰 충격이었다. 결국 쟈니는 이러한 문장제 문제를 정형화된 문제로, 그저 어려운 문제로만 인식하고 있었다.

연구자의 안내에 따라 일상생활과의 연결을 통해 그림을 그리는 활동을 잘 해내었다. 그러나 식을 세우는 활동에 들어가자 식을 세우긴 세웠으나 올바른 식을 세우지 못했다.

연구자 : 왜 이렇게 식을 세웠니?
쟈 니 : 몰라요. 수학선생님이 이렇게 하시던데요.
연구자 : 등호는 언제 사용하지?
쟈 니 : 같을 때요.
연구자 : 소금물 문제에서 같은 것이 무엇이지?
쟈 니 : 음
연구자 : 소금물이 항상 같니?
쟈 니 : 아니요. 소금물은 다 다르게 주어지는 데요.
연구자 : 그럼 뭐가 같을까?
쟈 니 : 음
연구자 : 소금물을 증발시키면 소금도 증발이 되나?
쟈 니 : 아니요. 소금은 그대로 있어요.
연구자 : 소금물과 소금물을 섞으면 소금이 그 사이에 증발될 수도 있니?
쟈 니 : 아니요. 소금은 항상 그대로 있어요.
연구자 : 그럼 항상 같은 것은 뭐가 있니?
쟈 니 : 아! 소금이요.
연구자 : 좋아 그럼 소금의 양은 항상 같단 말이지?
쟈 니 : 예
연구자 : 그럼 소금의 양은 어떻게 구하지? 소금의 양은 문제에서 주어지지 않았잖아.
쟈 니 : 수업시간에 배웠어요. 소금의 양은 소금물의 양에 농도를 100으로 나눈 것을 곱해요.
연구자 : 참 잘 아는 구나. 역시 수업시간에 잘 들었구나. 좋아 이제 우리가 알고 있는 건 소금의 양은 항상 같다는 것과 소금의 양을 구할 수 있네. 그럼 그림을 보고 식을 세워 보자.



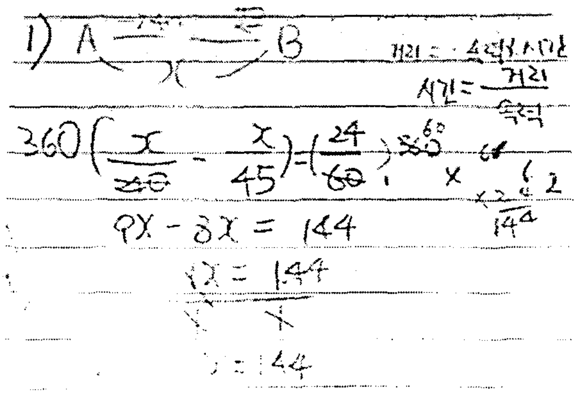
<그림 4> 문장제 문제(소금물)

쟈니는 소금을 추가시켰을 때, 소금물의 양이 변화된다는 사실을 인식하지 못해서 식을 잘 못 세우는 오류를 범했다. 소금물에 소금을 넣었을 때, 소금물의 양이 변하는 지에 대한 설명은 소금장수와 맷돌이라는 옛날 이야기를 이용하였다. 이 이야기를 통해 소금의 양의 변화가 소금물의 양을 변화시킨다는 사실을 이해하였다.

e. 5차 실험

5차 실험의 목표 또한 문장제 문제해결이었다. 5차 실험은 세 개의 활동으로 구성된다. 활동1은 시간, 거리, 속력에 관한 문제이고 활동2는 이율에 관한 문제이고 활동3은 도형과 관련된 문제로 구성된다.

활동1은 소금물 문제와 같은 절차로 처치를 진행하였다. 문제를 읽고 시각적인 그림을 이용하여 조건들을 표시하는 방법을 설명하였다. 자동차의 이야기로 "같은 거리를 가는 데 속도가 빨라지면 시간이 줄어들고, 일정한 속도로 가는데 자동차를 오래 타고 가면 멀리 가겠지"라는 식으로 여행갈 때 이야기를 하면서 도입하였다. 또한 등호를 사용하기 위해 어떤 것이 같은 가를 찾도록 하였다. 특히 쟈니는 이 부분에서 어려움을 겪었다. 왜냐하면 시간, 거리, 속력이라는 세 가지 변수가 주어져 있기 때문에 어떤 것을 같도록 해야할 지 모르는 것 같았다. 구하고자 하는 것을 x로 놓는 활동에서도 시간을 구할 때 거리를 x로 놓아야 하는 경우에 더욱 더 어려움을 느끼고 있었다. 연구자도 이 부분을 지도하면서 적절한 아이디어가 떠오르지 않았다. 결국 문제에서 비교하면서 등호가 성립하도록 주어진 조건이 시간임을 강조하였다.



<그림 5> 문장제 문제(시간, 거리, 속력)

활동2는 은행에 저금한 돈과 관련된 문제이지만 전혀 실생활과 관련시키지 못하고 있었다. 예를 들어 은행에 저금한 돈 10000원을 가지고 이자를 따져보고 원리 합계를 생각해보게 하였다. 잘 알고 있었고 아주 쉽다고 말하였다. 이것과 같은 방법으로 문제에 대한 식을 세우는 활동으로 들어갔다.

식 세우는 활동에 앞서 조건을 적어보고 이자를 계산하고 식을 세우도록 안내하였더니 아주 쉽게 식을 세우고 방정식을 풀어 해를 구하였다. 이 해를 문제에 맞게 해석하고 맞는 지 확인하는 활동도 자연스럽게 연결되었다.

활동3은 우선 쟈니는 사다리꼴의 그림을 그릴 생각을 하지 못하고 있었고 또한 식을 세우기 위해서 필요한 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 알지 못했다. 삼각형의 넓이를 구해보도록 하였다. 삼각형의 넓이는 잘 구하였고 삼각형의 넓이 구하는 공식도 정확하게 암기하고 있었다. 사다리꼴의 넓이를 삼각형 두 개로 나누어 구하도록 하였다. 이렇게 사다리꼴의 넓이를 삼각형 두 개의 넓이의 합으로 구하는 과정에서 오류를 범하였다. 풀이과정의 오류는 분배법칙에서 괄호를 빠뜨리고 계산한 오류였는데 쟈니는 해를 구한 후 무한소수로 나오니까 당황하였다. 연구자는 무엇을 x로 놓았지?라고 물으면서 윗변의 길이가 3.333…이 나올 수 있는지 물었다. 쟈니는 자신의 풀이과정이 잘못되었음을 느끼고 검토하기 시작하였고 드디어 자신이 잘못한 부분을 찾아내었다. 다시 해를 구하기 시작했다.

연구자는 그 후에 삼각형의 넓이의 합을 이용하여 사다리꼴의 넓이 구하는 공식을 유도하였다.

쟈니에게 사다리꼴의 넓이 구하는 공식을 이용하여 다시 문제를 풀어보도록 하였다. 쟈니는 사다리꼴의 그림을 그리고 조건을 적고 사다리꼴의 넓이 구하는 공식을 이용하여 식을 세웠다. 방정식을 풀어 해를 구하였고 구한 해를 검토하였다.

연구자는 이 활동 후에 두 방정식을 풀고 나서 느낀 점을 물어보았다. 쟈니는 "사다리꼴의 공식을 알고 있으니까 더 쉽게 문제를 풀 수 있어요. 또 틀리지도 않았어요."라고 대답하였다. 쟈니는 이 활동에서 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 잊어버려도 문제를 풀 수 있다는 사실과 공식을 알고 있으면 더 쉽게 문제를 해결할 수 있다는 사실을 이해한 것 같다.

E. 수학에 대한 태도

쟈니는 수학에 대해 자신감이 없는 상태였다. 문자만 나오면 가슴이 답답하여 문제를 풀 수 없었고 문장제 문제는 아예 읽어보지도 않았다고 한다. 첫 실험동안 쟈니는 많이 힘들어하였다. 그러나 그 실험이 끝난 후 문자를 두렵우하지도 않았으며 모르고 이해되지 않는 부분을 직접 들을 수 있어서 공부가 잘된다고 하였다.

2차 실험 후 지금까지 했던 활동과 너무 달라서 힘들었다고 하였다. 처음엔 뭘 해야 할 지 몰랐는데 책을 찾아가며 공부하니까 지금까지 몰랐던 걸 알게 되어 좋았다고 한다. 특히 절대값 문제가 어려웠는데 이제는 할 수 있을 것 같다고 자신감을 표현했다. 또한 집에 가서 절대값 문제를 문제집에서 찾아 풀어봐야겠다고 의욕을 보였다.

3차 실험 후 처음으로 쟈니의 입에서 재미있었다는 말이 나왔다. 문장제 문제를 빨리 풀어보고 싶다고 하였다. 이 실험 후에 연구자나 쟈니는 모두 흡족한 기분으로 만족한 상태였다. 쟈니는 평소에 자신이 너무나 어려웠던 과제를 자신이 스스로 해결했다는 사실이 만족감과 성취감을 주었으며, 흥미와 학습동기를 유발하는 듯 하였다.

문장제 문제해결이었던 4차 실험과 5차 실험은 쟈니의 중간고사 시험범위였기 때문에 더더욱 집중하였다. 쟈니는 이제 문장제 문제를 어떻게 식을 세우고 어떻게 풀어야 하는지 알게 돼 기쁘다고 말하였다. 그리고 중간고사 시험 성적이 좋아질 것 같다고 기뻐하였는데 이는 쟈니가 얼마나 수학에 대한 자신감을 회복했는지를 보여주는 증거이다.

V. 결 론

현장교사가 추천한 쟈니라는 학생은 갑자기 50점이라는 점수의 하락에 의해 학습부진아로 선정된 학생이었다. 이 학생의 학습부진의 원인은 학생변인 중 인지적 요인인 선행 학습의 결손을 우선 꼽을 수 있었다. 또한 이를 통해 정의적 요인인 학습의욕과 흥미를 완전히 잃었으며 자신감도 결여된 상태였다. 이 이면에는 교수학습 변인인 교사에 의한 수업 요인이 있었던 걸로 분석되었다.

진단검사의 분석 결과와 임상지도 과정에서 발견한 쟈니의 오류는 다음과 같다. 첫째, 학생은 문자를 사용하는 이유와 문자의 역할을 이해하지 못하고 있고 따라서 문자에 대한 거부감과 부담감을 가지고 있었다. 둘째, 용어와 용어의 정의를 전혀 알지 못하고 있었다. 셋째, 단항식과 다항식의 정의를 모르고 있었기 때문에 방정식을 푸는 것과 혼동하고 있었다. 넷째, 방정식의 풀이에서 해를 구하는 활동을 등식의 성질을 이용하여 푼다는 것을 이해하지 못하고 알고리즘에 의하여 방정식을 풀고 있었다. 다섯째, 일차방정식의 활용 문제를 실생활과 관련하여 수학화하는 활동을 하지 못할 뿐 아니라 등식을 만들 수 있는 단서를 찾지 못하여 식을 전혀 세울 수 없었다. 여섯째, 학생은 식의 계산에서 쓰기 활동이 부족하였다. 단항식과 다항식의 계산에서는 등호를 전혀 사용하지 않았고, 일차방정식의 계산에서는 등호를 중심으로 양변을 쓰는 아래로 내려쓰는 것이 아니라 옆으로 씀으로써 계산에 오

류를 범하고 있었다. 일곱째, 학생은 자신이 계산한 것이나 자신의 사고를 논리적으로 전달하는 능력이 부족하였다.

이를 처치하기 위해 다음과 같은 지도전략에 의해 처방 지도하였다. 첫째, 문자를 도입하는 이유나 문자의 역할을 느끼도록 하기 위해 바둑돌을 이용한 활동을 하였다. 둘째, 개념(용어와 용어의 정의) 정립을 위해 암기하는 활동과 더불어 예를 만들어 보고 그 예가 개념에 타당한 지를 확인하고 그 과정에서 오류를 찾아내는 활동을 하였다. 셋째, 단항식과 다항식의 계산, 방정식의 계산을 혼동하는 것을 처치하기 위해, 균형은유 모델을 이용하여 등호 "="의 의미와 등호의 쓰기 활동과 함께 등호의 개념을 이해하는 활동을 하였다. 넷째, 방정식을 계산할 수 있었지만 등호의 성질을 이용한다는 사실을 인식하지 못한 채 알고리즘을 이용하여 방정식을 풀고 있었기 때문에, 응용문제나 활용 문제 해결에 어려움을 겪었다. 이는 "말하기(표현하기-의미부여하기 ; 어의론적 표상)"활동을 통해 의미를 생각하고 자신의 생각을 의사 소통하는 활동을 지속적으로 하였다. 다섯째, 문장제 문제는 문제를 풀기 위한 활동이 아니라 실생활과 관련하여 이해하는 활동을 먼저 하였다. 등식을 만들기 위해 같아질 수 있는 것을 찾아보고 그 상황을 다이어그램을 이용하여 그림으로 표현한 후, 등식을 세우는 활동을 하였다. 여섯째, 다항식의 계산에서는 등호를 빠뜨리지 않고 쓸 수 있도록 등호의 의미를 가지고 지속적으로 쓰기 활동을 강조하였으며, 방정식에서도 등호를 중심으로 양변을 내려쓰는 활동을 지속적으로 강조하였다. 특히 일차방정식의 활용 문제에서는 시각적인 도구인 그림을 그려서 문제의 조건을 상징적으로 표현하는 방법과 조건을 기록하고 식을 세우는 활동을 하였다. 일곱째, 자신의 생각을 표현하고 정당화하는 "말하기(표현하기)" 활동을 지속적으로 실시하였다.

쟈니는 문제의 뜻을 이해하고 자신이 해결한 이유를 설명하였으며, 배운 것을 적용해보려고 노력하였고 자신이 가지고 있는 문제집의 문제를 가지고 꼭 확인하고, 이해가 안 되는 문제는 질문(그래서 처치시간에 항상 두 시간 정도가 되었음)을 하는 등 적극적인 태도로 학습에 임하였다.

특히 쟈니는 자신이 평소에 매우 어려워 한 문제를 자신이 직접 해결하면서 매우 기뻐하였고 자신감을 얻는 듯하였다. 역시 도전할 만한 과제를 성취했을 때 기쁨은 매우 큰 듯하였다.

"말하기(표현하기)" 활동에서 자신이 해결한 것을 설명해보라고 하였을 때, 처음엔 이것, 저것, 등의 지시대명사를 사용하여 전혀 알아들을 수 없었지만, 4차, 5차 처치 때에는 수학적인 용어를 사용하여 매우 조리 있게 자신의 생각을 설명하였다. 또한 용어의 정의를 복습할 때, 용어(개념)에 대해 자신이 직접 예를 만들어보고 확인하는 활동과 그 활동 중에 발생한 문제를 해결하면서 더욱 더 용어에 대해 확연하게 느끼는 것 같았다. 특히 자신이 잘못 생각하고 있었던 점을 자신이 직접 찾아내면서 깨닫는 것 같았다.

또한 구조화된 쓰기 활동을 통해 "말하기(표현하기)"활동과 검산 활동에 익숙해지는 것을 알 수 있었다. 따라서 학생은 기본 개념을 "말하기(표현하기)", "구성활동(예를 만들기)", "구조화된 쓰기 활동"을 통해 스스로 이해하고 학습하도록 해야 하며, 이해한 내용을 반복 확인하는 기능적인 연습이

뒷받침이 된다면 수학에서의 어려움은 극복될 것이라고 생각된다.

원래 계획에는 없었지만 10월 3일 한번 더 만나서 그 동안 해결하지 못했던 문제들을 지도해 줄 생각이었으나 학생의 개인 사정으로 하지 못했다. 10월 5일 2학기 중간고사를 치른 후, 10월 7일 다시 한번 연구자의 집에서 만남을 가졌다. 마무리가 중요하기 때문에 그 동안 질문하고 싶었던 내용을 질문 받고 중간고사에서 수학성적을 물어보았다. 수학에서 91점이라는 점수를 맞았다고 하였다. 이 점수는 26점과 비교해보면 65점이 향상된 점수여서 연구자도 너무나 기분이 좋았다. 특히 중간고사에서 출제된 문장제 문제를 모두 맞았다고 한다. 잘했다고 칭찬했더니 문제가 매우 쉬웠다고 한다. 처음에 만났을 때 대화의 내용을 상기시켜 주니까, 매우 쑥쓰러워 하면서 학생은 웃었다. 연구자는 굉장한 보람을 느꼈다. 학생은 이제 연구자가 없이도 계속 수학 공부를 열심히 할 것이며 아직도 어렵기는 하지만 해보니까 재미있다며 자신감이 생겼다고 하였다.

연구자가 판단하기에 이 임상실험이 성공적이었다고 생각하는데 이 성공적인 요인을 분석해보았다.

우선 연구자와 학생과의 유대감 형성이 잘되었다는 점이다. 연구자와 학생은 임상지도 하는 동안 매일 전화통화를 하였으며 수학시간의 학습과 학생 스스로의 학습에 대해 늘 관심을 갖고 대화하였으며 특히 과제를 하였는지를 꼭 체크하였다.

둘째는 학생의 학습에 관한 의지와 노력이 대단했다는 점이다. 학생은 문자와 식에 해당되는 교과서의 모든 문제를 풀었고 학생이 가지고 있던 문제집(필승)과 연구자가 선물로 준 문제집(완전정복)을 모두 풀었으며 모르는 문제는 항상 체크해 와서 다음 처치 때 질문하였다. 그래서 항상 처치 시간이 2시간 이상씩 소요되었다. 결국 학생의 의지와 노력이 성공의 가장 큰 요인이었다.

셋째는 학생 주변에서의 관심이 큰 영향을 미쳤다고 볼 수 있다. 학생의 언니는 학생이 임상지도에 선택된 것을 부러워하였으며, 늘 과학실에서 공부하는 것을 지켜봐 주시고 격려해주신 담임선생님, 과학선생님, 수학선생님, 그리고 어머님이 항상 학생을 지켜봐 주시고 격려해주시고 관심을 가져주셨던 것이 학습 동기 유발에 큰 몫을 하였던 것 같다.

넷째는 연구자의 처치 방법으로 연구자가 처치하면서 느꼈지만 답답한 마음을 누르고 학생에게 스스로 해결해보도록 하고 자신의 생각을 설명해보도록 하고 오류를 스스로 깨닫고 수정하도록 한 방법이 학생에게 잘 맞았던 것 같다.

연구자는 이 임상지도를 통해서 깨달은 점이 있다.

우선 연구자가 아직도 다 설명해주고자 하는 마음이 많다는 것이다. 아동이 생각하는 동안 기다리는 것이 매우 인내심을 요구한다는 점이다. 결국 연구자의 교직 경력과 수업 형태가 고쳐지기까지는 많은 노력이 필요하다는 생각이 들었다.

둘째, 학생들에게 도전할 만한 과제를 자신이 직접 성취하도록 하는 것이 학생의 수학 학습에 큰 도움을 줄 뿐 아니라 흥미와 자신감을 준다는 사실을 깨닫는 계기가 되었다. 따라서 수업 준비에서 다양한 도전 과제를 준비하여 학생 개개인에게 맞도록 적절한 시기에 제공해야 한다는 것을 실감하였다.

셋째, 개념이나 용어를 이해하도록 하기 위해 학생 스스로 그 예를 만들어보는 활동이 굉장히 중요하다는 것을 알았다. 이러한 활동을 통해 학생들 스스로 자신의 개념이나 용어를 설명하고 오개념을 발견하고 수정할 수 있는 기회를 제공해야겠다.

넷째, "말하기", "쓰기" 활동은 수학 학습에 매우 중요한 것으로 자신의 생각을 정리하고 오류를 발견하고 수정할 수 있는 기회를 제공한다는 것이다. 따라서 수학 수업에서 "의사소통" 즉 "말하기, 듣기, 쓰기, 읽기" 활동을 강조해야 하며 특히 "말하기"와 구조화된 "쓰기" 활동을 강조해야 한다.

다섯째, 수학 학습에서 알고리즘을 이용해 푸는 활동을 강조할 것이 아니라 그 기호와 개념의 의미를 파악하는 활동을 더불어 강조해야 하며 활용문제는 일상생활의 문제를 해결하기 위해 수학을 활용하는 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 지도하는 것이 필요할 것이다.

여섯째, 쟈니의 학습 부진의 원인이 너무나 단순하다는 생각이 들었다. 왜냐하면 그 원인을 찾아내어 교정하는 것이 너무나 쉬웠기 때문이다. 그러나 중학교 1학년의 학습부진아 대부분이 이러한 원인일 거라는 추측은 시사하는 바가 크다. 수학 학습 부진의 원인은 그때 그때 처치해야 하며 누적될수록 그 학생은 수학을 포기하게 된다는 것을 확실하게 느낄 수 있었다. 따라서 교사는 학생 개개인에게 개별학습을 할 수 있는 기회를 제공하고 학습 상태를 점검하여 부진을 처방할 수 있도록 노력하는 것이 중요하리라고 생각된다. 또한 이러한 일은 매우 어려운 일이 아니며 특히 초등학교나 중학교 저학년에서 많은 노력이 필요하리라고 생각하였다.

대학원에서의 연구기간 뿐 아니라 현장에 돌아갔을 때, 이러한 임상지도를 많이 해 보고 학생들의 사고를 이해할 수 있는 기회를 갖고 싶다. 바쁘고 시간에 쫓겨 힘이 들었지만 매우 보람있는 임상지도였다.

참 고 문 헌

김남희 (1994). 대수적 사고에 관한 고찰: 산술과의 관련성과 변수 개념, 대한수학교육학회논문집, 5(2), pp.189-204, 서울: 대한수학교육학회

김순택 (1979). 교과별 선수능력요인, 신세호 외 3인(편), 학습부진학생에 대한 이론적 고찰, 서울: 한국교육개발원.

김승국 (1997). 학습장애 아동, 김승국 외, 학습장애아동 교육의 이론과 실제, pp.1-23, 서울: 교육과학사.

박근덕 (1996). 수학과 교수-학습에서의 표현에 관한 연구, 한국교원대학교 박사학위논문.

박성익(편저) (1996). 학습부진아 교육. 서울: 한국교육개발원.

심진옥 (1998). 초등학교 6학년 아동의 일차방정식에 관한 구문론적·어의론적 성향에 대한 사례연구, 한국교원대학교 초등석사학위논문.

이정은 (1998). 중학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결 전략 및 오류 분석, 한국교원대학교 석사학위논문.

황정규 (1979). 학습사의 맥락에서 본 학습 부진아. 신세오 외 3인(편), 학습부진학생에 대한 이론적 고찰, 서울: 한국교육개발원.

Kaput, J. J. (1989) Linking Representation in the Symbol System of Algebra. *Research Issuses in the Learning and Teaching of algebra* **6**, pp.157-194, Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1982). The Early Learning of Algebra; A Structural Perspective. *Research Issues in the Learning and Teaching of Teachers of Mathematics*, pp.47-52.

Kuchemann, D. E. & Algebra, In K. Hart(Ed.) (1981). Children's understanding of mathematics, pp.11-16, London; Murray.Sutherland, R. (1992). What is algebraic about programing in Logo? In Hoyles, C. & Noss, R (Ed.), *Learning mathematics and logo*. London : The MIT Press.

Mayer, R. E. (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition*, New York : W. H. Freeman and Company, pp.354-375.

Mollie MacGregorr (1998). *Language and Communication in the Mathematics Classroom.*

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education, *Journal for Research in Mathematics Education*, **10(3)**, pp.163-172.

Schoenfeldd, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, pp.334-370.

Threadgill-sowder, J. & Sowder, L. (1982). Drawn Versus Verbal Formats for Mathematical Story Problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, **13(5)**, pp.324-331.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford (Ed.). *The idea of algebra, K-12(1988 Yearbook)*. Reston, VA: NCTM.

Vos, K. E. (1979). The Effect of Three Instructional Strategies on Problem Solving Behaviors in Secondary School Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, **7(5)**, pp.264-275.