韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 12집, 2001. 8. 233-248.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 12, Aug. 2001. 233-248.

Maple 6을 활용한 고등학교 수학교육[1)]

김 도 현 (제주대학교)
김 석 만 (제주중앙여자고등학교)

제7차 수학과 교육과정에서는 기술 공학적 교구를 수학-교수 학습에 적극적으로 활용할 것을 권장하고 있다. 본 연구에서는 대표적인 Computer Algebra System인 Maple 6을 고등학교 수학 수업에 활용할 수 있는 영역과 방안에 대하여 알아보고, Maple 6을 활용한 학습 자료를 개발해 봄으로써 7차 교육과정의 고등학교 수학 수업에 활용할 수 있도록 한다.

I. 서 론

수학의 컴퓨터 도입에 대한 당위성은 대세이며, 수학교육에 있어서의 컴퓨터의 위치도 지필식의 수고를 덜어주는 보조수단 정도가 아니라, 수학적 상황을 인식하고 해결하는 과정에서 새로운 틀로서 자리를 잡아가고 있다. 현재 일선 교육현장에서 "컴퓨터"라고 하면 '소프트웨어'를 의미하는 경우가 대부분이고, 중등 수학교육에 컴퓨터를 효율적으로 사용하고자 한다면 적어도 서너 가지 정도의 소프트웨어를 배워야 한다. 따라서 여러 가지 소프트웨어를 익히는 것은 교사와 학습자에게는 부담이 된다. 이런 불편함을 해소하기 위한 방안으로 수학의 거의 모든 영역에 이용 가능하고 배우기 쉬운 소프트웨어인 Maple의 중등 수학교육에의 활용을 생각해 보게 되었다.

컴퓨터 응용 소프트웨어의 일종인 Maple은 대학을 중심으로 중 고등학교로 점차 확대되고 있으며, 그래픽 기능과 수치계산, 대수적 계산, 프로그래밍 등의 다양한 환경을 제공하고 사용이 편리하므로 수학 교육용 언어로서 손색이 없다고 생각한다.

Maple은 수학의 개념 이해와 계산 능력과 관련된 문제해결 등에 적용될 수 있다. 예를 들어 삼차원적인 입체도형을 Maple을 이용하여 표현한다면 학생들의 입체적인 발달에 도움을 줄 수 있고, 특히 Maple은 원하는 위치에서 마우스를 사용하여 삼차원적인 그래프를 관찰할 수 있으므로 한층 더 효과적으로 학생들의 개념 습득을 도울 수 있다. 이러한 시뮬레이션 학습 상황에서는 반복적 계산 연습에 치우치지 않고, 학습자 스스로가 예상하고 이를 실행하며, 오류 수정을 실시함으로써 문제해결 능력을 함양시킬 수 있는 장점들을 갖추고 있다.

한편, Maple의 막강한 계산 능력이나 즉각적 결과의 제시는 계산의 과정보다는 계산의 결과만을 강조하여 학생들로 하여금 수학에서 배우는 것에 대해 부정적인 견해를 심어 줄 수도 있지 않을까하

1) 이 논문은 2000년도 제주대학교 발전기금 학술연구비에 의해 연구되었다.

는 우려도 있다. 이것은 Maple뿐 아니라 계산기 또는 다른 소프트웨어를 수업에 활용할 때 가지게 되는 물음과 같은 성격의 것이다. 따라서 소프트웨어를 수업에 활용하기 위해서는 신중한 교수학적 연구가 선행되어야 할 것이다 [허혜자, 1998].

Maple을 학부와 교육대학원 원생들에게 가르치기 위해 자료를 수집하면서 중등학교 현장에서 Maple을 활용할 가치가 있다고 확신하게 되었다. 예를 들면, 2차원 및 3차원 그래픽 기능을 이용하여 학생들에게 모형제시가 용이하고, 복잡한 계산 능력을 활용할 수 있고, 시뮬레이션도 가능하고, 애니메이션 기능을 이용하여 학생들에게 시각적으로 개념을 설명할 수 있거나 동일한 문제를 해결할 때는 과정을 중시하면서 복잡한 계산을 Maple에 맡길 수도 있어 학생들은 이론적인 전개와 개념 이해에 몰두하게 할 수 있다. 본 연구에서는 다목적 소프트웨어인 Maple 6을 고등학교 수학 수업에 활용할 수 있는 영역과 방안에 대하여 알아보고, Maple 6을 활용한 학습 자료를 개발해 봄으로써 7차 교육과정의 수업에 활용할 수 있도록 한다.

II. Maple 6의 특징과 장점

수학교육용 언어로서 Maple 6의 특징[박경수 외 1인, 2000] 과 장점을 살펴본다 .

1) Maple은 배우고 사용하기가 쉽다.

Maple은 수학에서 사용하는 대부분의 함수를 정의할 수 있으므로 표현이 매우 용이하다. 예를 들면 $f(x)=x^3+1$과 같은 함수를 표현하는데 Maple에서도 수식 그 자체를 입출력에 사용할 수 있다.

```
> f(x) = x^3 + 1;
```

$$f(x)=x^3+1$$

2) Maple은 정확한 값을 계산하는 계산기이다.

Maple은 일반적인 계산기에서 할 수 있는 사칙연산과 제곱근의 계산 뿐 아니라, 100!이나 π의 근사값 계산 등 복잡한 계산을 할 수 있다. Maple에서는 무리수나 순환소수 등을 연산하더라도 특별한 요구가 없는 한 근사값이 아닌 참값을 출력한다. 예를 들어 $\sqrt{\pi}$ 나 1/3을 Maple에서 계산하면 근사값이 아닌 $\sqrt{\pi}$나 1/3이 그대로 출력된다. 그러나 Digits:=100: evalf(Pi); enter키를 치면 $\sqrt{\pi}$의 100자리까지의 근사해가 구해진다. 정확한 식의 계산과 근사값은 항상 구분된다.

3) Maple은 기호연산(symbolic computation)이 가능하다.

일반적으로 이전의 고급언어로 된 프로그램에서 가장 큰 문제가 수치들의 계산만이 가능하다는 것이다. 그러나 Maple에서는 수식의 전개, 인수분해, 통분, 부분분수로 분해하기, 약분하기 등을 수행

할 수 있을 뿐만 아니라 극한, 미분, 적분, 미분방정식, 멱급수 등에서도 기호연산이 가능하다.

4) 다양한 그래픽과 애니메이션 기능을 갖는다.

Maple은 여러 가지로 주어진 식을 그림으로 나타낼 뿐만 아니라, 그림을 나타내는 형태도 자른다거나 명암을 구별하고 시점을 이동하는 등의 조작이 쉬워서 복잡한 그림도 여러 각도에서 매우 정확하게 구현할 수 있다. 또, Maple을 이용하면 움직이는 그래프의 표현을 흥미롭게 만들 수 있다. Maple에서 애니메이션을 plot하기 위해서는 plots패키지 안에 들어있는 animate와 animate3d명령어를 사용한다.

예) >with(plots): animate(sin(x*t),x=-10..10,t=1..2);

위와 같은 명령어를 치고 난 후 그림을 움직이게 하기위해서는 먼저 화면의 곡선 위를 클릭하여 메뉴에서 Animation을 선택한 후에 Play를 선택한다. 만약 움직임이 부드럽지 못할 경우에는 frames 옵션의 값을 증가시킨다.

예)animate(sin(x*t),x=-10..10, t=1..2, frames=50);

이러한 애니메이션 기능을 수학적 개념의 설명에 다양하게 응용할 수 있다.

5) 고수준의 프로그래밍 언어이다.

Maple에서는 516개의 내장함수와 약 3000가지의 라이브러리가 있다. 이 함수들을 이용하면 고수준의 프로그래밍이 가능하다. 일반 프로그래밍 언어와 달리 Maple의 큰 장점 중의 하나는 계산하려는 식을 입력하고 바로 계산의 결과를 얻을 수 있으므로, 자신의 생각의 결과를 바로 다음 생각에 연결시킬 수 있다. 그러나 고급언어와 비교할 때 컴파일러를 사용하여 실행파일을 따로 만들 수 없다는 단점이 있다.

6) 엑셀2000에서 Maple 6을 이용할 수 있다.

Microsoft Excel 2000의 추가 기능을 이용하여, Excel 2000에서 Maple 6도움말과 Maple 명령어들을 사용할 수 있고, Excel과 Maple사이에 자료교환과 서로 복사와 붙이기도 가능하다. 예를 들어 Excel을 이용해서 통계를 지도하는 경우에 Excel에는 적분기능이 없어 연속적인 변수는 다룰 수 가 없다. 그러나 Excel에서 Maple을 사용하면 교과서의 식의 전개에 따르면서 이산적인 것은 Excel로 연속적인 것은 Excel에서 Maple을 활용하여 통계문제를 처리할 수 있다.

7) Maple의 장점

대표적인 Computer Algebra System(CAS)으로 국내에서는 Mathematica와 Maple을 주로 사용하고 있다. 교육용으로 Maple을 선택한 사용자들은 성능 대비 가격의 저렴성, 문법의 친근성, 프로그램의 수월성, 커널의 알고리즘적 접근 등의 장점을 내세운다 [한동승, 2001]. 컴퓨터 대수 체계를 이용

하여 수학을 교육하는 것은 계산기처럼 결과만을 보기 위한 것이 아니라, 실제적인 문제를 해결하는 방법을 찾아내고, 얻어진 결과를 분석하는 데에 있다. 따라서 컴퓨터 대수체계를 이용하더라도 학생의 수준과 그 단원의 필요에 맞추어 필요한 계산은 직접 명령을 내리도록 해야한다. Maple은 이러한 중간 단계의 계산들을 실행할 수 있는 명령어들을 많이 가지고 있다.

III. 고등학교 수학교육에의 활용

제 7차 수학과 교육과정에서 단계형 수준별 교육과정 10단계(고등학교 1학년)와 고등학교 선택 중심교육과정의 수학의 지도와 관련해서, Maple은 다양하게 활용될 수 있다. 그 가운데 몇 가지를 소개하고자 한다.

1. 함수에의 활용

고등학교에서 함수는 학생들이 매우 어려워하는 부분이고 추상적인 성격이 강하기 때문에 그 개념이 무엇인지를 분명히 알 수 있도록 지도해야 한다. 고등학교 수학 교과 과정에서 컴퓨터를 가장 잘 활용할 수 있는 부분은 함수라고 생각한다. 고등학교에서 다루는 내용 중에서 직선, 이차곡선(원, 포물선, 타원, 쌍곡선), 다항함수, 유리함수, 무리함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등 함수의 그래프를 사용하는 단원이 많다. 따라서 이런 단원에서 학생들의 흥미와 관심을 불러일으킬 수 있는 방법으로 Maple을 활용하면 그래프를 쉽게 그릴 수 있고, 계수를 변화시킬 때 그래프의 개형이 어떻게 변하는 지도 알아볼 수 있다. Maple에서는 그래프를 그리기 위해서 Plot라는 명령어를 사용하는데 학생들이 쉽게 이해하고 실행할 수 있는 것으로 생각한다.

1) 함수의 표현

Maple에서 화살표 기호를 사용하여 필요한 함수를 정의할 수 있다. 기호(:=)는 그 왼쪽에 함수의 이름을, 오른쪽에는 화살표를 사용하여 함수의 정의를 각각 할당한다.

예를 들어 $f(x)=2x^3-x+1$ 은 $f:=\ x\to 2x^3-x+1$ 로 나타낼 수 있다.

또 $f(x)=2x^3-x+1$ 에서 $x=a$일 때 $f(a)=2a^3-a+1$이 되는 것처럼

$f:=\ x\to 2x^3-x+1$ 에서 $f:=\ a\to 2a^3-a+1$ 을 얻는다.

다음은 실행한 결과를 나타낸다.

```
> f := x ->2* x^3 -x +1;
```

$$f:=\ x\to 2x^3-x+1$$

```
> f(a);
```

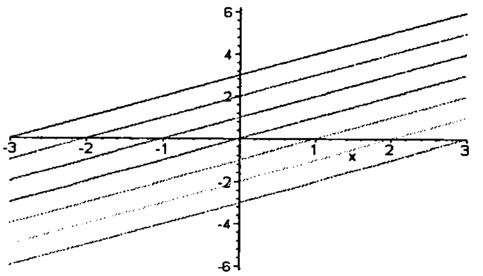
$$2a^3-a+1$$

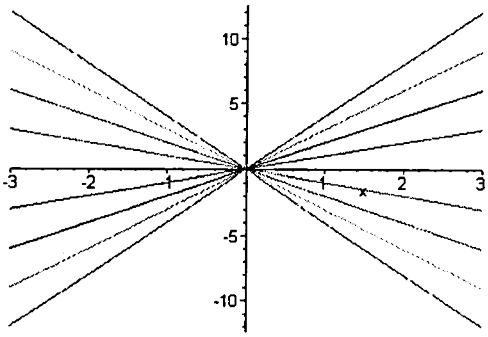
2) 함수의 그래프

[예제] $y = ax + b$의 그래프

> plot({-x, -2*x, -3*x, -4*x, x, 2*x, 3*x, 4*x}, x=-3..3);

> plot({x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3}, x=-3..3);





학생들은 a와 b의 영향을 살펴보고 그 의미를 비형식적으로 구성하여 가설을 세울 수 있을 것이다. 그런 후에 수학교사는 형식적인 전개를 통해 학생들의 가설을 정당화시켜주거나 학생들 스스로 자신의 가설을 정당화할 수 있는 기회를 갖는다면 이런 수업은 컴퓨터를 활용하는 의미 있는 수학수업이 될 것이다.

[예제] 에니메이션을 활용한 함수 이해하기

Maple을 이용하면 움직이는 그래프의 표현을 흥미롭게 다룰 수 있다. Maple에서 애니메이션을 plot하기 위해서는 plots패키지 안에 들어있는 animate와 animate3d 명령어를 사용한다.

> with(plots) : animate(3*x^2 + a*x, x=-15..10, a=0..7);

위와 같은 명령어를 치고 난 후 그림을 움직이게 하기위해서는 먼저 화면의 곡선 위를 클릭하여 메뉴에서 Animation을 선택한 후에 Play를 선택한다. 2차원에서의 에니메이션은 특별한 지정이 없는 이상 16개의 그림으로 구성된다. 만약 움직임이 부드럽지 못할 경우에는 frames옵션의 값을 증가시킨다.

예) animate(3*x^2 + a*x, x=-15..10, a=0..7, frames=50);

이러한 애니메이션 기능을 수학적 개념의 설명에도 응용할 수 있다.

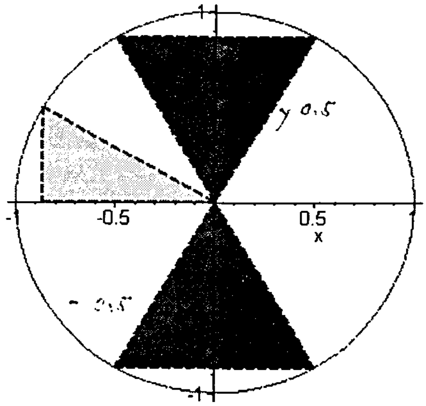
[예제] 삼각함수의 그래프의 이해

Maple은 삼각함수의 그래프를 탐구하는데 특별히 유용하다. 수업 현장에서 삼각함수의 그래프를 지도할 때, 몇 개의 그래프만을 그려서 설명하곤 한다. 이를 Maple을 이용하면 화면 위에 다양한 그래프를 그릴 수 있어 삼각함수의 관계와 그 그래프 모양과의 관계를 설명하기가 용이해지고, 학생들의 이해도를 높일 수 있다.

다음은 삼각함수의 그래프에 대한 프로그래밍이다 [http://math.jeonju.ac.kr/maple] .

```
>sintocos:=proc(angl)
local pic, pic1, pic2, pic3,pic4,pic5,pic6, xx, quad, firstxx, sgn, sgn1, sgn2, sgn3, sgn4;
xx:=angl- floor(angl/(2*Pi))*2*Pi; quad:=ceil(2*xx/Pi);
if quad =1 or quad= 3 then firstxx:= quad*Pi/2-xx
else firstxx:= xx-(quad-1)* Pi/2 fi;
if quad=1 or quad=2 then sgn:=1 else sgn:=-1 fi;
sgn1:=sgn; sgn2:=-sgn; sgn3:=-sgn; sgn4:=sgn;
pic:=plottools[polygon]([[0,0],[cos(xx), sin(xx)],[cos(xx), 0]], color=yellow, linestyle=3,
thickness=2);
pic1:=plottools[polygon]([[0,0],[cos(xx), sin(xx)],[cos(xx), 0]], color=red, linestyle=3,
thickness=2);
pic2:=plots[implicitplot](x^2+y^2=1, x=-1..1, y=-1..1, scaling=constrained);
pic3:=plottools[reflect](pic1,[[0,0],[1,1]]);
pic4:=plottools[reflect](pic3,[[0,0],[0,1]]);
pic5:=plottools[reflect](pic3,[[0,0],[1,0]]);
pic6:=plottools[reflect](pic4,[[0,0],[1,0]]);
if firstxx=0 then print(sgn1*'cos'(firstxx), sgn3*'cos'(Pi+firstxx))
elif firstxx = Pi/2 then print('cos'(firstxx), 'cos'(Pi+firstxx))
else print(sgn1*'cos'(firstxx), sgn2*'cos'(Pi-firstxx), sgn3*'cos'(Pi+firstxx),
sgn4*'cos'(2*Pi-firstxx)) fi;
plots[display]({pic2, pic3, pic4, pic5, pic6, pic});
end:
>sintocos(5*Pi/6);
```

$$\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right), -\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right), -\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right), \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$$



위의 프로그래밍은Maple의 프로시저 기능을 이용하여 삼각함수에서 **sine값을 cosine값으로 변환하는 것**을 삼각형의 합동을 이용하여 시각적으로 표현한 것이다. 복잡하여 학생들이 직접해보기 보다는 교사가 미리 프로그램한 결과를 학생들과 살펴보고, 학생들이 삼각함수의 성질을 시각적으로 느끼게 함으로써 삼각함수의 그래프의 성질을 관찰할 수 있다. 이러한 시뮬레이션 학습은 반복적 계산 연습에 치우치지 않고, 학습자 스스로가 예상하고 이를 실행하며, 오류 수정과 재분배를 실시함으로써 문제해결 능력을 함양시킬 수 있다.

2. 대수학에의 활용

Maple은 식의 인수분해, 지수와 로그, 행렬, 수열, 방정식과 부등식-분수방정식, 무리방정식, 간단한 삼·사차 부등식, 분수부등식-등의 문제를 기호 연산으로 해결할 수 있기 때문에 학생들의 대수적 변환 및 조작능력을 길러 주는 데 소비하는 시간의 상당부분을 응용중심으로 옮길 수 있게 해준다.

1) 기호 및 대수 연산 기능

다항식의 계산, 인수분해, 전개 및 간단히 하기, 식의 인수 분해 등에 활용할 수 있다. 수학의 중요한 개념을 이해하기 위하여 단순히 반복적인 풀이 과정을 필요로 하는 경우에 중간 과정을 신속히 하기 위하여 Maple을 이용할 수 있다. 그리고 학습자가 계산과정이 끝난 후 즉시 그 답을 비교, 검토 할 수 있으며, 검산을 하기에도 편리하다. 그러나 주의해야 할 것은 위의 과정을 학습해야 할 단계에서는 충분히 수리 능력을 갖춘 단계에서 사용할 수 있도록 교사들은 유의해야 한다.

[예제] $2ax+by+5cx+3dy$를 x에 대해서 정리하여라.

```
> collect( 2*a*x +b*y + 5*c*x + 3*d*y);
```

2) 다양한 방법으로 방정식의 해 구하기

Maple을 이용하면 교사들은 학생들의 흥미와 필요성에 맞게 다양한 방법으로 대수 수업을 할 수 있다.

[예제] 방정식 $5x^3-12x^2-16x+8=0$ 의 해를 구하여라.

[방법1] 인수분해 이용하기

```
> factor(5*x^3-12*x^2-16*x + 8=0);
> solve(%);
```

[방법2] 함수의 그래프를 이용해서 근사해 구하기

```
> plot(5*x^3- 12*x^2-16*x + 8, x);
```

그래픽 확대기능을 이용하면 보다 정확한 근사해를 구할 수 있다.

[방법3] 수치해석 방법을 이용해서 근사해 구하기

```
>f(x) := 5*x^3-12*x^2-16*x + 8 ;
>df(x) := diff( f(x) , x ) ;
> x(0) := 2 ;
> for n from 0 to 10 do
    x(n+1) := x(n) -evalf ( subs (x=x(n) , f(x) / df(x) )) ;
    od ;
```

고등학교 수학수업에 수치해를 구하는 내용은 포함되어 있지 않지만, Maple을 이용하면 뉴튼방법(Newton Method)과 같은 방정식의 근사해를 구하는 알고리즘을 적용한 수업이 가능하다. 초기치를 변화시키면서 이 알고리즘을 실행한 다음, 결과를 분석함으로써 알고리즘 안에 내재되어 있는 중요한 아이디어를 발견하게 할 수 있다.

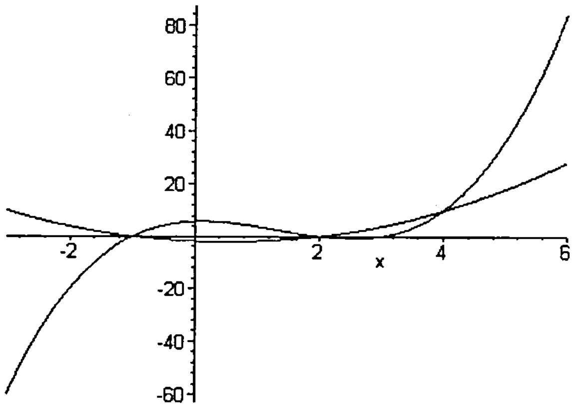
3) 연립방정식의 해

방정식의 해를 구하기 위한 기본적인 명령어는 solve이다. solve명령어는 방정식의 종류에 관계없이 모든 경우를 다룰 수 있어, 수업의 계통성에 관계없이 방정식에 대한 어떤 사실을 발견하거나 검토하는 도구로 적절히 사용할 수 있다.

plot명령어를 사용하여 여러 개의 함수의 그래프를 한꺼번에 그릴 수 있다는 것을 이용하여 그래프의 교점들을 찾고, solve 명령어를 통해 그 교점들이 그 방정식의 해가 됨을 확인함으로써 연립방정식의 이해에 도움을 줄 수 있다.

[예] $y=x^3-4x^2+x+6,\ y=x^2-x-2$을 풀어라.

```
>plot({x^3-4*x^2+x+6,x^2-x-2},x=-3..6);
```




```
>solve({y=x^3-4*x^2+x+6,y=x^2-x-2},{x,y});
```

{y = 0, x = 2}, {y = 10, x = 4}, {y = 0, x = -1}

두 번째 결과와 위의 그래프를 비교하여 보면, 두 그래프의 교점이 두 연립방정식의 해가 됨을 알 수 있다.

3. 미적분에의 활용

Maple은 극한, 곡선으로 둘러싸인 넓이, 변화율, 접선의 기울기, 정적분등에 대한 개념과 원리를 이해하게 한다.

1) 극한값이 계산

Maple에서는 limit( )명령어에 의해서 바로 답을 얻을 수 있다. 예를 들어, limit((x^6-1)/(x^3-1), x=1)라고 입력하면 바로 2라는 답을 얻을 수 있다. 그러나 극한 개념의 의미를 생각하도록 하기 위해서는 1에 매우 가까운 값들을 대입해 봄으로써 극한개념을 보다 직관적으로 이해시킬 수 있다.

[예제]함수 $f(x) = \dfrac{x^6-1}{x^3-1}$ 로 정의되는 함수 $f(x)$에 대하여 $x=1$ 부근에서 1에 접근시킬 때 함수값 $f(x)$의 변화를 조사하여라.

(풀이)

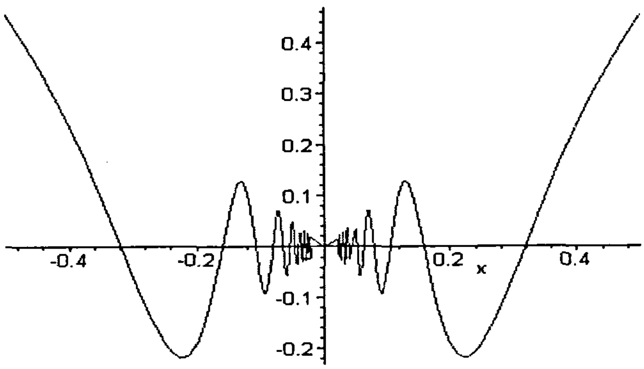
```
> f := x -> (x^6-1)/(x^3-1);
> x1:=[evalf(seq(1-10^(-n),n=1..10))];
> seq(evalf(f(x)),x=x1);
> x2:=[evalf(seq(1+10^(-n),n=1..10))];
```

x	f(x)	x	f(x)
0.9000000000	1.729000000	1.100000000	2.331000000
0.9900000000	1.970299000	1.010000000	2.030301000
0.9990000000	1.997003004	1.001000000	2.003003001
0.9999000000	1.999699970	1.000100000	2.000300030
0.9999900000	1.999970000	1.000010000	2.000030000
0.9999990000	2.000000000	1.000001000	2.000003000
0.9999999000	2.000000000	1.000000100	2.000000300
0.9999999900	2.000000000	1.000000010	2.000000030
0.9999999990	2.000000000	1.000000001	2.000000003
0.9999999999	2.000000000	1.000000000	2.000000000

따라서 $x \to 1$ 이면 $f(x) \to 2$ 임을 알 수 있다.
위에서부터 $|x-1| < 10^{-3}$ 인 모든 x에 대하여 $|f(x)-2| < 10^{-2}$ 이고 $|x-1| < 10^{-9}$ 인 모든 x에 대하여 $|f(x)-2| < 10^{-8}$ 이 됨을 알 수 있다.

[예제] $f(x) = x \sin 1/x$의 그래프를 그려라.

```
> plot( x* sin(1/x), x=-1/2 .. 1/2);
```



x가 0이 아닌 값을 취하면서 0에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다는 것을 직관적으로 알 수 있다. 교사와 학생은 토론을 통해 함수의 극한개념을 관찰하게 된다.

2) 함수의 미분값과 접선

예) $f(x)=x^3-x$에 대하여 a= $\frac{4}{10}$, b= a + h일 때, h > 0이 0으로 접근해 갈 때 할선이 변화하는 모습을 f(x)의 그래프와 함께 한 평면에 그려라. 그리고 할선의 기울기의 극한을 구하고, 이로부터 접선을 구하여라.

풀이) 함수 f(x)와 a를 지정하고 ,

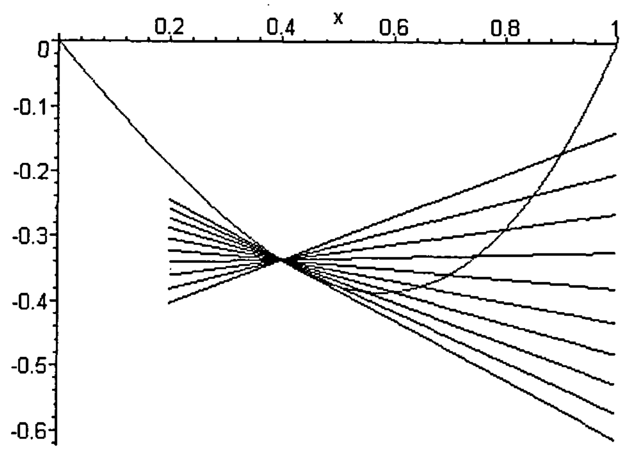
```
>f:=x->x^3-x; a:=4/10;
```

seq를 이용하여 h를 1/2에서부터 1/20씩 감소시키면서 할선의 기울기를 구하자.

```
>with(student): slps:=[seq(slope([a,f(a)],[a+1/2*(1-(n-1)/10),f(a+1/2*(1-(n-1)/10))]),n=1..10)];
```

이제 이 기울기를 갖는 할선들과 그래프를 그려보자. 하나씩 그리기 보다는 seq를 이용하여 10개를 한꺼번에 그리고 그림들을 집합으로 만들자. 그리고 합집합 연산을 이용하여 원래 함수의 그림을 추가하자.

```
>pp:={seq(plot(slps[i]*(x-a)+f(a),x=0.2..1,color=black),i=1..10)}:pf:=plot(f(x),x=0..1,
 color=red):
> plots[display]({seq(pp[i],i=1..10)}union{pf});
```



위에서와 같이 할선이 점점 한 직선으로 접근하면서 두 점이 일치하면 접선이 된다. 접선을 구하기 위하여 먼저 할선의 기울기의 극한값 즉, 접선의 기울기를 구하면,

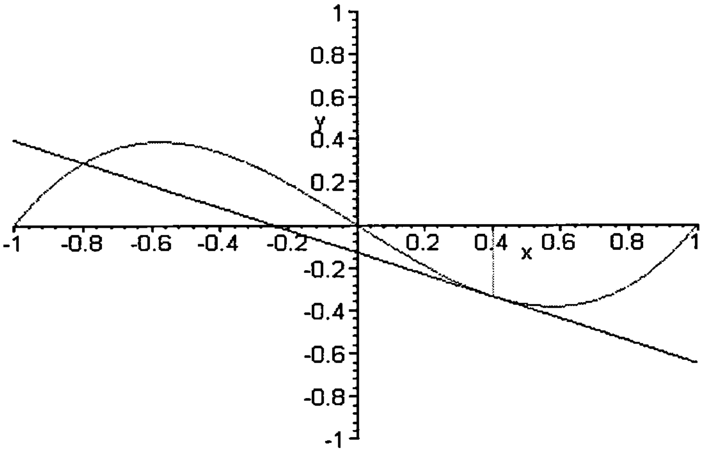
```
>m:= limit(slope([a+h,f(a+h)],[a,f(a)]),h=0);
```

이로부터 점 [a,f(a)]를 지나는 접선을 구하면,

```
> y-f(a) = m*(x-a);
```

이다. 실제로 접선은 student패키지에 있는 showtangent라는 명령어를 이용하면, 쉽게 그릴 수 있다.

```
>showtangent(f(x),x=2/5, x=-1..1, y=-1..1);
```



3) 정적분의 개념 이해

Maple 6을 이용하여 구분구적법으로 정의되는 정적분의 뜻과 여러 가지 성질을 알아볼 수 있다.

【예제】 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$으로 둘러싸인 도형의 넓이 S을 구분 구적법으로 구하여라.

```
> with(student):
> f:=x->x^2;
```

$$f := x \to x^2$$

```
> middlesum(f(x),x=0..1,n);
```

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)^2}{n^2}}{n}$$

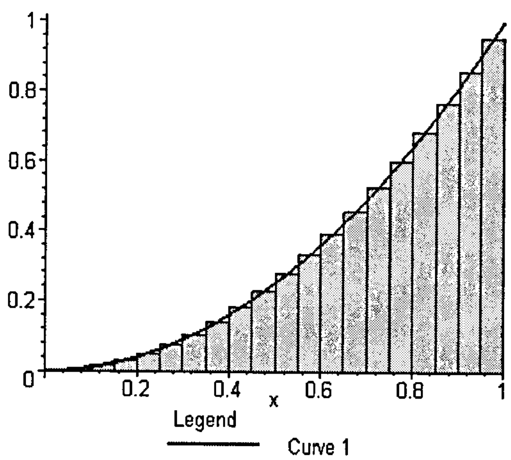
```
> Limit(%,n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)^2}{n^2}}{n}$$

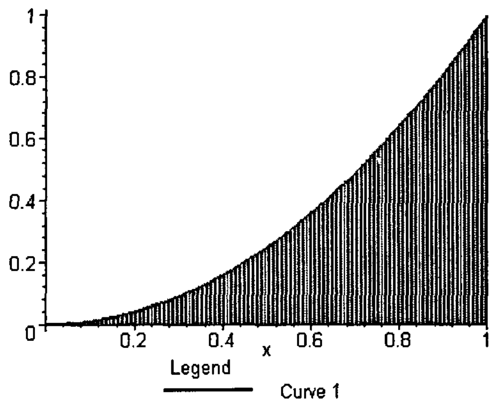
> value(%);

$$\frac{1}{3}$$

따라서 $S = \frac{1}{3}$ 이다. 이 값이 $y = x^2$의 $x = 0$에서 $x = 1$까지의 정적분이다.
실제로 세분단계를 조정해가면서 그래프를 그려보면 직관적으로 이해가 쉬울 것이다.
> middlebox(f(x),x=0..1,20);



다음은 구간을 아주 세밀하게 나누어 보면 거의 곡선에 가깝다.
> middlebox(f(x),x=0..1,200);



위의 계산을 Maple 6에서 정적분으로 계산하면 다음과 같고 그 결과들은 일치한다.

\> eval(Int(x^2,x=0..1))=eval(int(x^2,x=0..1));

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

여기서는 고등학교 수학의 몇 가지 부분만을 다루었지만, 많은 양의 데이터를 분석하거나 복잡한 수를 처리해야하는 통계단원인 경우도 주어진 데이터들의 관계를 적절한 그래프로 표현함과 같은 방법으로 다양한 학습이 가능하게 될 것이다.

VI. 결 론

제7차 교육과정에서는 고등학교 2학년부터 수학의 6개 과목 모두가 선택과목으로 지정되어 있어 수학이 싫은 학생은 수학과목 모두를 이수하지 않고 졸업하여 대학에 진학할 수 있도록 되어있다. 지금과 같은 방식의 교과서와 이론 중심의 수업이 진행된다면 학생들은 수학과목을 회피할 것이고 고등학교 교사의 수도 줄어들 것으로 예상되어진다.

이런 이유로 우리의 생활과 밀접한 컴퓨터를 수학 수업의 보조 학습도구로 활용한다면 수학적 이미지를 시각화하여 학생들의 흥미를 유발할 수 있을 뿐만 아니라, 수학적인 개념을 귀납적 직관적으로 전달할 수 있다고 여겨진다. 특히, Maple 6은 그래픽 기능과 수치 계산, 대수적 계산, 프로그래밍 등 다양한 환경을 제공하고 있는 소프트웨어로써 교실 수업에서 함수, 대수, 미적분, 통계 등에 유용하게 활용되어질 수 있는 프로그램이다. 기호 조작 소프트웨어(CAS)가 개념적 이해 없이도 뛰어난

기호 조작 기능의 도움으로 문제를 해결할 수 있어 절차적 지식을 학습하기 위한 기계적 학습도 되지 못하고, 단지 문제의 해를 구하거나 확인하는 수준에 그친다는 비판도 있다. 그럼에도 불구하고 수학 수업에 Maple 6을 활용함으로서 학생들에게 짧은 시간에 다양한 수학적 경험을 시각적으로 제공함으로써, 어려운 수학적 개념을 직관적으로 이해시켜 줄 것으로 기대된다.

현재 우리나라의 교실에는 멀티미디어 시설이 설치되고 있다. 학생 개개인이 컴퓨터를 활용해서 프로그래밍을 하여 실습을 하려면 아직까지는 여건이 갖추어지지 않았다. 학교에서 컴퓨터를 활용하는 것도 제한될 수밖에 없다. 수학 수업 시간에 컴퓨터를 활용하는 것도 학생 개개인이 수학적인 내용을 프로그래밍 하여 직접 실습을 하면서 배워가면 좋겠지만 아직은 여건이 되지 않고 있다. 가까운 시일 내에 여건이 조성되면 Maple 6을 이용하여 수학 학습을 하는데 있어서 기대되는 효과는 다음과 같다.

첫째, 학습 자료를 시각화하여 제시함으로써 학습자가 개념을 직관적으로 쉽게 이해할 수 있고 학습자의 흥미를 유발할 수 있다.

둘째, 계산을 하거나 그래프를 그리는데 있어서 시간을 절약할 수 있다.

셋째, 교사 혼자서 수업을 하는 것이 아니라 학습자가 화면을 보고 계산을 하거나 그래프를 그리는 프로그램에 대하여 의견을 제시하면서 같이 참여하고, 그렇게 함으로써 창의력이나 문제 해결력의 신장에 도움이 될 수 있고, 집중력을 높일 수 있다.

넷째, 기본개념이 정립된 학생들은 스스로 컴퓨터상에서 Maple 6을 재현함으로써 반복, 심화학습에 많은 도움을 줄 수 있다.

다섯째, 여러 대학들은 미적분학, 선형대수, 미분 방정식 등의 강의에 Maple을 사용하고 있다. 고등학교에서 Maple의 기초를 익힌 학생들은 대학에서 Maple을 유용하게 사용할 수 있어 중등학교와 대학교육의 연계성이 향상되리라고 예측된다.

끝으로, 제7차 교육과정부터는 고등학교 2학년과 3학년 과정에서 수학교과가 다른 교과군과 함께 편성되어 학생 스스로가 교과를 선택하여 수업을 받도록 하는 학생중심 선택제가 실시된다. 그러므로 다른 교과에 비해 보다 많은 학생들을 수학교실로 끌어들이기 위한 하나의 방법으로 미래에는 수학시간에 Maple 6과 같은 컴퓨터 응용 프로그램을 활용한 수업을 유효적절하게 실시해야 될 필요가 있다고 생각한다.

참 고 문 헌

김지곤 (2001). Excel과 Mathview를 활용한 고등학교 통계지도, 한국수학교육학회 시리즈E <수학교육논문집> 11(11), 서울: 한국수학교육학회

박경수 · 한동숭(2000). Maple 6-미분적분학을 중심으로, 서울: 경문사

문교부 (1997). 제7차 교육과정; 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사

신동선 · 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사

이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석, 서울대학교 대학원 박사 학위 논문

장경윤 (1996). 컴퓨터와 수학교육, 대한수학교육학회 논문집 **6(1)**, 서울: 대한수학회

한동숭 (2001). Maple을 이용한 대학 수학교육, 대한수학회 소식 **77**, pp.29-34, 서울: 대한수학회

허만성 (2000). 기호연산 실행조작과 과정-개념의 상호작용, Maple 6 기술세미나, (주)모아소프트

허혜자 (1998). Mathematica를 활용한 수학지도, 대한수학교육학회 논문집 **8(2)**, 서울: 대한수학교육학회

K. M. Heal; M. L. Hansen & K. M. Rickard (2000). *Maple 6 Learning Guide*, Waterloo maple Inc. http://math.jeonju.ac.kr/maple