韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 12집, 2001. 8. 185-200.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 12, Aug. 2001. 185-200.

점진적 구성의 증명지도를 위한 학습 프로그램 개발 연구

박 주 희 (부산상업고등학교)

증명은 수학에서 기초적이고도 중요한 주제이다. 추측을 만들어내고 자신에게는 물론 타인에게까지 그 추측을 정리로서 확신시키는 활동은 수학활동에서의 핵심이라고 할 수 있다. 그러나 현재의 증명 학습 지도에서는 학생들의 수준보다는 높은 증명 발달단계를 제시하고 있다는 보고와 함께 기존의 지도방법의 개선책을 요구하고 있다. 따라서 본고에서는 몇 가지 증명의 발달 단계를 정리해 보고 Balacheff의 증명 4단계를 토대로 하여 증명활동을 점진적인 구성으로 제시한다.

I. 서 론

추론은 문제해결과 함께 수학교육의 중요한 목표 중의 하나이다. Dreyfus외(1990)에 따르면 어떤 사실을 증명하는 것은 수학적 행위의 주요한 부분이고, '다른 학문 분야에서의 과학적 행위로부터 가장 명백하게 구별할 수 있는 수학적 행위'이다(Battista & Clements, 1995). 일상생활의 관찰을 통하여 추측을 만들어 내고, 그 추측을 정리로서 확신하기 위해서 행하는 활동은 수학자들의 특성 중의 하나이다. 마찬가지로 교실에서의 어린 수학자인 학생들도 자연스러운 탐구활동이 필요하며 이 과정을 통해 생각하는 수학을 배워야 한다.

단지 추측한 것이 옳다는 것을 자기 자신에게는 물론, 타인에게까지 인정하게끔 하려면 논리체계에 맞게 정당화하는 활동이 필요하다. 이것을 우리는 학교 수학을 통해 증명이라는 활동으로 배운다. 그런데 증명활동은 때론 수학을 전공한 사람들까지 어려워하고 꺼려하는 부분 중의 하나가 되었고 대부분의 사람들은 학교 수학에서 증명이 무엇인지, 어떻게 해야 하는지, 증명을 왜 해야하는지에 대한 증명의 참 묘미를 못 느낀 채 단지 절차를 암기할 뿐이다. 그래서 증명은 한 가지 형태로 정해져 있는 유일한 것이라는 잘못된 생각을 가지고 있어서 한 가지 방법 외의 것은 모두 틀린 것이며 가치가 없다고 느끼는 경우가 종종 있다. Williams(1980)의 고등학생의 수학적 증명의 이해에 대한 조사 연구를 살펴보면, 높은 수준으로 분류된 표본의 30% 이하의 학생들만이 수학에서 증명을 이해했고, 표본의 50%의 학생들은 직관적으로 분명한 것으로 생각되는 수학적 명제를 증명할 필요성을 알지 못했다. 또한 학생들의 70%가 귀납적 추론과 연역적 추론을 구별하지 못했다. 그리고, Senk(1985)의 연구에 따르면, 1년 동안 증명을 강조하는 수업을 했음에도 불구하고 단지 30%의 학생들만이 75%의 숙달된 수준에서 증명을 쓰는 것을 터득했다.

학생들이 학교 수학을 통하여 배운 증명활동에 잘못된 인식을 가지게 됨은 물론 가르치는 교사 또한 증명 지도에서의 어려움을 느낀다. 그 원인으로 학생들의 사고 수준이 van Hiele의 기하학적

사고 발달단계 수준과는 맞지 않는다는 점이 많은 연구로부터 분석되었다(최현호외, 1990; 류성림외, 1993). van Hiele(1986)은 기하학적 사고수준을 제 0수준에서 제 4수준까지 5단계로 구분하고 있고, 학생들의 수준이나 발달단계에 따라 적당한 기하교육의 학습지도가 이루어져야 한다고 주장한다. 그런데 van Hiele의 기하학적 사고수준과 기하지식, 증명 성취도에 관한 연구에서 '학생들이 증명에 성공하지 못하는 이유는 학생들이 갖고 있는 기하학적 사고가 증명 학습에 필요한 수준에 도달해 있지 못한 때문'이라고 한다(Senk, 1989).

따라서 현 교육과정에서 증명 지도의 흐름은 비형식적 증명을 통하여 형식적 증명으로 옮겨가자는 점진적 구성이 제안된다. 현재의 수학과 교육과정은 "사실에 대한 추론"보다는 "사실"을 강조하고 있다고 비판한다(Sowder & Harel, 1998). 수학교육에서의 추론에 대한 관심은 '형식적 증명이 기하에서 역할을 해야 한다'는 점에서 '점진적인 수준에서 연구되어야 한다'는 내용영역으로 흐르고 있고(Battista & Clements, 1995), 엄밀한 증명의 개념으로부터 논의를 확신시키는 증명의 개념으로 이동되고 있다(Hanna, 1990).

신현용, 장병철(1998)은 '한국 · 중국 · 러시아의 수학교과서에서의 기하증명에 관한 비교연구'에서 세 나라의 증명과 도형의 도입, 교과서의 내용과 문제수준, 증명제 비율과 문제 수준과의 관계 비교를 통하여 우리 나라의 증명에 관한 교육과정에서의 지도 방향을 제안했다. 그들의 연구에 따르면, 중학교 증명에 대한 교과서 내용에 비형식적 증명활동이 수반된 연습과정을 더 많이 두고, 연역적 체계에 대한 증명 지도 과정을 좀 더 상세화 할 필요가 있다. 또, 박기수(1990)는 이와 같은 맥락에서 교과서가 너무 형식적 경향이 짙으며 많은 시간을 형식적 증명의 지도에 소비한다고 비판하고, 비형식적 표현(informal representation)과 비형식적 증명(informal proof)을 학습자의 구성적 활동, 재발견과정, 수학적 과정을 통해서 바르게 이해되게끔 적용하여 점진적으로 형식화 할 것을 제안한다.

김홍기(1998)는 증명에 대한 기본양식을 이해하기 위해서는 수리논리를 알아야만 하는데 우리 나라의 중등 학교 수학에서는 수리논리를 다루고 있지 않기 때문에 증명에 대한 기본양식의 엄밀한 이해를 바라는 것은 무리라고 언급했다. 또 그의 미국과 일본의 교과서의 증명부분 연구에 따르면, 미국의 7학년 교과서에서는 귀납적 추론을 도입하여 수들의 패턴, 기하학적 도형을 발견하게 하며 그 후 대수에서와 기하에서 간단한 비형식적 증명을 다룬다고 한다. 이러한 연구들은 비형식적 증명이 형식적 증명을 대신하여 자리를 차지해야 한다는 것이 아니라 형식적인 증명의 지도에 앞서 보충으로 이용해야 한다는 것을 말한다.

따라서 본고에서는 먼저 증명이란 의미를 다시 생각해 보고, Piaget의 추론의 단계와 van Hiele의 다섯 수준, Tall의 인지적 발달단계, Balacheff의 증명 4단계를 정리해 본다. 그리하여 비형식적인 활동을 통하여 접근할 수 있는 문제, 일반적인 법칙을 발견하는 활동을 할 수 있는 문제, 형식적 증명을 할 수 있는 문제로의 점진적 구성의 학습 프로그램을 제시하고자 한다. 그럼으로써 학생들의 심리적 발달단계에 따른 가치 있는 증명활동을 경험하게 함으로써 추론능력을 향상시키고, 나아가 수학적 사고의 힘을 느끼게 하는데 그 목적이 있다.

Ⅱ. 수학교육에서의 증명

1. 증명의 의미

증명은 수학에서 기초적이고도 중요한 주제이지만, 학습과 그리고 지도의 측면에서 보면 여러 가지 어려운 점이 있다. 그런데 대개 증명의 의미에 대한 범위를 조금씩 달리 사용하고 있다.

일반적으로 우리가 일상생활에서 쓰는 용어로서의 증명(證明, proof)은 "어떤 사항・판단・이유 등에 대하여 그것이 진실인지 아닌지 증거를 들어서 밝히는 것"1)이다. 이러한 정의는 상대방을 확신시키거나 설득시키기 위해서 완전하지는 않지만 증거가 되는 사실을 제공하는 evidence나 validation, conviction, verification이라는 단어에 좀 더 가깝다. 하지만 또 다른 사전적 의미에서의 증명은 "논리학에서 어떤 명제의 타당성을 확립하는 논증으로서 귀납논리에 기초한 증명도 가능하지만 일반적으로 증명이란 용어는 엄밀한 연역을 의미한다. 논리학과 수학의 형식적 공리체계에서 증명은 승인된 형성규칙들에 따라 만들어진 유한계열의 정식들로 나타난다."2) 이것은 엄밀한 기하원론 속의 증명체제인 완성된 결과물로서의 증명을 의미한다. 즉, 후자의 증명의 의미는 전자의 증명의 의미보다 좀 더 형식적인 틀을 요구한다. 이와 비슷한 경우로, 프랑스어로 'preuve' 와 'demonstration'는 모두 증명(proof)이라고 번역되는데 실은, 'demonstration'은 정리(theorem)의 경우에 대하여 사용되며 'preuve'는 "증거(evidence)의 선상에서 낮은 의미로 또는 상대적으로 비형식적인 경우에 사용된다. 그리하여 'demonstration'은 수학적 증명(mathematical proof)으로 'preuve'는 증명(proof)으로 주로 번역된다. 이와 같이 크게 본다면 일상적인 넓은 의미에서의 비형식적 증명과 수학적 상황에서 주로 쓰이는 형식적 증명인 수학적 증명으로 구분될 수 있다. 예를 들어, 7학년-나단계에서 나오는 기하 증명 중의 대표적인 "삼각형의 내각의 합은 180도 임을 증명하여라"는 문제를 만약 임의의 삼각형 ABC을 칠판에 그리고 각도기로 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 를 각각 재어서 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$ 임을 보였다면 이것은 수학적 증명이라고는 할 수 없다. 단지 한 두 가지의 예를 통해 명제가 참인가 거짓인가를 확인하는 수준이라고 해야할 것이다. 그런데 학교수학에서는 유클리드 기하의 평행선 공리를 이용한 엄밀한 수학적 증명을 요구한다.

Tall(1998)에 따르면, 수학적 증명(mathematical proof)은 두 가지의 주요한 아이디어에 기초해야만 하기 때문에 동료를 확신시키는 것과는 구별된다. 한 가지는 정확히 나타내어진 정의(definitions)와 서술(statements)이 필요하고 또 다른 한 가지는 한 가지 서술로부터 다른 한 가지의 참(truth)을 추론하기 위해서 동의된 절차(agreed procedures)가 필요하다는 것이다. 즉, 컴퓨터의 스케치 프로그램을 이용하여 정리(theorem)를 시각적으로 확인하는 것은 수학적 증명이 될 수 없으며, 그 이상으로 참임을 추론할 수 있는 수학적 언어로 기술된 동의된 절차가 필요하다. 그림 1과 같이 De Villiers(1996)가 제시한 '증명의 기능을 위한 모델' 에서 본다면, 수학적 증명은 참과 거짓을 판별하

---

1) 금성출판사

2) 한국 브리태니커 온라인 <http://preview.britannica.co.kr/bol/topic.asp?article_id=b20j0421a>

는 확인의 기능을 넘어서 탐구, 발견, 조직화뿐만 아니라 지적도전, 의사소통의 기능까지 기대된다. 우리의 학교 수학에서는 형식화된 수학의 전달, 전수의 중심에서 벗어나 추론활동, 논박을 위한 의사소통과 수학을 만들어 가는 기능을 해야 한다.

· 확인 (서술의 진리(참)와 관련)
· 탐구 (왜 그것이 참인가에 대한 통찰을 제공)
· 발견 (새로운 사실의 발견과 발명)
· 조직화 (공리의 연역적 체계, 주요 개념과 정리로부터의 다양한 결과를 조직화)
· 지적 도전 (증명을 구성하는 것으로부터 유도된 자기 실현/성취)
· 의사소통 (수학적 지식의 의미와 전달의 협상)

<그림 1> 증명의 기능을 위한 모델

De Villiers(1996)의 연구에 따르면 증명의 기능을 위한 모델에서 각 기능의 중요성에 있어서 특별한 순서는 전혀 없다. 그리고 전통적으로 확인의 기능이 거의 독점적이었고, 학습지도에서 증명은 주로 의심을 제거하는 것이며 증명하기(practice)를 가르치는 것에 전적으로 행해져 왔다고 한다. 그는 확인의 기능 외의 다른 기능들도 중요하다고 보고 있다. 만약 우리가 이 기능들 중에서 한 가지의 기능만을 중시하는 편파적인 방향으로 완고하게 고집해 나간다면, 그는 Hogan의 표현을 빌어 '증명의 죽음'을 우리 스스로가 준비하는 것과 마찬가지라고 신랄하게 비판한다.

학교수학에서 전통적으로 제시되는 증명의 형태는 유클리드 기하의 공리적이며, 형식적인, 수학적 증명이다. 따라서 본고에서의 증명지도의 최종 목표는 학생들이 수학적 증명에 도달할 수 있게 하는 데 있다. 학생들은 종종 수학적인 증명에서 각 단계가 그 이전의 단계로부터 유도되었음에도 불구하고 전체적으로는 이해를 하지 못하며 결국 증명의 이해에는 실패를 하게 된다. 이는 앞서 제시한 증명의 기능을 위한 모델에서 증명의 여러 기능들을 학생들 스스로 맛보지 못했기 때문이다. 따라서 수학적 증명에 도달하기 위해서 점진적인 구성이 필요하다. 또 형식적인 증명에 도달하기 위해서 패턴을 찾는 등의 탐구 단계에서는 일반적인 넓은 의미에서의 증명을 정당화로서 폭넓게 인정을 하고자 한다.

2. 몇 가지 증명의 인지발달단계와 Balacheff(1987)의 증명 4단계

Piaget(1928)는 "학생들이 어떻게 단계를 거쳐 진보하는가?", "우리의 사고가 다른 사람의 사고와 접촉하는 것은 충격임에 틀림없다. 이것은 의심과 증명하기를 원하는 것을 생산한다. 증명은 논의로부터 나온다."(Thompson, 1996, 재인용)라고 했다. 어떤 단계를 통해서 수학적 증명하기를 완성할 수 있는가를 대표적으로 Piaget와 van Hiele, 그리고 Tall의 연구를 살펴보면 다음과 같다.

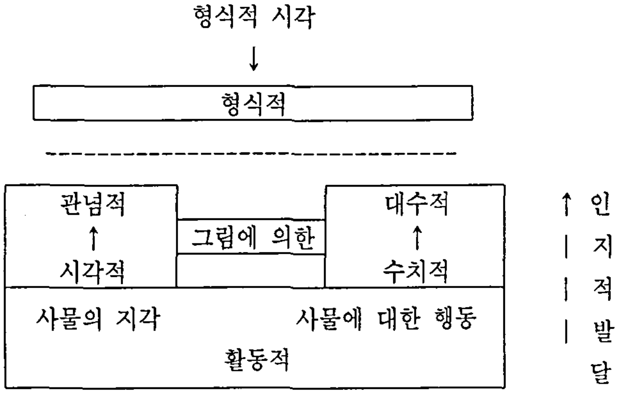
Piaget는 논리적 필수로서 증명을 구성하는 능력은 3 단계를 거쳐 개발된다고 제시했다. 1단계는

비반성적, 비논리적, 비대칭적인 단계이며, 이때는 많은 학생들이 패턴을 일반화하는데 실패한다. 다음 단계에서는 학생들은 추측을 만들기 위하여 경험적 결과를 사용할 뿐만 아니라 그 추측을 정당화하려고 시도한다. 그들은 정보를 위한 연구결과를 기대하고 단지 자신이 믿고 있는 전제에 대하여 논리적으로 생각할 수 있다. 그러나 형식적인 추론을 할 수 있는 단계는 마지막 3단계에 도달해서이다. 형식적인 연역 추론을 할 수 있고 수학적 체계 내에서 조작할 수 있다.

1950년대 van Hiele은, 왜 많은 학생들이 기하 학습에 어려움을 느끼고 있는지에 대해서, 이러한 어려움을 없애기 위해서는 어떤 방법이 사용될 수 있는지에 대한 연구를 하였다. van Hiele은 Piaget의 이론을 바탕으로 수학 학습 사고 수준의 체계를 세우고, 이를 통해서 지도하는 것만이 기하학습에서의 어려움을 해결할 수 있다고 생각했다. Piaget는 일반적인 생각의 발달단계를 제시한 반면 van Hiele의 기하학적 사고 수준의 이론은 특히, 학교 교육과정 영향아래 몇 개의 단계를 거쳐 개발되는 사고를 5수준으로 제시하고 있다(Battista & Clements, 1995). 1수준(시각적)은 학생들은 외관에 기초한 기하학적 모양과 그 이미지 위에서 수행한 시각적 변형을 추론한다. 원형을 본 후에, 종종 시각적 형태로서 사각형과 삼각형, 그러한 그림을 동일시한다. 2수준(설명적/분석적) 학생들은 실험에 의한 추론을 한다. 관찰, 측정, 그림 그리기, 모델 만들기에 의해 모양의 성질들을 세운다. 모양을 시각적 전체로서가 아니라 그들의 성질에 의해서 세운다. 3수준(추상적/비형식적 연역) - 학생들은 논리적으로 추론한다. 추상적인 정의를 형성할 수 있고 개념에서 필요조건과 충분조건 사이를 구별할 수 있다. 그리고 이해하고 때때로 논리적 논의까지도 제시한다. 성질들을 분석함으로써 계층적으로 그림들을 분류할 수 있고 그들의 분류를 정당화하기 위하여 비형식적인 논의를 준다. 4수준(형식적 연역) - 학생들은 논리적으로 공리, 정의, 정리와 같은 기하학적 진술을 해석함으로써 형식적으로 추론한다. 주어진 결과로서 결론을 논리적으로 정당화하는 서술의 결과를 만드는 것에 의해 원래의 증명을 구성할 수 있다. 5수준(엄밀/수학적) - 학생들은 정당화하기보다 수학적 체계에 대한 형식적인 추론을 한다. 그들은 조작적인 공리와 정의의 결과를 분석할 수 있다.

Piaget와 van Hiele의 이론은 학생들이 이전의 기하학적 사고의 낮은 단계를 지나 높은 단계를 성취하고 이것은 간주되는 시간에 거쳐 통과한다. van Hiele의 이론은 수업이 학생들이 이전의 기하학적 사고의 낮은 단계를 거쳐 점차적으로 앞으로 나아갈 수 있도록 도와야 한다는 것을 제안한다. 학생들은 단계를 우회하고 이해를 성취할 수 없기 때문에 조숙하게 형식적 증명을 다루는 것은 학생들을 단지 기억하는 것을 이루는 것으로 이끌 수 있고 증명의 목적에 혼란을 준다. 게다가 두 가지 이론 모두 단지 그들이 두 가지 모두의 계층에서 제일 높은 단계에 도달한 후에야, 공리적 체계를 이해할 수 있고 분명하게 연구할 수 있다는 것을 제안한다(Battista & Clements, 1995).

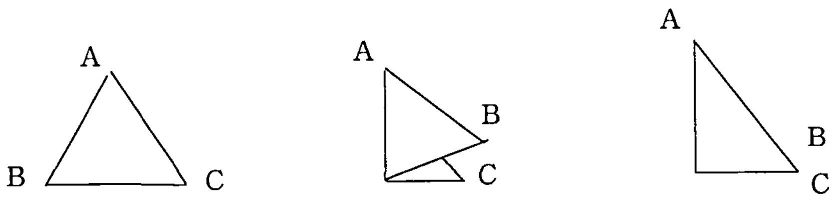
Tall(1998)에 따르면 아이들의 인지적 발달은 복잡한 정신적 개념의 구조에 의해서 특징지어지며 완전히 형식적인 공리적 표현은 좀 더 복잡한 단계에서 개발된다. 그는 수학적 지식에서 인지적 발달을 다음의 <그림 2>와 같이 도식화하였다.



[Tall, 1998, p.120]
<그림 2> 표상의 인지적 발달

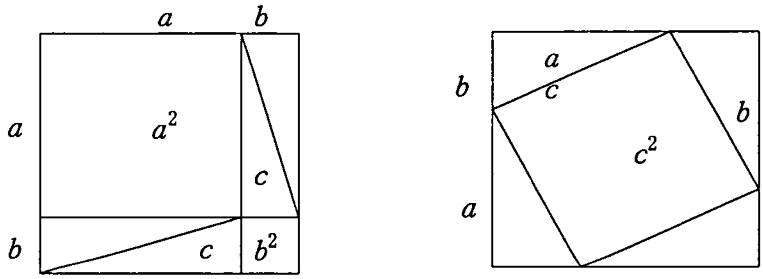
Tall의 이러한 인지적 발달에 대한 표상은 Bruner의 세 가지 종류의 표상의 발달에 그 바탕을 두고 있다. Bruner에 의해 공식화된 것은 활동적(enactive), 영상적(iconic), 기호적(symbolic)표상인데 Tall의 제시하는 활동적 증명도 Bruner와 마찬가지로 의사소통의 가장 기본적인 것으로 활동적인 표현, 즉 제스처와 물리적 행동으로 생각했다.

가장 초보적인 단계인 활동적 증명은 어떤 사실을 증명하기 위하여 물리적 행동을 수행하는 것을 포함한다. 이것은 반드시 시각적 언어적 지지를 포함하지만 필수적 요인은 필요한 관계성을 보이기 위해서 물리적 움직임을 필요로 한다. 활동적인 증명의 예로서 "같은 변의 길이를 가진 삼각형은 같은 각을 가진다"는 것을 보이기 위해서 아래의 그림 3과 같이 삼각형을 종이를 두변의 종이를 맞추어서 대칭이 되도록 접어서 두 각이 같음을 보일 수 있다.



<그림 3> 두 변이 같으면 두 각이 같다는 것을 보여주는 활동적(시각적) 증명

시각적 발달은 언어적 기술의 사용(평면기하에서 점들, 선들, 원, 사각형 등과 같은)으로 분류되어진 환경에서 사물의 지각에 초점 맞춰진다. 기하에서의 증명은 유클리드 기하에서 언어적 정의와 관념적 상상을 사용하여 옮기는 초기의 상태에서 물리적 증명을 포함할 수 있다. 예를 들어 다음은 유명한 고전적인 인도의 피타고라스의 증명이다.



<그림 4> (Bhaskara 이후의)피타고라스의 (활동적) 시각적 증명

피타고라스 정리의 Bhaskara에 의한 그림 증명을 "보기"위해서는 정사각형 내에 있는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형 4개를 옮겨서 다른 배치로 움직일 수 있는가를 상상하는 것이 필요하다. 변 a, b와 빗변 c를 가진 직각 삼각형의 4개를 가지고 그들을 변의 길이가 a + b인 정사각형에서 다른 두 가지 방법으로 대체한다. 남겨진 면적은 면적 a^2과 b^2 두 가지로서 혹은 단일의 정사각형의 면적 c^2을 가진 것으로서 표현이 될 수 있다. 따라서 $a^2+b^2=c^2$이다.

두 버팀목이 되고 있는 시각적/이상적 과 수치적/대수적 발달은 수치적 연관성의 시각적 표상을 거쳐 혹은 기호적 관련성을 시각화하기 위하여 실선과 좌표평면의 사용을 통하여 시각적과 기호적 사이를 연결하고 있다. 그 다음에 평행하게 좌표평면 기하에서의 대수적 조작과 유클리드 기하에서의 증명 사이에 평행하게 놓여 있다. 인지발달에서 꼭대기는 형식적(공리적)증명이다. Tall은 많은 학생들에게 크나큰 어려움을 야기하는 형식적 증명의 변화에서 인지적 장벽이 있음을 보이는 것을 의도했다(Tall, 1998).

Balacheff는 증명의 단계를 소박한 경험주의, 결정적 실험, 포괄적인 예, 사고실험으로 분류를 했고, Simon 과 Blume(1996)은 이 네 단계를 그림과 같이 간결하게 기술했다(Knuth & Elliott, 1998).

[Balacheff의 증명의 4단계]

소박한 경험주의에서 학생은 작은 경우의 수로부터 주장이 유효하다는 결론을 내린다.

결정적 실험에서 학생은 매우 특별[예를 들어 극단적인 경우를 선택하기]하지 않은 경우를 테스트해봄으로써 일반화의 질문을 좀 더 명백히 다룬다.

포괄적인 예에서 학생들은 '포괄적인 예'(예를 들어 사물의 종류를 대표하는 예) 기초한 주장을 개발시킨다.

사고실험에서 학생들은 특별한 예로부터 그들의 설명을 분리하기 시작하고 지적인 증명을 위해 실제적으로 옮겨가기 시작한다.

Balacheff가 제시한 단계 중의 소박한 경험주의, 결정적 실험, 포괄적인 예는 엄밀히 말하면 완전히 형식적인 수학적 증명은 아니다. Piaget의 사고 발달 단계에서의 1단계인 비반성적, 비대칭적, 비논리적인 단계와 정당화를 시도하는 2단계까지 역시 수학적 증명이 아닌 정당화의 범위로 묶을 수 있다. Tall의 인지발달단계에서도 역시 최종적인 형식적 증명 단계의 이전 단계인 그림에 의한 증명, 활동적 증명은 엄밀한 수학적 증명의 범주에 넣을 수 없다.

	Balacheff의 증명의 단계
수학적 증명	사고실험
증명(정당화)	포괄적인 예 결정적 실험 소박한 경험주의

소박한 경험주의 단계에서는 앞서 제시된 De Villiers의 증명의 기능모델에서 서술의 참과 거짓을 구분할 수 있는 '확인'의 기능이 작용된다. 포괄적인 예와 결정적 실험의 단계에서는 그것이 왜 참인가에 대한 통찰을 제공할 수 있는 탐구의 기능과 새로운 사실의 발견, 발명할 수 있다. 마지막 사고실험에서는 공리적 연역 체계에 따라 논리적으로 증명을 구성한다.

Balacheff의 증명의 단계는 교사가 학생들이 문제의 해답에 대하여 정당화로서 논의하고 반성하고 논의의 다양성을 제시하는 것에 몰입할 때 그릴 수 있는 틀로서 구실을 한다. 이 틀은 수학적 증명의 특성에서 좀 더 동적인 시험을 제공해 줄뿐만 아니라 개별적 학생의 장단점의 논의를 생기게 한다. 그러한 경험은 번갈아 학생들의 변화를 좀 더 진보된 수학에서 증명의 이해와 사용을 길러준다 (Knuth & Elliott, 1998)

Ⅲ. 수학교실에서의 증명지도를 위한 학습 프로그램

1. 가상의 수업 사례

다음은 "둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 최대의 넓이를 갖는 것은 정사각형이다." 라는 주장을 증명하기 위한 문제의 구성이다. 아래의 문제 B나 문제 C에서는 이차함수의 최대최소 혹은 산술평균과 기하평균과의 대소관계를 필요로 하므로 9학년의 단계나 10학년의 단계에서 제시할 수 있는 증명문제로 적당할 것이다. 여기에서 제시된 연속되는 문제 A, 문제 B, 문제 C는 수학의 정당화를 포함하는 하나의 방법적인 예를 제공한다. 형식적인 수학적 증명은 아니지만 일반적인 결과의 정확함을 정당화로서 확신하여 추론 능력의 향상과 이해를 증진시킬 수 있다.

교사 : 어제는 문방구에 종이를 사러 갔어. 그런데 문방구에서는 종이를 잘라서 판매를 하며 그 종이를 잘라 가는데는 조건이 있다는 거야.

학생 : 그 조건이 뭔데요 ?

교사 : 음... 문방구 주인이 말하기를 '종이를 직사각형의 모양으로 자를 수 있으며 그 직사각형의 둘레의 길이는 30 *cm*만큼만 잘라야 된다'고 했어. 둘레가 30 *cm*만 되면 가격은 다 같다고 했거든. 그리고 둘레의 길이는 정수 단위의 길이만 잴 수 있어.

학생 : 그럼 줄자로 그 종이 위에 재어서 30 *cm* 되는 만큼만 잘라 가면 되잖아요.

교사 : 그런데 난 종이가 많이 필요해서 되도록 최대한 큰 종이를 사고 싶어.

학생 a : 음... 어떻게 하나 마찬가지 아닌가요 ? (같은 넓이를 갖지 않나요 ?)

교사 : 글세.... 그럴까 ? 만약 간단히 둘레의 길이가 30 *cm*인 경우를 생각해보자. 가로, 세로가 각각 $2cm, 13cm$인 경우와 가로, 세로가 각각 $5cm, 10cm$인 경우는 넓이가 어떠니 ? (칠판에 각각의 경우를 그려서 비교해 본다)

학생 a : 그렇구나. 가로, 세로의 길이를 어떻게 설정하는가에 따라 넓이가 크게 차이가 나네요.

교사 : 그렇다면, 어떻게 하면 좋을까 ? 가로, 세로의 길이가 얼마가 되게 자르면 가장 넓이가 큰 직사각형이 될까 ?

(· · · · 학생들 잠시 생각할 기회를 가짐)

학생 b : 가로, 세로가 각각 10 *cm*, 20 *cm*이면 어떨까요 ?

학생 a : 안돼. 그러면 직사각형을 못 만들어. 그러면 둘레의 길이 30 *cm*를 다 써버려서 직사각형이 안돼.

학생 b : 아 ! 그렇구나. 그러면 길이가 같은 가로가 2개, 또 길이가 같은 세로가 2개가 있어야 되니까. 가로의 길이와 세로의 길이가 더해서 30 *cm*가 아니라 15 *cm*가 되어야 하는구나.

교사 : 그렇지. 자. 그럼 다음의 문제를 각자 풀어보자. 표를 채워 가면서 최대의 넓이를 가지는 직사각형의 가로와 세로의 길이는 얼마인지 각자 구해보자.

[활동지] --

[문제 A] 어떤 직사각형의 가로와 세로의 길이가 정수이고 둘레는 30 *cm*이다. 이때 직사각형이 가질 수 있는 넓이를 다음의 표를 활용하여 구하시오. 또, 최대 넓이를 가지는 직사각형의 가로와 세로의 길이는 어느 때인지 살펴보자.

<표> - 변의 길이에 따른 직사각형의 넓이

가로 길이(cm)	세로 길이(cm)	넓이(cm^2)
·	·	·
·	·	·
·	·	·
·	·	·
·	·	·
·	·	·
·	·	·

교사 : 가능한 가로의 길이와 세로의 길이를 모두 생각해 보자. 가령 가로의 길이가 1이라면 세로의 길이는 얼마일까 ?

학생 a : 두 변의 합이 15cm가 되어야 하니까 그것은 14 cm이예요.

교사 : 그래. 그럼 이때의 넓이는 ? 이렇게 가능한 모든 경우를 생각해보자.

· · · · · · · · · · ·

(교사 : 순회지도, 학생들 : 활동지의 표를 작성)

교사 : 자. 그럼 대부분이 표를 작성을 했는데, 최대의 넓이가 되는 직사각형의 경우는 어떤 경우일까 ?

학생 c : 가로 길이, 세로 길이가 각각 7cm, 8cm일 때 최대가 됩니다.

학생 b : 그 반대인 (가로, 세로 각각 8cm, 7cm인) 경우도 되구요.

교사 : 그러면 가능한 직사각형의 최대의 넓이는 ?

학생 c : 두 가지 경우 모두 56cm^2로 똑같네.

교사 : 그럼. 가로와 세로의 길이는 7cm, 8cm 혹은 8cm,7cm로 차이가 없군요. (칠판에 최대의 면적은 정사각형에 가까운 것이라는 것을 의도하기 위하여 가로 세로의 길이가 7cm, 8cm 혹은 그 반대가 되는 경우를 그려 제시한다.)

Balacheff의 증명의 4단계에서 첫 단계는 소박한 경험주의인데 실제적으로 한 두 가지 예제로 확인하거나 값을 대입하여 확인해 봄으로써 정리의 참을 알 수 있는 단계이다. 문제 A는 직접 가능한 변의 길이를 표를 통해 작성을 하고 그에 따르는 넓이를 확인하게 한다. 문제 A의 표에서는 가로, 세로의 길이가 1 cm, 14cm일 때부터 가로의 길이를 1 cm씩 늘려가고 세로의 길이는 1 cm씩 줄

여갈 때 넓이가 점점 커진다는 패턴을 탐구하게 하고 가로, 세로의 길이가 각각 $7cm$, $8cm$ 혹은 $8cm, 7cm$ 일 때 56 cm^2로 최대의 넓이를 가진다는 것을 발견하게끔 한다. 가로, 세로의 길이가 거의 비슷하게 될 때 최대의 넓이를 가질 것이라는 것을 추측해 보고, 직접 가로 세로의 길이가 각각7.5 cm인 정사각형일 때를 직접 계산하여 결정적 실험 단계로 발전할 수 있다.

[활동지] --

[문제 B] 어떤 직사각형의 둘레는 30 cm이다. 이때 직사각형이 가질 수 있는 최대 넓이는? 이 때, 직사각형의 가로, 세로 길이를 구하고 왜 그런지 설명해 보자.

교사 : 이번에는 다음의 문제로 시작해보자.

학생 a : 어. 문제 A와 똑같은데요 ?

교사 : 정말 똑같니 ?

학생 a : 아... 그렇구나. 찾았어요. 문제 B는 문제 A에서 가로, 세로의 길이가 정수라는 조건이 없어요.

교사 : 이제 여러분이 생각해야 되는 범위는 정수단위만이 아니군요. 어떻게 가로, 세로 길이를 설정하면 좋을지 나름대로의 방법대로 생각해보자.

학생 : .....

교사 : 네가 예상하는 가로, 세로의 길이는 얼마니 ?

학생 : .....

학생 c : 문제 A의 표에서는 가로, 세로의 길이가 1 cm, 14cm일 때부터 가로의 길이를 한 단위씩 높여가니까 넓이가 점점 커졌어요. 그리고 $7cm$, $8cm$ 혹은 $8cm, 7cm$ 일 때 56 cm^2로 최대의 넓이를 가졌어요. 그래서 아마도 가로, 세로의 길이는 $7cm$와 $8cm$ 사이의 길이를 가질 것 같아요.

교사 : 그럼 예상한 길이가 과연 최대의 넓이를 갖는지 확인해 보자. 최대의 넓이를 갖는 가로, 세로의 길이를 찾을 수 있는 또 다른 의견은 없니?

문제 A에서 이용한 표에서 단위를 좀 더 세분화해서 패턴을 탐구할 수 있다. 그래서 최대의 면적을 갖는 경우는 가로와 세로의 길이가 갖은 정사각형임을 확인할 수 있다.

<표> - 변의 길이에 따른 직사각형의 넓이

가로 길이(cm)	세로 길이(cm)	넓이(cm^2)
7.0	8.0	56.00
7.1	7.9	56.09
7.2	7.8	56.16
7.3	7.7	56.21
7.4	7.6	56.24
7.5	7.5	56.25
·	·	·
·	·	·
·	·	·
8.0	·	·

또한, 학생들은 계산기를 사용하여 예상한 값을 실제로 계산하여 확인할 수 있고, 혹은 둘레의 길이가 일정한 가로, 세로의 길이 그리고 넓이와의 관계를 식으로 세워 그래픽 계산기의 draw 기능으로 이차함수의 최대값을 찾을 수도 있다.

가로와 세로의 길이를 각각 문자 a와 b로 표현하면

$2(a+b)=30$ 이고

$b=15-a$ .... ㉠

이 때의 가로, 세로의 길이에 따른 넓이 $S=a\times b$ 이므로 ㉠에 의해서

$=a(15-a)$

$=-a^2+15a$ .... ㉡

㉡의 식 $S=-a^2+15a$ 을 그래픽 계산기에 식을 입력하고 이차함수 그래프를 그린다음 최대값 56.25(cm^2)을 찾을 수 있다.

한편 대수의 식의 조작에 의한 증명으로 학습을 유도할 수 도 있다.(㉡의 식 $S=-a^2+15a$에서 완전제곱꼴의 표현으로 변형하면 꼭지점은 $a=\frac{15}{2}$ 에서 최대값 $(\frac{15}{2})^2$= 56.25를 갖고 $b=\frac{15}{2}=a$ 이다.)

둘레의 길이가 30cm로 일정할 때 직사각형의 넓이가 최대가 되는 것은 가로, 세로의 길이가 각각 $a=b=7.5$인 정사각형임을 확인이 된 후에는 좀 더 포괄적인 예로 발전할 수 있다. 둘레의 길이를 구체적인 수치 30 cm로 제한하지 않고 일정하다는 조건만 주었을 때 다음의 문제와 같이 일반화할 수 있다.

[활동지] --

[문제 C] 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 것은 정사각형임을 증명하여라.

교사 : 둘레가 일정하게 30 cm로 정해지지 않고 단지 직사각형의 둘레가 일정하다는 조건만으로도 최대 면적을 갖는 것은 정사각형일까 ?

학생 : 그럴 것 같아요.

교사 : 우리가 앞서 이용한 방법인 이차함수의 그래프를 이용하여 증명할 수 있을까 ?

학생 : .....

대수적 조작에 의한 증명 :

가로 세로의 길이를 각각 a와 b라고 하고 직사각형의 둘레의 길이를 l이라고 하자. 그러면

$$2(a+b)=l$$

$(a+b)=\frac{l}{2}$ 의 관계식으로부터

$b=\frac{l}{2}-a$ 이며,

직사각형의 넓이 $S=a(\frac{l}{2}-a)$

$=-(a-\frac{l}{4})^2+(\frac{l}{4})^2$ 이므로 $a=\frac{l}{4}$일 때 최대값 $\frac{l^2}{16}$을 갖는다.

즉 $a=b=\frac{l}{4}$인 정사각형이다.

이러한 대수적 조작을 이용한 증명외에도 9학년의 심화단계의 학생들에게나 혹은 10학년 단계에서 제시되는 부등식의 관계의 단원에서 산술평균과 기하평균과의 관계를 이용한 증명을 유도할 수도 있다.

가로, 세로의 길이는 각각 a와 b 이며 둘레의 길이는 l이라고 할 때 넓이 $S=ab$.

여기서 산술평균 ≥ 기하평균의 관계 ($\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a}b$, $a>0, b>0$일 때)를 이용하면 넓이를 나타내는 ab는 부등호에서 등호는 $a=b$일 때 이며 ab의 최대값은 $\frac{l^2}{16}$이 된다.

문제 C까지의 증명을 완성한 후에는 탐구활동과 사고의 확장을 위하여 "둘레가 일정한 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형은 어떤 삼각형일까 ?"라든지 혹은 "둘레의 길이가 일정한 도형 중에서

넓이가 최대인 것은 어떤 도형일까? (등주문제)"라는 질문을 학생들에게 제기하여 좀 더 높은 사고 단계로 발달해 볼 수 있는 기회를 제공해 줄 수 있다.

Ⅳ. 결 론

앞서 제시한 바대로 완전히 형식적인 공리적 증명을 위해서 패턴과의 관련성을 탐구하는 문제를 제시하여 점진적으로 탐구할 필요성이 있다. 점진적으로 구성된 문제를 통한 탐구활동으로 수학적으로 사고하고 결국에는 연역적인 결과를 만들어 낼 수 있는 능력을 향상시켜야 한다.

Piaget, van Hiele, Tall의 증명에 관한 인지발달 단계들을 살펴보았는데 현재 학교 수학에서 요구하고 있는 증명의 방식은 수학적 증명이며, 이는 각 단계의 최종단계 (Piaget의 마지막 3단계, van Hiele의 4, 5수준, 그리고 Tall의 형식적 증명)에서야 가능하다. Piaget, van Hiele, Tall의 증명에 관한 인지발달은 비약적인 도약 없이 점진적인 단계이다. 따라서 수준에 도달해 있지 않은 학생들에게 형식적인 증명의 이전 단계가 필요하다. 넓은 의미에서의 증명인 정당화 과정 즉, Piaget의 1·2 단계, van Hiele의 1·2·3수준, 그리고 Tall의 활동적 증명, 그림에 의한 증명이 필요하다. 신현용(2001)의 연구에서도 사회적 변화에 적극적이고 능동적으로 대처하는 교육 과정을 추구하고자 한다면 "정당화 지도"의 시도는 긍정적으로 검토할 필요가 있다고 보고 있다. 앞서 제시한 몇 가지 증명에 관한 인지발달 단계의 점진적인 구성과 마찬가지로 Balacheff의 증명 4단계는 소박한 경험주의, 결정적 실험, 포괄적인 예를 통해 정당화로서의 증명을 인정하고 수학적 증명인 사고실험으로 나아갈 수 있다. 학생들은 "증명을 위한 증명하기"와 "설명을 하기 위한 증명하기" 사이를 구별할 수 있고, 그들은 후자의 것을 더 아름답다고 생각한다(Winicki-Landman, 1998). 증명을 어떻게 하는가를 연습하는 것이 아니라 증명의 필요성을 느낄 때 학생들은 의미 있는 증명활동을 할 수 있다. 이때 정당화의 유형의 문제를 통한 점진적인 구성은 학생들의 추론 능력을 향상시킬 수 있다.

또한 점진적인 구성의 증명지도를 위하여 다음의 수업 환경이 구성되어야 할 것을 제안한다.

첫째, 증명을 완성하기 이전에 패턴을 찾을 수 있는 탐구활동에 시간을 할당하여야 한다. 그리하여 증명의 필요성을 생각할 수 있는 여유를 학생들이 함께 나누어 가져야 한다.

둘째, 점진적인 구성의 지도를 위해서는 효율적일 수 있는 수업모형을 개발해야 한다. 학습자의 특성을 파악하여 협동적 그룹이나 수학적 모델링 등의 새로운 교수법이 필요하다. 아울러 새로운 수업의 방식에 따른 다양한 평가방법을 생각해 볼 필요가 있다.

셋째, 탐구의 과정에서 계산기의 이용이나 GSP나 CABRI와 같은 컴퓨터 소프트웨어는 발견의 기회를 풍부하게 하고 명제가 참임을 또는 거짓임을 확인하게 하거나 학생들의 직관적 이해를 도울 수 있으므로 충분히 활용될 수 있을 것이다. 하지만 학교 수업에서 컴퓨터의 과도한 신뢰로 말미암아 탐구의 도구(tool) 차원을 넘어선 수업이 되지 않도록 해야 할 것이다.

참 고 문 헌

강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구, 서울대학교 박사학위논문.

김홍기 (1998). 중학교 수학에서 증명 지도에 관한 연구, 한국수학교육학회 논문집, **37(1)**, pp.55-72.

나귀수 (1998) 증명의 본질과 지도 실제의 분석 - 중학교 기하단원을 중심으로 -, 서울대학교 박사학위논문.

류성림 · 정창현 (1993). 중학생의 기하증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **32(2)**, pp.137-149.

박기수 (1990). 비형식적 증명의 지도에 관한 소찰, 경성대학교 석사학위논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습 지도 방향 탐색 -중학교 수학을 중심으로, 서울대학교 박사학위논문.

신현용 · 장병철 (1998). 한국 · 중국 · 러시아 수학교과서의 기하증명에 관한 비교연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 프로시딩> **7**, pp.183-198.

신현용 · 한인기 (2001). 외국의 사례에 비춰본 우리나라의 제 7차 수학과 교육과정, 제19회 수학교육 심포지엄, 대한수학회.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부

조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구, 한국교원대학교 박사학위논문.

최현호 · 한태식 (1990). 기하 영역의 van Hiele 수준과 증명 능력에 관한 연구, 수학교육논총, **8**, 대한수학회, pp.223-242.

Balacheff. N. (1987). Processes of proof and situations of validation. Educational Studies in Mathematics, **18**, pp.147-176.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof, *The Mathematics Teacher,* **88(1)**, pp.48-54.

Craine, C. A. & Rubenstein, R. N. (2000). Traveling toward Proof, *The Mathematics Teacher,* **93(4)**.

De Villiers, M. D. (1996). Why Proof in Dynamic Geometry?, Slightly Edited Version of invited letter in a special Forum in *Mathematics in College*, 40-41, June 1996. Copyright Instructinal Resource Center, CUNY.

Godino, J. D. & Recio, A. M. (1998). *Meaning of Proof in Mathematics Education,*

Izen, S. P. (1998). Proof in Modern Geometry, *The Mathematics Teacher.* **91(8)**, pp.718-719.

Knuth, E. J. & Elliott, R. L. (1998). Characterizing Students' Understandings of Mathematical Proof, *The Mathematics Teacher*, **91(8)**, pp.714-717.

Lakatos, I. M. (1976). Proof and Refutation : The Logic of mathematical discovery, 우정호

(역)(1990). 수학적 발견의 논리(증명과 논박), 민음사.

Leonard, B. (1997). Proof : The Power of Persuasion, *The Mathematics Teacher*, **90(3)**, pp.202-205.

Manaster, A. B., & Schlesinger, B. M. (1999). Geometry Problems Promoting Reasoning and Understanding, *The Mathematics Teacher*, **92(2)**, pp.114-116.

Price, A. (1998). Prove it , *The Mathematics Teacher*. **91(8)**, pp.726-728.

Redmond, C.; Federici, M. P. & Platte, D. M. (1998). Proof by contradiction and the Electoral College, The Mathematics Teacher, **91(8)**, pp.655-658.

Reid, D. A. (1998). Sharing Ideas about Teaching Proving, *The Mathematics Teacher*, **91(8)**, pp.704-706.

Senk, S. L. (1989). van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs, *Journal for Research in Mathematics Education*. **20(3)**, pp.309-321.

Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications, *The Mathematics Teacher*, **91(8)**, pp.670-675.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof for All or for Some?, *Developments in School Mathematics Education around the World*, UCSMP, **4**, pp.117-136.

Thompson, D. R. (1996). Learning and Teaching Indirect Proof, *The Mathematics Teacher*, **89(6)**, pp.474-482.

Williams, E. (1980). An Investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof, *Journal for Research in Mathematics Education*, pp.165-166.

Winicki-Landman, G. (1998). On Proofs and Their Performance as Works of Art, *The Mathematics Teacher*, **91(8)**, pp.722-725.