Journal of the Korean
Data & Information Science Society
2001, Vol. 12, No. 1, pp. 41 ~ 50

K개 지수분포의 상등에 관한 베이지안 다중검정

문경애[1], 김달호 [2]

요 약

독립이면서 지수분포를 따르는 K개 모집단의 평균차이에 대한 가설 검정방법으로 Berger와 Pericchi (1996, 1998)가 제안한 내재적 베이즈 요인을 이용한 베이지안 방법을 제안한다. 이 때 모수에 대한 사전분포로는 무정보적 사전분포를 사용한다. 모의실험을 통하여 제안한 검정방법의 유용성을 알아본다.

주제어 : intrinsic Bayes factor, noninformative prior, minimal training sample, model selection.

제 1 절 서론

신뢰수명검정모형이나 가속수명시험모형 등에널리이용되는지수분포의확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \qquad x \geq 0, \ \lambda > 0. \tag{1}$$

식 (1)을 확률밀도함수로 가지는 확률변수를 $X \sim \exp(\lambda)$라고 나타내자.

모수 λ_i, $i = 1, 2, \cdots, K$를 가지는 독립인 K개의 지수분포에서 각 모집단의 평균을 서로 비교한다고 가정했을 때 관심의 대상이 되는 가설은 다음과 같다.

M_1 : $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_K$,

M_{2u_1} : 임의의 λ_p가 나머지 $(K-1)$개의 λ_q와 같지 않다.
$p \neq q = 1, 2, \cdots, K$,

M_{3u_2} : 임의의 λ_{p_1}, λ_{p_2}가 나머지 $(K-2)$개의 λ_q와 같지 않으면서
$\lambda_{p_1} = \lambda_{p_2}$ 혹은 $\lambda_{p_1} \neq \lambda_{p_2}$이다.
$p_1 \neq p_2 \neq q = 1, 2, \cdots, K$,

M_{4u_3} : 임의의 λ_{p_1}, λ_{p_2}, λ_{p_3}이 나머지 $(K-3)$개의 λ_q와 같지 않으면서
$\lambda_{p_1} = \lambda_{p_2} = \lambda_{p_3}$ 혹은 $\lambda_{p_1} = \lambda_{p_2} \neq \lambda_{p_3}, \lambda_{p_1} = \lambda_{p_3} \neq \lambda_{p_2}$,
$\lambda_{p_1} \neq \lambda_{p_2} = \lambda_{p_3}$, $\lambda_{p_1} \neq \lambda_{p_2} \neq \lambda_{p_3}$이다.
$p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq q = 1, 2, \cdots, K$,

$\vdots$

M_K : $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_K$.

[1] 강원도 동해시 지흥동산119번지 동해대학교교 컴퓨터공학과
[2] 대구시 북구 산격동 370번지 경북대학교 통계학과

이 때 가능한 가설의 수는 다음과 같이 주어진다.

$$Q = B_K\ ,\quad K \geq 2,$$

여기에서 $B_{t+1} = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} B_i\ ,\quad t = 0, 1, 2, \cdots,\ B_0 = 1.$

Dal. Ho. Kim, Sang. Kil. Kang 과 Seong. W. Kim (2000), Seong, W. Kim (2000), Seong. W. Kim 과 D. Sun (2000)은 중단된 자료를 이용하여 지수분포를 따르는 두 모집단의 평균 비교에 대한 베이지안 검정법을 제안하였다. Seong. W. Kim과 Hyunsoo Kim (2000)은 지수분포를 따르는 두 집단의 평균을 비교하기 위한 방법으로 부분 베이즈요인(Fractional Bayes factor;FBF)의 값과 일반적인 베이즈요인의 값을 근사적으로 일치시키는 내재적 사전분포를 제안했고 Jongsig Bae, Hyunsoo Kim과 Seong W. Kim (2000)은 정규분포를 따르는 두 모집단의 평균을 비교하기 위한 내재적 사전분포를 제안했다.

본 논문에서는 K개 지수분포의 모수들에 대한 다중검정 방법으로서 Berger와 Pericchi (1996, 1998)가 제안한 내재적 베이즈요인(intrinsic Bayes factor;IBF)을 이용한 베이지안 검정법을 제안한다. 2절에서는 IBF에 대해 간략하게 소개하고 3절에서는 관심의 대상이 되는 가설에 대해 무정보적 사전분포 (noninformative prior)를 이용한 베이지안 검정 방법을 제시한다. 마지막으로 4절에서는 제안한 검정 방법이 올바른 결정을 내리는지를 알아보기 위하여 모의실험을 실시한다.

제 2 절 내재적 베이즈요인

$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$을 확률밀도함수 $f(\mathbf{y}|\theta)$를 갖는 모집단으로부터 추출된 확률표본이라고 하자. 여기에서 $\theta \in \Theta$이며, 유한(finite)한 차원을 가진다. 만약 모형 $M_i : \theta \in \Theta_i$, $\Theta_i \subset \Theta$, $i = 1, 2, \cdots, Q$에 대한 모형선택(model selection)을 한다고 했을 때 베이지안 관점에서는 모형 M_i에서의 모수 θ에 대한 사전분포와 가설 M_i가 사실(true)일 사전확률을 각각 $\pi_i(\theta)$와 p_i로 가정하고 가설 M_i가 사실일 사후확률을 계산하여 가장 높은 사후확률 모형을 선택한다. 이 때의 사후확률은 다음과 같이 계산된다.

$$P(M_i|\mathbf{y}) = \left(\sum_{j=1}^{Q} \frac{p_j}{p_i} B_{ji}\right)^{-1}. \tag{2}$$

위의 식에서 B_{ji}는 모형 M_j의 모형 M_i에 대한 베이즈요인(Bayes factor)이라고 부르며, 정의는 다음과 같다.

$$B_{ji} = \frac{m_j(\mathbf{y})}{m_i(\mathbf{y})} = \frac{\int_{\Theta_j} f(\mathbf{y}|\theta)\pi_j(\theta)d\theta}{\int_{\Theta_i} f(\mathbf{y}|\theta)\pi_i(\theta)d\theta}. \tag{3}$$

여기에서 $m_i(\mathbf{y})$는 모형 M_i에서의 $\mathbf{Y}$에 대한 주변확률밀도함수(marginal or predictive density of $\mathbf{Y}$)이다.

베이지안 검정에서는 흔히 모형 M_i에 대한 사전정보의 부족이나 여러 가지 여건으로 인해 사전분포를 무정보적 사전분포로 가정하는 경우가 많다. 그러나 무정보적 사전분포는 부적절 분포(improper distribution)인 경우가 대부분이다. 이 무정보적 사전분포를 $\pi_i^N(\theta)$라고 두면, 식 (3)은

$$B_{ji}^N = \frac{m_j^N(\mathbf{y})}{m_i^N(\mathbf{y})} = \frac{\int_{\Theta_j} f(\mathbf{y}|\theta)\pi_j^N(\theta)d\theta}{\int_{\Theta_i} f(\mathbf{y}|\theta)\pi_i^N(\theta)d\theta} \tag{4}$$

이 되며, 이 때 식 (4)에는 부적절 분포의 사용으로 인한 임의의 상수가 포함되어 있다.

부적절 분포를 사용하여 계산한 베이즈 요인에 포함된 임의의 상수로 인해 식 (2)를 사용한 베이즈 모형 선택 문제에는 어려움이 있었다. 이러한 어려움을 해결하기 위한 제안으로 Berger와 Pericchi (1996,1998)의 IBF, O'Hagan (1995)의 FBF 등이 있다. 이 중 IBF는 자료 $\mathbf{y}$를 트레이닝 표본(training sample)이라 불리는 $\mathbf{y}(l)$과 이를 제외한 나머지 표본 $\mathbf{y}(-l)$으로 나누어 임의의 상수를 제거하는 방법을 제안하였는데 이것은 베이즈 요인을 계산할 때 $\mathbf{y}(l)$에 대한 사후분포를 θ의 사전분포처럼 이용하는 방법이다. 이 때 트레이닝 표본인 $\mathbf{y}(l)$는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$0 < m_i^N(\mathbf{y}(l)) < \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, Q. \tag{5}$$

트레이닝 표본 $\mathbf{y}(l)$을 이용한 베이즈 요인은 다음과 같이 계산한다. 먼저 베이즈 요인을 계산하기 위해 $\mathbf{y}(l)$ 에 대한 사후분포 $\pi_i^N(\theta|\mathbf{y}(l))$을 θ의 사전분포처럼 이용한다면 베이즈 요인은 다음과 같이 구해진다.

$$B_{ji}(\mathbf{y}(l)) = \frac{\int_{\Theta_j} f(\mathbf{y}(-l)|\theta, \mathbf{y}(l))\pi_j^N(\theta|\mathbf{y}(l))d\theta}{\int_{\Theta_i} f(\mathbf{y}(-l)|\theta, \mathbf{y}(l))\pi_i^N(\theta|\mathbf{y}(l))d\theta} = B_{ji}^N \times B_{ij}^N(\mathbf{y}(l)). \tag{6}$$

여기에서 B_{ji}^N는 식 (4)에 주어져 있고

$$B_{ij}^N(\mathbf{y}(l)) = \frac{m_i^N(\mathbf{y}(l))}{m_j^N(\mathbf{y}(l))}$$

이다. 식 (6)에서 모형 M_j의 모형 M_i에 대한 베이즈 요인 B_{ji}^N 계산시 부적절 사전분포를 사용하여 생성된 임의의 상수를 $\frac{c_j}{c_i}$라 하면, 트레이닝 표본 $\mathbf{y}(l)$을 이용한 베이즈 요인 $B_{ij}^N(\mathbf{y}(l))$ 의 계산에서도 임의의 상수 $\frac{c_i}{c_j}$가 생성되어 B_{ji}^N에 $B_{ij}^N(\mathbf{y}(l))$ 을 곱하면 임의의 상수는 서로 상쇄된다. 이러한 트레이닝 표본을 사용하기 위해서는 몇 개의 트레이닝 표본을 사용할 것인가를 결정해야 하는데 베이지안 가설검정을 위한 최소한 트레이닝 표본의 정의는 다음과 같다.

Definition 1 *트레이닝 표본 $\mathbf{y}(l)$이 식 (5)를 만족할 경우 사후분포가 proper이라고 하고, 임의의 트레이닝 표본이 적절하면서 부분 표본이 식 (5)를 만족하지 못할 경우 이 트레이닝 표본을 최소(minimal)라고 한다.*

Beger와 Pericchi (1996,1998)는 최소 트레이닝 표본을 이용한 베이지안 검정 방법을 제시하였는데, 이 때의 베이즈 요인 $B_{ji}(\mathbf{y}(l))$은 최소 트레이닝 표본의 선택에 영향을 받게 된다. 이런 영향을 제거하고 안정성을 높이기 위해 산술 내재적 베이즈요인(arithmetic IBF;AIBF)을 사용하였다. 그러나 AIBF는 소표본인 경우와 비내포(non-nested) 모형인 경우에는 안정적(stable)이지 못하고 가능한 최소 트레이닝 표본의 수가 많으면 계산시간이 많이 걸리는 결점을 가지고 있다. 그런 이유로 Berger와 Pericchi (1998)는 비내포 모형이나 소표본에서도 잘 적용되는 중위수 내재적 베이즈요인(Median IBF;MIBF)을 제안하였다.

Definition 2 *모형 M_j의 M_i에 대한 산술 내재적 베이즈 요인과 중위수 내재적 베이즈 요인은 각각 다음과 같이 주어진다.*

$$B_{ji}^{AI} = B_{ji}^N \times \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} B_{ij}^N(\mathbf{y}(l)), \tag{7}$$

$$B_{ji}^{MI} = B_{ji}^{N} \times \{ \underset{1 \le l \le L}{Median} B_{ij}^{N}(\mathbf{y}(l)) \}. \tag{8}$$

여기에서 L은 모든 가능한 최소 트레이닝 표본의 수이다.

식 (7)이나 식 (8)에 주어진 B_{ji}^{AI} 혹은 B_{ji}^{MI}를 식 (2)의 B_{ji}대신 대입하여 각 모형에 대한 사후확률을 구한 후 가장 높은 사후확률을 가지는 모형을 선택하게 된다.

제 3 절 지수분포의 상등에 관한 베이지안 다중검정

K개의 모집단을 각각 $X_i \sim \exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \cdots, K$라고 했을 때, 우리가 검정(선택) 하고자 하는 가설(모형)은 1절에서 주어진 것과 같다. 앞에서 제시한 가설들을 검정하기 위해 사용하는 사전분포로 다음과 같은 무정보적 사전분포를 생각한다.

$$\begin{aligned}
\pi_1^N(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}, \\
\pi_{2u_1}^N(\lambda, \lambda_p) &= \frac{1}{\lambda\lambda_p}, \\
\pi_{3u_2}^N(\lambda, \lambda_p) &= \frac{1}{\lambda\lambda_p} \quad \text{or} \quad \pi_{3u_2}^N(\lambda, \lambda_p, \lambda_q) = \frac{1}{\lambda\lambda_p\lambda_q}, \\
&\vdots \\
\pi_K^N(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_K) &= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_K}.
\end{aligned}$$

임의의 r개의 모수 $\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \cdots, \lambda_{p_r}$이 $(K-r)$개의 모수와 다르면서 r개 중 임의의 s개는 서로 같고 나머지 $(r-s)$개는 서로 다르다고 가정했을 때의 무정보적 사전분포는 다음과 같이 주어진다.

$$\pi_{r+1u_r}^N(\lambda, \lambda^*, \lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}, \cdots, \lambda_{q_{r-s}}) = \frac{1}{\lambda\lambda^*\lambda_{q_1}\lambda_{q_2}\cdots\lambda_{q_{r-s}}}. \tag{9}$$

여기에서 $\lambda_{u_1} = \lambda_{u_2} = \cdots = \lambda_{u_{K-r}} = \lambda$, $\lambda_{p_1} = \lambda_{p_2} = \cdots = \lambda_{p_s} = \lambda^*$이다.

각각의 지수분포에서 뽑혀져 나온 확률표본을 X_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, n_i$, $i = 1, 2, \cdots, K$라 두고 $N = \sum_{i=1}^K n_i$, $T_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $i = 1, 2, \cdots, K$라고 나타내자.

먼저 x_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, n_i$, $i = 1, 2, \cdots, K$을 이용하여 모형 $M_1 : \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_K = \lambda$에 대한 우도함수(likelihood function)를 구해보면

$$L_1(\lambda) = \lambda^N \exp(-\lambda \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij})$$

과 같으며, 모형 M_{2u_1}에 대한 우도함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$L_{2u_1}(\lambda, \lambda_p) = \lambda^{\sum_{i \ne p,q}^K n_i} \lambda_p^{n_p} \exp(-\lambda \sum_{i \ne p,q}^K \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} - \lambda_p \sum_{j=1}^{n_p} x_{pj})$$

모형 M_{3u_2}에 대한 우도함수는 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다. 먼저 $\lambda_{p_1} \neq \lambda_{p_2}$인 경우에는

$$L_{3u_2}(\lambda, \lambda_p, \lambda_q) = \lambda^{\sum_{i\neq p,q}^K n_i} \lambda_p^{n_p} \lambda_q^{n_q} \exp(-\lambda \sum_{i\neq p,q}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} - \lambda_p \sum_{j=1}^{n_p} x_{pj} - \lambda_q \sum_{j=1}^{n_q} x_{qj})$$

이 되고 $\lambda_{p_1} = \lambda_{p_2}$인 경우에는,

$$L_{3u_2}(\lambda, \lambda_p) = \lambda^{\sum_{i\neq p,q}^K n_i} \lambda_p^{n_p+n_q} \exp(-\lambda \sum_{i\neq p,q}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} - \lambda_p (\sum_{j=1}^{n_p} x_{pj} + \sum_{j=1}^{n_q} x_{qj}))$$

이 된다.

임의의 r개의 모수가 나머지 $(K-r)$개의 모수와는 다르면서 r개 중 임의의 s개는 서로 같고 나머지 $(r-s)$ 개는 서로 다르다고 가정해 보자. 이 때 $(K-r)$개의 모수를 λ, s개의 모수를 λ^*라고 나타내면 우도함수는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} L(\lambda, \lambda^*, \lambda_{q_1}, \cdots, \lambda_{q_{r-s}}) &= \lambda^{\sum_{i\neq p_1,\cdots,p_s,q_1,\cdots,q_{r-s}}^K n_i} \lambda^{*\sum_{i=1}^s n_{p_i}} \lambda_{q_1}^{n_{q_1}} \cdots \lambda_{q_{r-s}}^{n_{q_{r-s}}} \\ &\times \exp(-\lambda \sum_{i\neq p_1,\cdots,p_s,q_1,\cdots,q_{r-s}}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} - \lambda^* \sum_{u=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_u} x_{uj}) \\ &\times \exp(-\lambda_{q_1} \sum_{j=1}^{n_{q_1}} x_{q_1 j} - \cdots - \lambda_{q_{r-s}} \sum_{j=1}^{n_{q_{r-s}}} x_{q_{r-s} j}). \end{aligned} \tag{10}$$

식 (9)에 주어진 사전분포와 식 (10)의 우도함수를 이용하여 주변확률밀도함수를 구해 보면 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} m^N(\mathbf{x}) &= \frac{\Gamma(\sum_{i\neq p_1,\cdots,p_s,q_1,\cdots,q_{r-s}}^K n_i)}{[\sum_{i\neq p_1,\cdots,p_s,q_1,\cdots,q_{r-s}}^K T_i]^{\sum_{i\neq p_1,\cdots,p_s,q_1,\cdots,q_{r-s}}^K n_i}} \\ &\times \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^s n_{p_i}) \Gamma(n_{q_1}) \Gamma(n_{q_2}) \cdots \Gamma(n_{q_{r-s}})}{[\sum_{i=1}^s T_{p_i}]^{\sum_{i=1}^s n_{p_i}} T_{q_1}^{n_{q_1}} \cdots T_{q_{r-s}}^{n_{q_{r-s}}}}. \end{aligned} \tag{11}$$

여기에서 $T_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $T_{p_i} = \sum_{j=1}^{n_{p_i}} x_{p_i j}$, $T_{q_i} = \sum_{j=1}^{n_{q_i}} x_{q_i j}$, $j = 1, 2, \cdots, n_i$, $i = 1, 2, \cdots, K$를 나타낸다.

다음은 최소 트레이닝 표본을 구하고 최소 트레이닝 표본에 대한 주변확률밀도함수를 계산한다. 각 지수분포에서 뽑혀진 K개의 서로 다른 관찰값 $X(l) = (X_{1k}, X_{2l}, \cdots, X_{Km})$을 트레이닝 표본으로 정의할 경우, 조건 (5)를 만족하게 됨을 알 수 있다.

트레이닝 표본의 서로 다른 K개의 관찰값을 X_i, $i = 1, 2, \cdots, K$라 나타내고 주변확률밀도함수를 구하면 다음과 같다.

$$m^N(x(l)) = \frac{\Gamma(K-r)\Gamma(s)}{[\sum_{i\neq p_1,\cdots,p_s,q_1,\cdots,q_{r-s}}^K x_i]^{K-r} [\sum_{i=1}^s x_{p_i}]^s x_{q_1} x_{q_2} \cdots x_{q_{r-s}}}. \tag{12}$$

최소 트레이닝 표본 $X(l)$를 이용한 임의의 모형 M_b, $b=1,2,\cdots,Q$의 모형 M_a, $a=1,2,\cdots,Q$에 대한 AIBF와 MIBF는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_{ba}^{AI} &= B_{ba}^{N}\times\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}B_{ab}^{N}(x(l)), \\ B_{ba}^{MI} &= B_{ba}^{N}\times\{\underset{1\le l\le L}{Median}B_{ab}^{N}(x(l))\}. \end{aligned}$$

여기에서 $B_{ba}^N=\frac{m_b^N(\mathbf{x})}{m_a^N(\mathbf{x})}$이며 $B_{ab}^N(x(l))=\frac{m_a^N(x(l))}{m_b^N(x(l))}$이다. 또한 L 은 모든 가능한 최소 트레이닝 표본의 수이다.

제 4 절 모의 실험

4절에서는 모집단을 세 개로 가정하고 모의실험을 행하여 제안한 방법의 유용성을 알아보고자 한다. 세 개의 모집단을 각각 $\exp(\lambda_1)$과 $\exp(\lambda_2)$, $\exp(\lambda_3)$이라 하자. 이 때 고려할 수 있는 모형은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{array}{lll} M_1:\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3, & M_2:\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3, & M_3:\lambda_1=\lambda_3\neq\lambda_2, \\ M_4:\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3, & M_5:\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3. & \end{array}$$

즉, 모집단의 수는 $K=3$이고 검정 가능한 모형의 수는 $Q=5$가 된다.

각 모형에 제안한 검정 방법이 올바른 결정을 내리는지를 알아보기 위하여 모의실험을 실시하였는데 이 때의 계산은 100번 반복으로 이루어졌으며 각 모형에 대한 사전확률은 $\frac{1}{5}$로 가정하였다. 이 모의실험에서 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$의 값은 (5,5,5), (5,5,10), (5,10,5), (5,10,10) 그리고 (5,10,20)으로 가정하였다.

표 1과 표 2는 앞에서 제시한 AIBF와 MIBF를 이용하여 가설의 사후확률을 계산할 경우 모형 선택에 있어 올바른 결정을 하는지 알아보기 위하여 각 모형 $M_j, j=1,2,3,4,5$에 대한 사후확률을 계산해 놓은 결과이다. 표 1과 2로부터 제안한 AIBF와 MIBF를 이용한 계산 결과에서, 두 경우 모두 표본의 크기가 비교적 작은 경우에도 올바른 모형을 선택한다는 것을 알 수 있다. 그러나 모형 M_5에 대한 계산 결과에서는 표본의 크기가 비교적 큰 경우에만 올바른 모형을 선택한다는 사실을 알 수 있었으며 그 이유는 차후 검토해 봐야 할 사항이다.

참 고 문 헌

1. Berger, J. O. and Pericchi, L. R. (1996). The Intrinsic Bayes Factor for Model Selection and Prediction, *Journal of American Statistical Association*, 91,109-122.

2. Berger, J. O. and Pericchi, L. R. (1998). Accurate and Stable Bayesian Model Selection : The Median Intrinsic Bayes Factor, *Sankhya*, B, 91,1-18.

3. Dal Ho Kim, Sang Kil Kang, and Seong. W. Kim (2000). Intrinsic Bayes Factor for Exponential Model Comparison with Censored Data, *Journal of the Korean Statistical Society*, 29:1, 123-135.

4. Jongsig Bae, Hyunsoo Kim and Seong. W. Kim (2000). Intrinsic Priors for Testing Two Normal Means with the Default Bayes Factors, *The Journal of Korean Statistical Society*, 29:4, 443-454.

5. O'Hagan, A. (1995). Fractional Bayes Factors for Model Comparison, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 57, 99-138.

6. Seong W. Kim (2000). Intrinsic priors for testing exponential means, *Statistics and Probability Letters*, 46, 195-201.

7. Seong W. Kim and D. Sun (2000). Intrinsic priors for model selection using an encompassing model with application to censored failure time data, *Lifetime Data Analysis*, 6, No. 3, 251-269.

8. Seong W. Kim and Hyunsoo Kim (2000). Intrinsic Priors for Testing Exponential Means with the Fractional Bayes Factor, *The Journal of Korean Statistical Society*, 29:4, 395-405.

표 1. AIBF를 이용한 M_i, $i = 1,2,3,4,5$에 대한 사후확률

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	(n_1, n_2, n_3)	$P\{M_1\|\mathbf{x}\}$	$P\{M_2\|\mathbf{x}\}$	$P\{M_3\|\mathbf{x}\}$	$P\{M_4\|\mathbf{x}\}$	$P\{M_5\|\mathbf{x}\}$
(5,5,5)	(10,10,10)	0.49341	0.16485	0.14547	0.15077	0.04549
	(20,10,10)	0.49562	0.16511	0.16148	0.13348	0.04430
	(20,20,10)	0.49671	0.18237	0.13581	0.14081	0.04429
	(20,20,20)	0.54715	0.14147	0.14302	0.13572	0.03264
	(30,20,20)	0.58546	0.13421	0.14065	0.11298	0.02670
	(30,30,20)	0.58853	0.13735	0.12250	0.12482	0.02679
	(30,30,30)	0.57362	0.13143	0.15354	0.11484	0.02657
(5,5,10)	(10,10,10)	0.31003	0.34750	0.11308	0.13821	0.09117
	(20,10,10)	0.30366	0.36943	0.09943	0.13117	0.09630
	(20,20,10)	0.32350	0.38217	0.10830	0.10470	0.08132
	(20,20,20)	0.23674	0.43266	0.11346	0.11553	0.10161
	(30,20,20)	0.22760	0.49542	0.10186	0.07835	0.09677
	(30,30,20)	0.22078	0.48012	0.10403	0.09699	0.09807
	(30,30,30)	0.14536	0.62628	0.07900	0.04955	0.09980
(5,10,5)	(10,10,10)	0.27396	0.11215	0.35500	0.15278	0.10610
	(20,10,10)	0.34023	0.12343	0.33156	0.11753	0.08724
	(20,20,10)	0.20685	0.08919	0.42975	0.15106	0.12314
	(20,20,20)	0.25332	0.10294	0.42564	0.11491	0.10319
	(30,20,20)	0.19102	0.07544	0.54915	0.07958	0.10481
	(30,30,20)	0.15180	0.07691	0.55254	0.10787	0.11088
	(30,30,30)	0.13868	0.08073	0.60030	0.06529	0.11499
(5,10,10)	(10,10,10)	0.27519	0.14873	0.15031	0.31492	0.11084
	(20,10,10)	0.25313	0.14722	0.14062	0.35643	0.10258
	(20,20,10)	0.21736	0.10021	0.14321	0.43482	0.10439
	(20,20,20)	0.22208	0.08844	0.11417	0.46806	0.10725
	(30,20,20)	0.13814	0.09536	0.11528	0.52582	0.12540
	(30,30,20)	0.14926	0.07487	0.11617	0.53895	0.12074
	(30,30,30)	0.15361	0.07751	0.05712	0.60164	0.11012
(5,10,20)	(10,10,10)	0.10945	0.31024	0.03486	0.33563	0.20981
	(20,10,10)	0.06113	0.34749	0.02075	0.36366	0.20696
	(20,20,10)	0.06557	0.28265	0.01769	0.34398	0.29011
	(20,20,20)	0.02474	0.30505	0.00596	0.35608	0.30816
	(30,20,20)	0.00685	0.27415	0.00191	0.39712	0.31997
	(30,30,20)	0.01251	0.29774	0.00189	0.30188	0.38598
	(30,30,30)	0.00430	0.29297	0.00056	0.27410	0.42807

표 2. MIBF를 이용한 M_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$에 대한 사후확률

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	(n_1, n_2, n_3)	$P\{M_1\|\mathbf{x}\}$	$P\{M_2\|\mathbf{x}\}$	$P\{M_3\|\mathbf{x}\}$	$P\{M_4\|\mathbf{x}\}$	$P\{M_5\|\mathbf{x}\}$
(5,5,5)	(10,10,10)	0.47226	0.17161	0.15129	0.15762	0.04628
	(20,10,10)	0.47497	0.17173	0.16793	0.13917	0.04546
	(20,20,10)	0.47518	0.18948	0.14174	0.14678	0.04619
	(20,20,20)	0.52511	0.14773	0.15020	0.14312	0.03320
	(30,20,20)	0.56256	0.14118	0.14865	0.11981	0.02733
	(30,30,20)	0.56597	0.14483	0.12961	0.13180	0.02729
	(30,30,30)	0.55099	0.13851	0.16088	0.12193	0.02721
(5,5,10)	(10,10,10)	0.29841	0.34847	0.11634	0.14171	0.09376
	(20,10,10)	0.29123	0.36933	0.10307	0.13502	0.10018
	(20,20,10)	0.30979	0.38470	0.11157	0.10789	0.08503
	(20,20,20)	0.22471	0.43190	0.11563	0.11828	0.10867
	(30,20,20)	0.21668	0.49541	0.10319	0.08036	0.10362
	(30,30,20)	0.20965	0.48022	0.10567	0.09905	0.10467
	(30,30,30)	0.13751	0.62314	0.08044	0.05054	0.10783
(5,10,5)	(10,10,10)	0.26404	0.11411	0.35482	0.15464	0.11140
	(20,10,10)	0.32761	0.12716	0.33275	0.12131	0.09004
	(20,20,10)	0.19710	0.09068	0.42802	0.15284	0.13054
	(20,20,20)	0.24042	0.10555	0.42660	0.11679	0.10982
	(30,20,20)	0.18162	0.07686	0.54709	0.08165	0.11210
	(30,30,20)	0.14339	0.07795	0.55004	0.10854	0.11950
	(30,30,30)	0.13055	0.08214	0.59649	0.06599	0.12428
(5,10,10)	(10,10,10)	0.26491	0.15021	0.15262	0.31598	0.11501
	(20,10,10)	0.24030	0.15017	0.14395	0.35623	0.10840
	(20,20,10)	0.20680	0.10242	0.14594	0.43296	0.11096
	(20,20,20)	0.21109	0.09061	0.11604	0.46737	0.11417
	(30,20,20)	0.13058	0.09592	0.11555	0.52273	0.13465
	(30,30,20)	0.14140	0.07544	0.11729	0.53494	0.13039
	(30,30,30)	0.14559	0.07821	0.05775	0.59927	0.11872
(5,10,20)	(10,10,10)	0.10506	0.30551	0.03593	0.33102	0.22181
	(20,10,10)	0.05849	0.34239	0.02132	0.35832	0.21892
	(20,20,10)	0.06341	0.27619	0.01848	0.33674	0.30457
	(20,20,20)	0.02340	0.29704	0.00612	0.34786	0.32532
	(30,20,20)	0.00653	0.26709	0.00194	0.38726	0.33710
	(30,30,20)	0.01187	0.28810	0.00193	0.29176	0.40621
	(30,30,30)	0.00403	0.28320	0.00056	0.26538	0.44677

Bayesian Testing for the Equality of K-Exponential Populations

Kyoung Ae Moon [3], **Dal Ho Kim** [4]

Abstract

We propose the Bayesian testing for the equality of K-exponential populations means. Specially we use the intrinsic Bayesian factors suggested by Beregr and Perrichi (1996,1998) based on the noninformative priors for the parameters. And, we investigate the usefulness of the proposed Bayesian testing procedures via simulations.

Key Words and Phrases: intrinsic Bayes factor, noninformative prior, minimal training sample, model selection.

[3]Department of Computer Engineering, Tonghae University, Tonghae, 240-713, Korea
[4]Department of Statistics, Kyungpook National University, Taegu, 702-701, Korea