Journal of the Korean
Data & Information Science Society
2001, Vol. 12, No. 1, pp. 51 ~ 59

부분 베이즈요인을 이용한 로그정규분포의 상등에 관한 베이지안검정

문경애 [1] · 김달호 [2]

요 약

독립이면서 로그정규분포를 따르는 두 모집단의 평균 차이에 대한 검정으로 O'Hagan (1995)이 제안한 부분 베이즈요인을 이용한 베이지안 방법을 제안한다. 이 때 모수에 대한 사전분포로는 무정보적 사전분포를 사용한다. 제안한 검정 방법의 유용성을 알아보기 위하여 실제 자료의 분석과 모의실험을 이용하여 고전적인 검정방법과 그 결과를 비교한다.

주제어:fractional Bayes factor, intrinsic Bayes factor, noninformative prior, minimal training sample, model selection.

제 1 절 서론

신뢰수명검정모형이나 가속수명시험모형 등에 널리 이용되는 로그정규분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x-\mu)^2\right\},\ 0<x<\infty. \tag{1}$$

여기서 $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma$이다. 식 (1)을 확률밀도함수로 가지는 확률변수를 $X \sim LN(\mu,\sigma^2)$으로 나타내자. 일반적으로 로그정규분포를 따르는 확률변수에 로그변환을 하면 평균 μ와 분산 σ^2을 가지는 정규분포를 따르게 된다. 이런 이유로 로그정규분포의 모수에 대한 추정과 검정은 주로 정규분포를 이용하여 다루어진다. 그러나 베이지안 추정과 검정 문제에서는 최우추정법의 불변성이 만족되지 않기 때문에 로그정규분포에 대한 베이지안 검정 방법을 다루어 보고자 한다.

모수 μ_1, σ_1와 μ_2, σ_2를 가지는 독립인 두 로그정규분포에서 다음과 같은 가설이 관심의 대상이다.

$$M_1: \mu_1 = \mu_2 \quad vs. \quad M_2: \mu_1 \neq \mu_2$$

이 때 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$라고 가정하자.

기존의 고전적인 검정 방법은 각 모집단에서 뽑혀진 표본에 로그변환을 한 다음 정규분포에서의 두 모평균 차이에 대한 검정 방법인 t-검정을 이용한다. $X_i \sim LN(\mu_i,\sigma^2)$, $i =$

[1](240-713) 강원도 동해시 지흥동 산 199번지 동해대학교 컴퓨터공학과
[2](702-701) 대구시 북구 산격동 1370번지 경북대학교 통계학과

1,2인 각각의 로그정규분포에서 뽑혀진 확률표본을 X_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, n_i$, $i = 1, 2$라 두고 $Y_{ij} = \log X_{ij}$라고 두자.

두 모집단의 분산이 같으면서 미지인 경우에 사용되는 t-검정통계량은

$$|t| = \frac{|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

이며 여기에서 $\overline{Y}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} Y_{1i}/n_1$, $\overline{Y}_2 = \sum_{i=1}^{n_2} Y_{2i}/n_2$, 그리고

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(Y_{1i} - \overline{Y}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_{2i} - \overline{Y}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

이다. 이 때 유의수준 α에서 $|t| \geq t_{\alpha/2}$이면 가설 M_1을 기각하게 된다. 여기에서 t_α는 자유도를 $(n_1 + n_2 - 2)$으로 가지는 t-분포에서 분포의 꼬리면적이 α가 되는 점이다.

지금까지 두 모집단의 평균 차이에 대한 고전적인 검정 방법에 대해서 간략하게 알아보았는데 이 논문에서 우리는 같은 문제를 베이지안 방법을 이용하여 해결하려고 한다. 즉 모수에 대한 무정보적 사전분포만을 이용하여 두 모집단의 평균이 같은지를 검정하고자 하는 것이다. 독립인 두 모집단의 모수의 동일성에 대한 베이지안 가설검정과 관련한 연구를 간략하게 소개하면 다음과 같다. Dal Ho Kim, Sang Gil Kang 과 Seong W. Kim (2000)은 제2종 중단된 자료를 이용하여 지수분포를 따르는 두 모집단의 평균이 같은지에 대한 베이지안 검정법을 제안하였다. 또한, Seong W. Kim과 Hyunsoo Kim (2000)은 지수분포를 따르는 두 집단의 평균을 비교하기 위한 방법으로 부분 베이즈요인의 값과 근사적으로 일치하는 일반적인 베이즈요인의 값을 주는 적절사전분포 (proper prior)인 내재적 사전분포 (intrinsic prior)를 이용한 방법을 제안했고, Jongsig Bae, Hyunsoo Kim과 Seong W. Kim (2000)은 정규분포를 따르는 두 모집단의 평균을 비교하기 위한 내재적 사전분포를 제안했다.

본 논문에서는 두 로그정규분포의 모수들에 대한 검정 방법으로서 O'Hagan (1995)이 제안한 부분 베이즈요인 (fractional Bayes factor; FBF)을 이용한 베이지안 검정법을 제안한다. 2절에서는 FBF에 대해 간략하게 소개를 하고 3절에서는 관심의 대상이 되는 가설에 대해 무정보적 사전분포(noninformative prior) 사전분포를 이용한 베이지안 검정 방법을 제시한다. 마지막으로 4절에서는 실제 자료를 이용하여 제안한 검정 방법과 고전적 방법을 비교해 보고 제안한 검정 방법이 올바른 결정을 내리는지를 알아보기 위하여 모의실험을 실시하였다.

제 2 절 부분 베이즈요인

$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$을 확률밀도함수 $f(\mathbf{y}|\theta)$를 갖는 모집단으로부터 추출된 확률표본이라고 하자. 여기에서 $\theta \in \Theta$이며, 유한한 차원을 가진다. 만약 모형 $M_i : \theta \in \Theta_i$, $\Theta_i \in \Theta$, $i = 1, 2, \cdots, q$에 대한 모형선택 (model selection)을 한다고 했을 때 베이지안 관점에서는 모형 M_i에서의 모수 θ에 대한 사전분포와 모형 M_i가 사실일 사전확률을 각각 $\pi_i(\theta)$와 p_i로 가정하고 모형 M_i가 사실일 사후확률을 계산하여 가장 높은 사후확률 모형을 선택한다. 이 때의 사후확률은 다음과 같이 계산된다.

$$P(M_i|\mathbf{y}) = (\sum_{j=1}^{q} \frac{p_j}{p_i} B_{ji})^{-1}. \tag{2}$$

여기에서 B_{ji}는 모형 M_j의 모형 M_i에 대한 베이즈요인이라고 부르며 정의는 다음과 같다.

$$B_{ji} = \frac{m_j(\mathbf{y})}{m_i(\mathbf{y})} = \frac{\int_{\Theta_j} f(\mathbf{y}|\theta)\pi_j(\theta)d\theta}{\int_{\Theta_i} f(\mathbf{y}|\theta)\pi_i(\theta)d\theta}. \tag{3}$$

여기에서 $m_i(\mathbf{y})$는 모형 M_i에서의 $\mathbf{Y}$에 대한 주변확률밀도함수 (marginal or predictive density of $\mathbf{Y}$)이다.

베이지안 검정에서는 흔히 모형 M_i에 대한 사전정보의 부족이나 여러 가지 여건으로 인해 사전분포를 무정보적 사전분포로 가정하는 경우가 많다. 그러나 무정보적 사전분포는 부적절 분포(improper distribution)인 경우가 대부분이다. 이 무정보적 사전분포를 $\pi_i^N(\theta)$라고 두면, 식 (3)은

$$B_{ji}^N = \frac{m_j^N(\mathbf{y})}{m_i^N(\mathbf{y})} = \frac{\int_{\Theta_j} f(\mathbf{y}|\theta)\pi_j^N(\theta)d\theta}{\int_{\Theta_i} f(\mathbf{y}|\theta)\pi_i^N(\theta)d\theta} \tag{4}$$

이 되며, 이 때 식 (4)에는 부적절 분포의 사용으로 인한 임의의 상수가 포함되어 있다. 부적절 분포를 사용하여 계산한 베이즈 요인에 포함된 임의의 상수로 인해 식 (2)를 사 용한 베이즈 모형 선택 문제에는 어려움이 있었다. 이러한 어려움을 해결하기 위한 제안으로 Berger와 Pericchi (1996,1998)의 내재적 베이즈요인 (intrinsic Bayes factor; IBF), O'Hagan (1995)의 부분 베이즈요인 (FBF)등이 있다. 이 중 IBF는 자료 y를 트레이닝 표본 (training sample)이라 불리는 $\mathbf{y}(l)$과 이를 제외한 나머지 표본 $\mathbf{y}(-l)$으로 나누어 임의의 상수를 를 소거하는 방법을 제안하였는데 이것은 베이즈요인을 계산할 때 $\mathbf{y}(l)$에 대한 사후분포를 θ의 사전분포처럼 이용하는 방법이다. 그러나 이 때의 베이즈요인은 최소 트레이닝 표본 (minimal training sample)의 선택에 영향을 받게 되어 이런 영향을 제거하고 안정성을 높이기 위해 산술 내재적 베이즈요인 (arithmetic IBF; AIBF)을 사용하였다. 그러나 AIBF는 소표본인 경우와 비내포(non-nested) 모형인 경우에는 안정적이지 못하고 계산 시간도 많이 걸린다는 결점을 있다. 그런 이유로 Berger와 Pericchi (1998)는 비내포 모형이나 소표본에서도 잘 적용되는 중위수 내재적 베이즈요인 (Median IBF; MIBF)을 제안하였다. 그러나 IBF는 근본적으로 표본의 재사용이라는 문제점을 안고있다.

한편, O'Hagan (1995)이 제안한 FBF는 IBF에 비해 계산 시간이 적게 걸릴 뿐만 아니라 비내포 모형인 경우에도 쉽게 이용할 수 있으며, 트레이닝 표본을 고려하지 않아도 되는 장점이 있다. 또한 두 모형이 비내포 모형인 경우 두 모형 M_1과 M_2에 대한 AIBF를 구할 때, M_1의 M_2에 대한 AIBF와 M_2의 M_1에 대한 AIBF의 값은 역수의 관계가 성립하지 않지만 FBF인 경우에는 역수의 관계가 성립한다는 장점이 있다. O'Hagan (1995)이 제안한 FBF는 다음과 같이 정의한다.

Definition 1 *모형 M_1의 모형 M_2에 대한 부분 베이즈요인은 다음과 같이 주어진다.*

$$B_{12}^b(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{q_1(b,y)}}{\mathbf{q_2(b,y)}}. \tag{5}$$

여기에서 $i = 1, 2$에 대하여

$$q_i(b,\mathbf{y}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\theta_i)f_i(\mathbf{y}|\theta_i)d\theta_i}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\theta_i)f_i(\mathbf{y}|\theta_i)^b d\theta_i} \tag{6}$$

이며 b는 미리 정해진 상수이다.

식 (5)과 식 (6)에 포함되어 있는 상수 b는 다음의 세 가지 방법을 이용하여 선택하도록 제시하였다. m을 Berger와 Pericchi (1996)가 정의한 최소 트레이닝 표본의 크기라 한다면,

(1) $b = \frac{m}{n}$,

(2) $b = n^{-1} max\{m, \sqrt{n}\}$,

(3) $b = n^{-1} max\{m, \log n\}$

으로 제안하였다. (1)은 사전분포의 불명확성에 대한 로버스트성 (robustness)에 특별히 관심이 없을 때 사용하고, (2)는 로버스트성이 관심이 있는 경우에 사용하며, (3)은 (1)과 (2)의 중간적 입장에서 사용 할 것을 제시하였다.

위의 방법을 적용한다면 θ_i에 대한 사전분포가 미지의 상수를 가지는 부적절 분포가 되더라도, 미지의 상수는 서로 상쇄되어 나타나지 않는다.

제 3 절 로그정규분포의 상등에 관한 베이지안 검정

로그정규분포를 따르는 두 모집단을 각각 $X_1 \sim LN(\mu_1, \sigma_1^2)$과 $X_2 \sim LN(\mu_2, \sigma_2^2)$라고 했을 때, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$이면서 σ의 값은 모른다고 가정하자. 이 때 우리가 검정 (선택)하고자 하는 가설 (모형)은 다음과 같다.

$$M_1 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs. \quad M_2 : \mu_1 \neq \mu_2$$

가설 M_1에서 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$라고 두면, 위의 가설들을 검정하기 위해 사용하는 사전분포로 다음과 같은 무정보적 사전분포를 생각한다.

$$\pi_1^N(\mu, \sigma) = \pi_2^N(\mu_1, \mu_2, \sigma) = \frac{1}{\sigma}, \quad 0 < \sigma < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty. \tag{7}$$

각각의 로그정규분포에서 나온 확률표본을 $X_{ij},\ j = 1, 2, \cdots, n_i,\ \ i = 1, 2$라 두고 $N = n_1 + n_2,\ \ Y_{ij} = \log X_{ij},\ \ T_i = \prod_{j=1}^{n_i} x_{ij},\ \ i = 1, 2$라고 나타내자.

먼저 $Y_{ij},\ j = 1, 2, \cdots, n_i,\ \ i = 1, 2$를 이용하여 모형 $M_1 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ 에 대한 우도함수 (likelihood function)를 구해보면

$$L_1(\mu, \sigma) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-N} (T_1 T_2)^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu)^2 \right\} \tag{8}$$

과 같으며, 모형 M_2에 대한 우도함수는

$$L_2(\mu_1, \mu_2, \sigma) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-N} (T_1 T_2)^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu_i)^2 \right\} \tag{9}$$

이 된다.

모형 $M_1 : \mu_1 = \mu_2$에 대해

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \pi_1(\mu, \sigma) L_1(\mu, \sigma) d\mu d\sigma = \frac{\Gamma(\frac{N-1}{2})}{2\pi^{(N-1)/2} \sqrt{N}\ T_1 T_2\ s_1^{(N-1)}},$$

여기에서 $s_1^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2$이고 $\bar{y} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}/N$이다. 또한, 미리 정하여진 b에 대해

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \pi_1(\mu,\sigma)\,[L_1(\mu,\sigma)]^b\, d\mu d\sigma = \frac{\Gamma(\frac{Nb-1}{2})}{2\pi^{(Nb-1)/2}\sqrt{N}\ (T_1T_2)^b\ b^{Nb/2}\ s_1^{(Nb-1)}},$$

이다. 그러므로,

$$q_1(b,\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{N-1}{2})\pi^{N(b-1)/2}\ (T_1T_2)^{(b-1)}\ b^{Nb/2}\ s_1^{N(b-1)}}{\Gamma(\frac{Nb-1}{2})} \tag{10}$$

이다.

모형 $M_2 : \mu_1 \neq \mu_2$에 대해

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \pi_2(\mu_1,\mu_2,\sigma)L_2(\mu_1,\mu_2,\sigma)d\mu_1 d\mu_2 d\sigma \\ &= \frac{\Gamma(\frac{N-2}{2})}{2\pi^{(N-2)/2}\ T_1T_2\sqrt{n_1n_2}\ s_{12}^{(N-2)}}.\end{aligned}$$

여기에서 $s_{12}^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$이고 $\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}/n_i$이다. 그리고,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \pi_2(\mu_1,\mu_2,\sigma)\,[L_2(\mu_1,\mu_2,\sigma)]^b\, d\mu_1 d\mu_2 d\sigma \\ &= \frac{\Gamma(\frac{Nb-2}{2})}{2\pi^{(Nb-2)/2}\ (T_1T_2)^b\sqrt{n_1n_2}\ b^{Nb/2}\ s_{12}^{(Nb-2)}}\end{aligned}$$

이다. 그러므로,

$$q_2(b,\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{N-2}{2})\pi^{N(b-1)/2}\ (T_1T_2)^{(b-1)}\ b^{Nb/2}\ s_{12}^{N(b-1)}}{\Gamma(\frac{Nb-2}{2})}. \tag{11}$$

모형 M_1의 M_2에 대한 FBF는 식 (10)와 식 (11)에 의하여 다음과 같이 구해진다.

$$B_{12}^b(\mathbf{x}) = \frac{q_1(b,\mathbf{x})}{q_2(b,\mathbf{x})} = \frac{\Gamma(\frac{Nb-2}{2})\Gamma(\frac{N-1}{2})}{\Gamma(\frac{Nb-1}{2})\Gamma(\frac{N-2}{2})}\left(\frac{s_1}{s_{12}}\right)^{N(b-1)}. \tag{12}$$

여기에서 $s_1^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2$ 이고 $s_{12}^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$ 이다.

위의 식 (12)를 이용하여 모형 M_1과 모형 M_2가 사실일 사후확률을 계산하여 모형선택을 한다.

제 4 절 예제와 모의실험을 통한 비교

다음은 실제 자료와 모의실험을 통하여 식 (12)에 주어진 FBF를 이용하여 얻은 결과와 고전적인 검정 방법에 의한 결과를 비교해 보고자 한다.

다음에 주어진 23개의 자료는 볼 베어링 (ball bearing)의 내구성을 실험한 자료이다. 이 자료는 와이블 분포나 로그정규분포에 적합하다고 알려져 있다. Lawless (1982)는 로그정규분포에 대한 확률그림을 이용하여 이 자료가 로그정규분포를 따른다고 가정하고 통계분석을 실시하였다. 이 자료를 아래의 표와 같이 임의의 두 그룹으로 나누어 제안한 검정 방법을 적용해 보고자 한다.

집단 1	33.00, 45.60, 51.84, 51.96, 55.56, 67.80, 68.64, 68.64, 93.12, 105.84, 128.04
집단 2	17.88, 28.92, 41.52, 42.12, 48.40, 54.12, 68.88, 84.12, 98.64, 105.12, 127.92, 173.40

위와 같이 로그정규분포를 따르는 집단을 두 개의 집단으로 분리한다면 두 집단간에는 $\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$가 성립될 것이 예상되므로 이를 이용하여 아래의 가설을 고려해 볼 수 있다.

$$M_1 : \mu_1 = \mu_2 \;\; vs. \;\; M_2 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

각 모형에 대한 사전확률을 $\frac{1}{2}$로 가정하고 각 b에 따라 식 (12)을 이용한 M_1의 M_2에 대한 FBF값과 모형 M_1에 대한 사후확률은 다음과 같다.

b	B_{12}^b	B_{21}^b	$P\{M_1\|x\}$
m/n=0.1304	5.5341	0.1807	0.8470
$n^{-1}max\{m,\sqrt{n}\}$=0.2085	2.8895	0.3461	0.7429
$n^{-1}max\{m,logn\}$=0.1363	5.0737	0.1971	0.8354

위의 결과로부터 b의 선택에 따라 FBF의 값은 약간씩 차이가 나지만 모든 경우에서 모형 M_1이 선택된다는 것을 알 수 있다.

위의 가설에 대해 최소 트레이닝 표본의 크기를 $m = 3$으로 이용한 Berger와 Pericchi (1996)의 AIBF는 $B_{21}^{AI} = 0.3189$가 되며, M_1에 대한 사후확률은 $P\{M_1|\mathrm{x}\} = 0.7582$ 가 되어서 앞의 결과와 마찬가지로 모형 M_1이 선택된다는 것을 알 수 있다. 또한, 이 결과는 b의 선택에서 로버스트성에 관심이 있는 경우, $b = n^{-1}max\{m,\sqrt{n}\}$인 경우와 거의 일치한다.

참고로 고전적인 가설 검정법을 이용하여 위에 주어진 가설을 검정해 보고자 한다. 위의 두 집단의 자료에 로그변환을 하면 두 집단은 정규분포를 따르게 되어 위에서 제시한 가설 은 모평균 차이에 대한 t-검정방법으로도 검정이 가능하게 된다. 먼저 두 집단의 분산이 동일 ($\sigma_1 = \sigma_2$) 한지를 알아보기 위하여 F-검정을 한 결과, F값이 $F_0 = 0.3618$이고 p-값은 0.1204로 되어 두 집단의 분산이 동일하다는 결론을 얻을 수 있었다. 이 때 모평균 차이에 대한 t-검정을 실시한 결과, t값은 $t_0 = 0.2303$이 되고 p-값은 0.4101 이 되어 역시 모형 M_1이 선택되었다.

제안한 검정 방법이 올바른 결정을 내리는지를 알아보기 위하여 모의실험을 실시하였다. 표 1은 $M_1 : \mu_1 = \mu_2$와 $M_2 : \mu_1 \neq \mu_2$의 검정에서 모형 M_1에 대한 사후확률을 계산해 놓은 결과이다. 이 때의 계산은 500번 반복으로 이루어졌으며 각 모형에 대한 사전확률은 $\frac{1}{2}$로 가정하였다. 이 모의실험에서 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$로 가정하였고, (μ_1, μ_2)의 값은 (-1,-1), (-1,0) 그리고 (-1,1)로 가정하였다. 이 때 b는 2절에서 제안한 3가지 경우 중 $\frac{m}{n}$인 경우를 가정하였다. 이것은 Beger와 Pericchi (1996)가 제안한 최소 트레이닝 표본의 선택과 일치하는 경우이며 FBF를 계산할 때 많이 이용하는 경우이기 때문이다.

우리가 제안한 FBF를 이용하여 사후확률을 계산한 결과, 표본이 큰 경우뿐만 아니라 표본이 작은 경우에서도 올바른 결정을 내리게 한다는 것을 알 수 있다. 또한 베이즈요인

을 계산할 때 IBF에 비해 시간이 적게 걸릴 뿐만 아니라 IBF를 이용한 베이즈요인의 계산에서 최소 트레이닝 표본의 사용으로 인한 자료의 재사용이라는 문제점도 피할 수 있다.

표 1. $M_1 : \mu_1 = \mu_2$ v.s. $M_2 : \mu_1 \neq \mu_2$에 대한 사후확률

(μ_1, μ_2)	(n_1, n_2)	$P\{M_1\|\mathbf{x}\}$	p-value
(-1,-1)	(10,10)	0.7541	0.50610
	(10,20)	0.7850	0.47451
	(20,20)	0.8149	0.49100
	(20,30)	0.8294	0.51535
	(30,30)	0.8351	0.45860
	(30,40)	0.8434	0.48134
	(40,40)	0.8589	0.47300
	(40,50)	0.8617	0.53236
(-1,0)	(10,10)	0.3839	0.10907
	(10,20)	0.3166	0.09733
	(20,20)	0.1945	0.03976
	(20,30)	0.1462	0.01449
	(30,30)	0.0884	0.01016
	(30,40)	0.0655	0.00120
	(40,40)	0.0364	0.00087
	(40,50)	0.0226	0.00094
(-1,1)	(10,10)	0.0394	0.00305
	(10,20)	0.0098	0.00123
	(20,20)	0.0007	0.00003
	(20,30)	0.0003	0.00000
	(30,30)	0.0000	0.00000
	(30,40)	0.0000	0.00000
	(40,40)	0.0000	0.00000
	(40,50)	0.0000	0.00000

참 고 문 헌

1. Berger, J. O. and Pericchi, L. R. (1996). The Intrinsic Bayes Factor for Model Selection and Prediction, *Journal of American Statistical Association*, 91, 109-122.

2. Berger, J. O. and Pericchi, L. R. (1998). Accurate and Stable Bayesian Model Selection : the Median Intrinsic Bayes Factor, *Sankhya*, 60,1-18.

3. Dal Ho Kim, Sang Gil Kang and Seong W. Kim (2000). Intrinsic Bayes Factor for Exponential Model Comparison with Censored Data, *Journal of the Korean Statistical Society*, 29, 123-135.

4. Jongsig Bae, Hyunsoo Kim and Seong W. Kim (2000). Intrinsic Priors for Testing Two Normal Means with the Default Bayes Factors, *The Journal of Korean Statistical Letters*, 29:4, 443-454.

5. Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.

6. O'Hagan, A. (1995). Fractional Bayes Factors for Model Comparisons, *Journal of Royal Statistical Society*, Ser. B, 57, 99-138

7. Seong W. Kim and Hyunsoo Kim (2000). Intrinsic Priors for Testing Exponential Means with the Fractional Bayes Factors, *The Journal of Korean Statistical Society*, 29:4, 395-405.

Bayesian Testing for the Equality of Two Lognormal Populations with the fractional Bayes factor

Kyoung Ae Moon [3], Dal Ho Kim [4]

Abstract

We propose the Bayesian testing for the equality of two Lognormal population means. Specially we use the fractional Bayesian factors suggested by O'Hagan (1995) based on the noninformative priors for the parameters. In order to investigate the usefulness of the proposed Bayesian testing procedures, we compare it with classical tests via both real data analysis and simulations.:

[3]Department of Computer Engineering, Tonghae University, Tonghae, 240-713, Korea.
[4]Department of Statistics, Kyungpook National University, Taegu, 702-701, Korea.