韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 12집, 2001. 8. 479-488.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 12, Aug. 2001. 479-488.

원뿔곡선을 만드는 여러 가지 방법

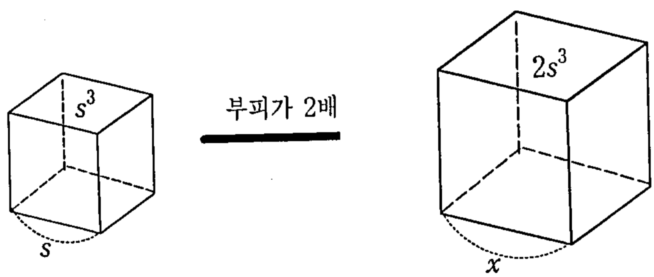
주관: 수학사랑
남 호 영 (당곡고등학교)

I. 원뿔곡선의 발견

원뿔곡선은 고대 그리스에서 3대 작도 문제 중 "주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체를 작도하는 배적문제"를 해결하는 과정에서 발견되었다. 히포크라테스는 배적문제가 두 개의 비례중항[1)]을 구하는 문제와 같음을 밝혔다. 즉, 배적문제는 선분 s와 $2s$ 사이에

$$s : x = x : y = y : 2s$$

를 만족하는 2개의 비례중항 x, y를 구하는 문제로 바꿀 수 있음을 증명한 것이다.



위의 비례식으로부터 세 방정식 $x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$, $xy = 2s^2$ 이 유도된다.

$x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$ 에서 y를 소거하면

$$x^4 = s^2y^2 = s^2(2sx) = 2s^3x \quad \therefore\ x^3 = 2s^3$$

위의 식을 만족하는 x를 한 모서리의 길이로 하는 정육면체의 부피는 한 모서리의 길이가 s인 정육면체 부피의 2배가 된다.

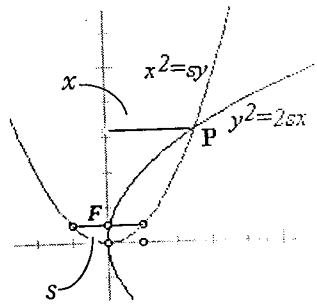
이 때, 통경 s의 길이는 포물선 $x^2 = sy$의 초점 $(0, \frac{s}{4})$에서, x의 길이는 두 포물선 $x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$의 교점 P에서 알 수 있다.

---

1) a : b = b : c 가 성립할 때, b를 a와 c의 비례중항이라 한다. 이때 a, b, c는 등비수열이 되므로 비례중항을 등비중항이라고도 한다.

마찬가지로 하여 포물선과 쌍곡선의 교점에서도 부피가 $2s^3$인 정육면체의 한 모서리의 길이를 구할 수 있다.

메나에크무스는 이러한 방정식을 만족하는 곡선을 작도하려고 시도했다. 자와 컴퍼스만으로는 방정식을 만족하는 것을 작도할 수 없었던 메나에크무스는 고심하다가 원뿔을 절단해 보기에 이른 것이다.

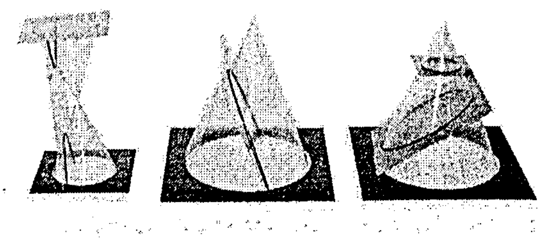


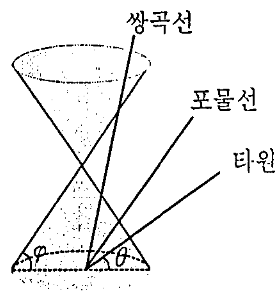
메나에크무스는 기원전 350년경에 다음 사실을 발견했다고 한다.

"꼭지각이 직각인 원뿔을 모선에 대해서 수직인 평면으로 잘라낼 때 생긴 곡선은 두 방정식 $x^2 = sy$, $y^2 = 2sx$ 을 만족하고, 꼭지각이 둔각인 원뿔을 모선에 대해서 수직인 평면으로 잘라낼 때 생긴 곡선은 방정식 $xy=2a^2$을 만족한다."

이렇듯 비례중항으로부터 유도되는 방정식을 만족하는 곡선을 원뿔을 절단해서 만들어낸 메나에크무스는 여기서 멈추지 않았다. 당시 그리스인들에게는 원을 사영하면 볼 수 있는 모양이라 알려진 타원은 꼭지각이 예각인 직원뿔의 모선에 수직인 평면으로 잘라내어 만들 수 있음을 보였다.

한편, 아폴로니우스는 메나에크무스와는 달리 한 원뿔을 가지고 여러 방향에서 잘라 보았다. 그는 자른 면과 직원뿔의 밑면이 이루는 각의 크기에 따라 원뿔곡선을 분류하였다.





원뿔의 밑면과 모선이 이루는 각 : φ, 원뿔의 밑면과 단면이 이루는 각 : θ	
$\theta=0$일 때 ⇒ 원	$\theta=\varphi$일 때 ⇒ 포물선
$\theta<\varphi$일 때 ⇒ 타원	$\theta>\varphi$일 때 ⇒ 쌍곡선

[2]

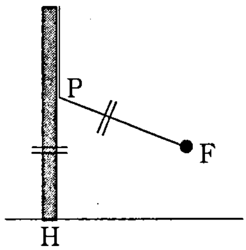
2) http://www.boxermath.com 중 1. SAMPLES OF OUR TUTORIALS 의 Intermediate Algebra Trigonometry

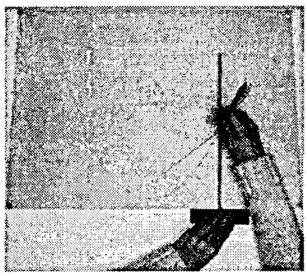
이와 같이 타원, 포물선, 쌍곡선(ellipse, parabola, hyperbola)은 하나의 원뿔을 잘라 만들어질 수 있으므로 하나의 곡선을 그리는 방법을 다른 곡선에도 적용할 수 있다.

II. 원뿔곡선을 만드는 여러 가지 방법

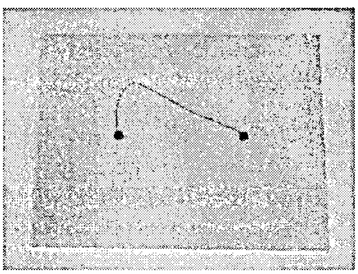
1. 줄과 막대로 원뿔곡선 작도하기

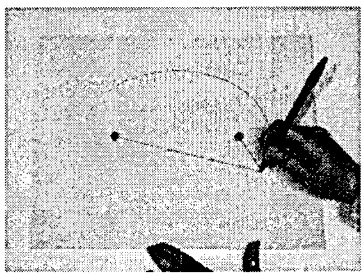
■ 포물선 : 그림과 같이 줄과 막대의 길이를 같게 만들면 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로 점 H가 선 위를 움직일 때, 점 P의 자취는 포물선이다. 사진에서 점 P는 연필의 위치로 막대를 옆으로 밀면서 연필을 아래로 그으면 포물선이 그려진다.



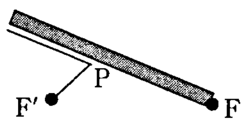


■ 타원 : 실을 두 초점에 고정시켜 연필을 팽팽하게 유지한 채 그리면 타원이 그려진다.





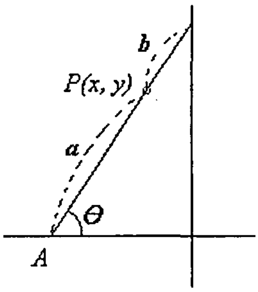
■ 쌍곡선 : 줄의 길이를 막대의 길이보다 짧게 하면 그 값은 항상 $|\overline{PF'}-\overline{PF}|$이므로 점 P의 자취는 쌍곡선이다. 점 P는 연필의 위치로 줄과 막대를 밀착시킨 채 연필을 아래로 그으면 쌍곡선이 그려진다.

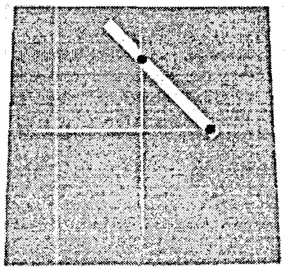


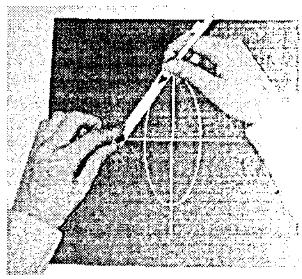
2. 막대로 타원 그리기

① 동경 PA의 각을 θ라고 하면 점 P의 좌표는 $x=b\cos\theta$, $y=a\sin\theta$이다.

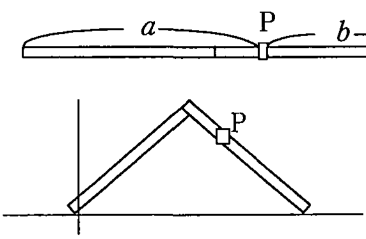
① 동경 PA의 각을 θ라고 하면 점 P의 좌표는 $x=b\cos\theta$, $y=a\sin\theta$ 이다. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$이 성립한다.
따라서 사진에서 점 P에 연필을 꽂고 막대가 축 위를 움직이도록 하면 타원이 그려진다.

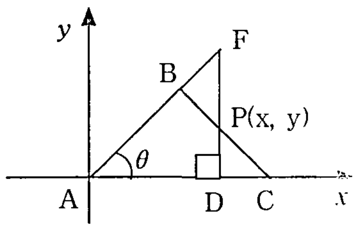






② 빨대나 하드보드 지와 같이 딱딱한 것을 이용하여 타원을 그릴 수도 있다. 빨대를 예로 들면, 빨대를 반으로 접어 한쪽에 점 P를 표시한다. 접힌 빨대를 펴서 수평선 위에 일자로 놓은 후, 빨대의 한쪽 끝을 고정시키면서 다른 쪽 끝을 조금씩 밀면 타원이 그려진다. 즉, 선분 AB, BC에서 점 A는 고정시키고 C를 x축 위에서 움직이면 점 P의 자취가 타원이다. [1]





$\overline{AB}=\overline{BC}$ 이므로 $\angle BCA=\theta$
$\angle BFD=90°-\theta$, $\angle FPB=\angle CPD=90°-\theta$
이므로 $\triangle BFP$는 이등변 삼각형이다.

빨대의 길이를 a+b라고 하면 $\overline{AB}=\frac{a+b}{2}$

$$\overline{BF}=\overline{BP}=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}=\frac{a-b}{2}$$

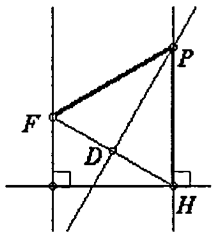
$$\therefore\ \overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a$$

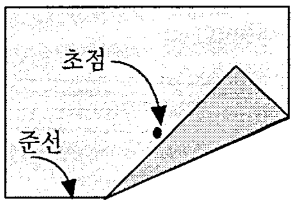
점 E의 좌표를 구하면 $x=\overline{AD}=a\cos\theta$, $y=\overline{PD}=b\sin\theta$이므로

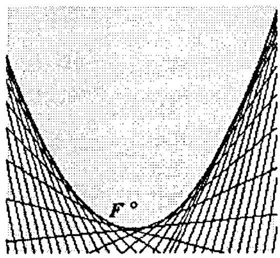
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 성립되어 점 E의 자취는 타원이 된다.

3. 종이로 원뿔곡선 접기

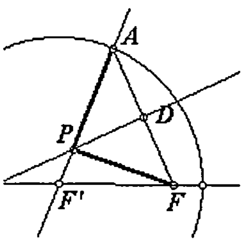
■ 포물선 : 그림에서 직선 PD가 선분 FH의 수직이등분선이면 점 P의 자취는 포물선이다. 종이를 아래 그림과 같이 접으면 접힌 선이 직선 PD가 된다. 이것은 포물선의 접선이며, 이러한 접선들의 외곽선으로 이루어지는 곡선을 포락선(envelope)이라고 한다.

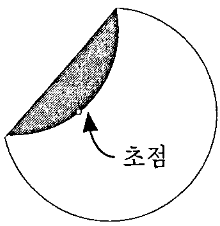


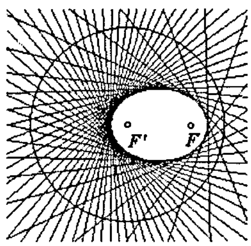




■ 타원 : 원 F′ 위의 점 A에 대하여 직선 PD가 선분 AF의 수직이등분선이면 $\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{F'A}$=(원의 반지름의 길이)이다. 따라서 점 A가 원 위를 움직일 때 점 P의 자취는 타원이다. 종이를 그림과 같이 접으면 접힌 선이 직선 PD이고 이 때의 포락선은 타원이 된다.







■ 쌍곡선 : 타원의 경우에서 점 F가 원 밖에 있게 되면 $|\overline{PF}-\overline{PF}|=|\overline{F'A}|$=(원의 반지름의 길이)이므로 타원과 같은 방법으로 쌍곡선을 접을 수 있다.

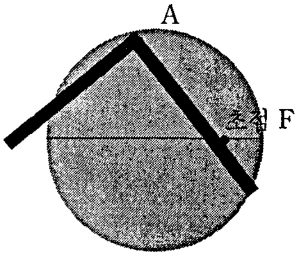
4. 직각자를 이용하여 원뿔곡선 그리기

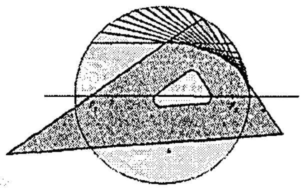
종이 접기를 이용해서 원뿔곡선을 접는 방법을 확장할 수 있다. 직각자를 준비하여 다음과 같은 방법으로 타원을 그려보자.

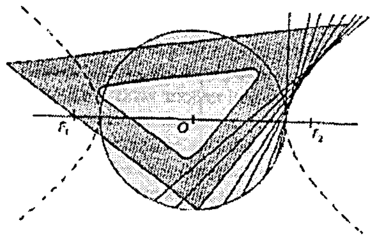
먼저 장축과 한 초점을 정하고 장축을 지름으로 하는 원을 그린다. 그림과 같이 직각자를 준비하

여 한 변은 초점에, 직각인 점은 원 위에 놓이도록 한 후 초점에 닿지 않는 변을 따라 선을 긋는다. 직각인 점을 원 위에서 움직이면서 이 과정을 되풀이하면 포락선에서 타원을 볼 수 있다.

이 사실을 더 확장하여 생각하면 선분 AF 또는 그 연장선과 수직인 모든 선의 자취로 이루어지는 포락선은 타원이 되며, 이들 타원은 모두 한 초점을 공유하게 된다. 쌍곡선에도 이와 마찬가지 원리가 적용된다. 타원의 경우에서 초점 F를 원 밖으로 이동시키면 쌍곡선을 볼 수 있다.



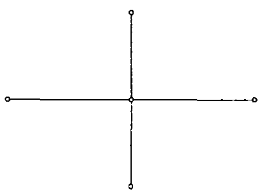




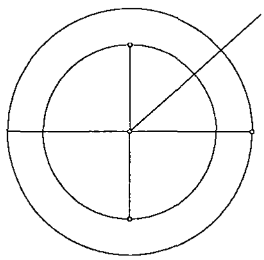
포물선의 경우에는 직선 FH와 수직인 선의 자취로 이루어지는 포락선은 포물선이 된다.

5. 두 동심원을 이용하는 Danny의 타원

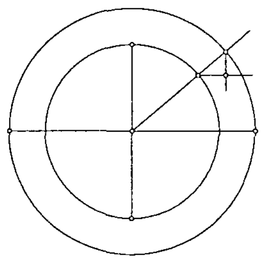
Danny Vizcaino가 Mountain View 고등학교에 다닐 때 고안한 방법으로 타원을 그리는 가장 단순하고 유용한 방법 중의 하나이다. 아래의 오른쪽 그림에서 교점의 자취가 타원이다.



1) 장축과 단축 그리기



2) 두 동심원과 반직선 그리기

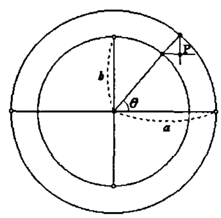


3) 수직 · 수평선의 교점 잡기

그림과 같이 선분의 기울기를 θ라 하면 점 P의 좌표는 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ 이다. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 이므로

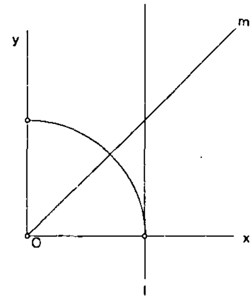
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

이 성립하여 이와 같은 점 P들의 집합은 타원이 된다.

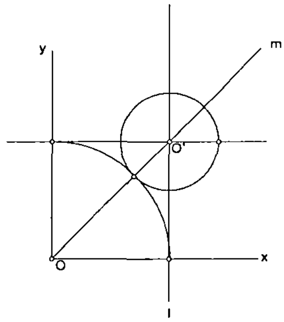


6. 사분원을 이용하여 쌍곡선 그리기

1) 제1사분면을 지나고 원점을 지나는 원 O를 그린다.
원 O와 x축의 교점을 지나고 x축에 수직인 직선 l을 그리고 점 O를 지나는 직선 m을 그린다.



2) 직선 m과 직선 l의 교점을 중심으로 하고 원 O 에 접하는 원을 그린다. 이 원을 O′라고 하자.
원 O′의 중심을 지나고 x축과 평행한 직선과 이 원의 교점이 바로 쌍곡선 위의 점이 된다.

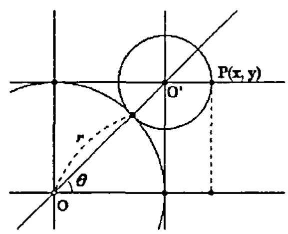


원 O의 반지름의 길이를 r, 직선 m이 x축과 이루는 각을 θ 라고 하면 점 P의 좌표는

$$(x, y)=(r\sec\theta, r\tan\theta)$$

이다. $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 이므로

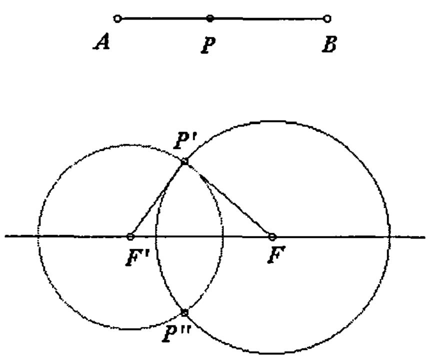
$\left(\frac{x}{r}\right)^2-\left(\frac{y}{r}\right)^2=1$이 성립하여 점 P의 자취는 쌍곡선이 된다.



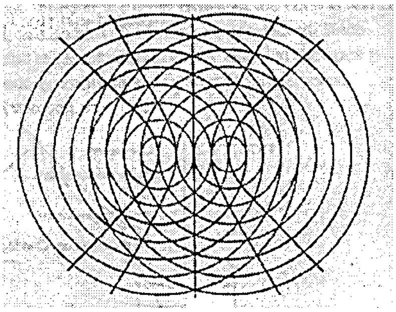
7. 무아레 무늬를 이용하여 원뿔곡선 관찰하기

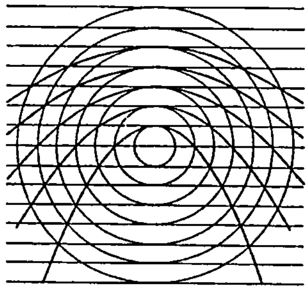
그림과 같이 선분 AB를 정하고 두 점 F′, F를 잡은 후 선분 AB 위에 점 P를 잡아 두 점 F′, F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$인 원을 그리면 그 교점의 자취는 장축의 길이가 $\overline{AB}$인 타원을 이룬다.[1] 위의 내분을 이용해서 타원을 그리는 방법을 확장하면 두 쌍의 동심원에서 타원, 쌍곡선 무리를 볼 수 있다.

마찬가지 원리로 동심원과 평행선 무리들이 있으면 포물선을 볼 수 있다.[3)]



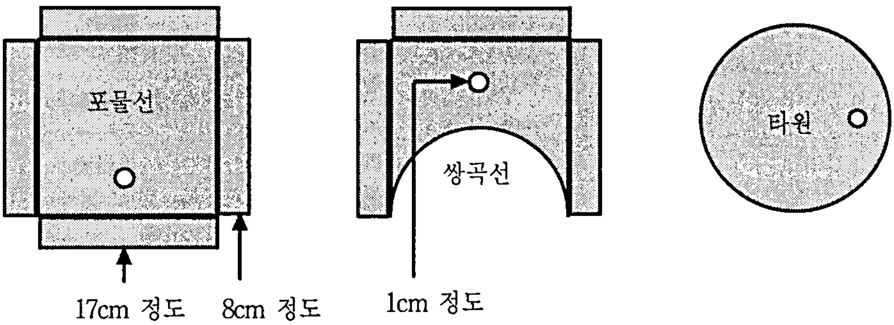
무아레 무늬를 이용한 원뿔곡선을 보려면 OHP 용지와 같은 투명 종이에 간격이 일정한 동심원, 평행선을 그려 겹쳐보면 된다.

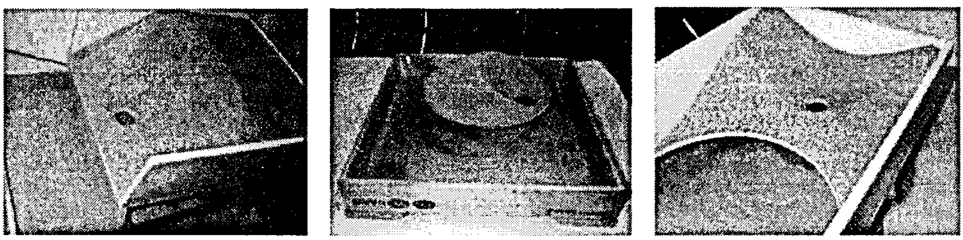




8. 모래 실험

위의 무아레 무늬를 입체적으로 생각하면 동심원과 평행선 무리는 간격이 일정한 등고선으로 생각할 수 있다.



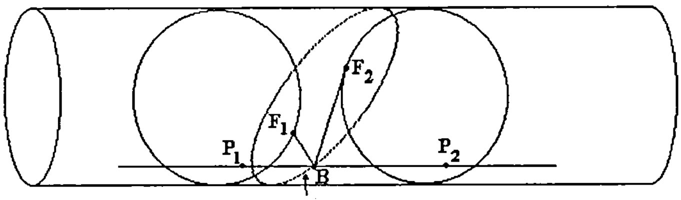


[포물선] [타원] [쌍곡선]

3) http://clowder.net/hop/Elpshypr.html, http://clowder.net/hop/parabola.html에서 무아레 무늬를 이용한 원뿔곡선을 볼 수 있다.

9. 컵에 물을 담아 기울이기

원기둥 모양의 컵에 물을 담아 기울이면 그 표면은 타원이 된다. 즉, 원기둥을 밑면에 평행하지 않게 잘랐을 때의 단면은 타원이 된다.



$$\overline{BF_1}+\overline{BF_2} = \overline{BP_1}+\overline{BP_2} = \overline{P_1P_2}$$

아래 그림과 같이 원기둥과 접하는 두 구와 원기둥의 밑면에 평행하지 않은 평면과의 접점을 F_1, F_2, 점 B는 원기둥과 평면의 교선 위의 임의의 점이라고 하자. 또, 점 B를 지나는 원기둥 위의 직선이 구와 만난 점을 P_1, P_2라고 하자.

직선 BP_1, BF_1이 모두 왼쪽 구의 접선이므로 $\overline{BP_1}=\overline{BF_1}$

마찬가지로 $\overline{BP_2}=\overline{BF_2}$

$\therefore\ \overline{BF_1}+\overline{BF_2}=\overline{BP_1}+\overline{BP_2}=\overline{P_1P_2}$

그런데 이 그림은 회전대칭이므로 $\overline{P_1P_2}$는 점 B의 위치에 영향을 받지 않는다. 따라서 점 B에서 F_1, F_2까지의 거리의 합은 항상 일정하므로 임의의 점 B는 타원을 이룬다.

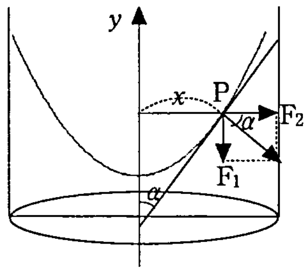
10. 그릇에 물을 담아 회전시키기

점성이 없는 액체가 회전될 때 그 표면은 포물면을 이룬다.

유체 표면 위의 점 P에서의 중력은 $F_1=mg$,

원심력은 $F_2=mx\omega^2$이다.

(ω : 각속도, x : 유체 표면의 점 P의 회전 반경)



축과 포물면의 접선이 이루는 각을 α라고 하면

$$\tan\alpha = \frac{F_1}{F_2} = \frac{mg}{mx\omega^2} = \frac{g}{x\omega^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \tan\alpha$$

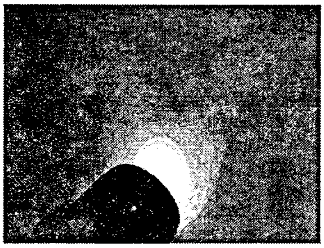
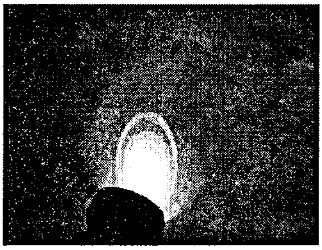
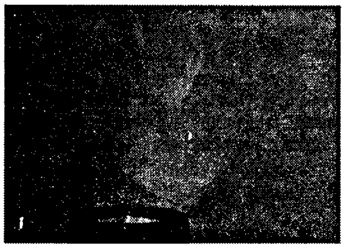
$$\frac{dx}{dy} = \frac{g}{x\omega^2} \text{ 이므로 } dy = \frac{\omega^2}{g} x dx \qquad \therefore y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

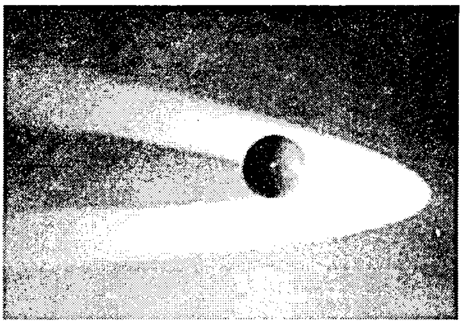
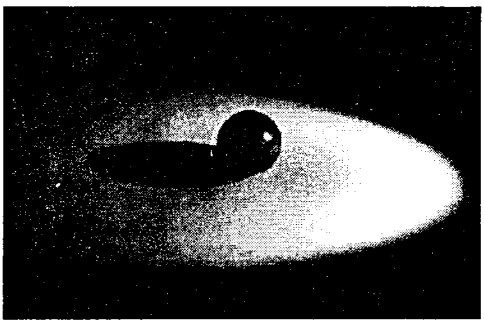
따라서, 점 P에서의 접선을 적분하면 포물선이므로 회전면은 포물면이다.[2]

11. 빛으로 관찰하는 원뿔곡선

랜턴으로 벽에 빛을 비추면 원뿔곡선 모양의 그림자를 만들 수 있다.

아폴로니우스의 방법에서와는 반대로 단면을 고정시키고 원뿔을 움직인다고 생각하면 된다.

참 고 문 헌

J. W. Downs. *Practical Conic Sections*, Dale Seymour Publications

http://eic.changwon.ac.kr/mechalab/lab1/mat/lab1_mat_theory.html

남호영 외. 원뿔곡선에서 태어난 이차곡선, 수학사랑

Berchie Holliday. *Advanced Mathematical Concepts*, Glencoe McGraw-Hill