

論文2001-38TC-11-5

정방형 M진 직교 진폭 변조 신호의 일반화된 BER 성능 분석

(Performance Analysis of Generic Bit Error Rate of M-ary Square QAM)

趙慶國*, 尹東源**

(Kyongkuk Cho and Dongweon Yoon)

요약

이제까지 임의의 M에 대한 M진 직교 진폭 변조 신호에 대하여 일반화된 closed-form BER 표현식은 구하여진 바 없다. 이 논문에서는 가산성 백색 가우시안 잡음 환경에서 정방형 M진 직교 진폭 변조 신호의 일반화된 비트 오류 확률식을 유도하고 분석한다. M이 16, 64, 256일 때의 직교 진폭 변조 신호의 비트 오류 확률식 결과로부터 유도 과정의 규칙성을 찾아내고, 그 규칙성으로부터 임의의 M에 대한 일반화된 비트 오류 확률 표현식을 유도하고 분석한다.

Abstract

The exact general bit error rate (BER) expression of M-ary square quadrature amplitude modulation (QAM) for arbitrary M has not been derived so far. In this paper, a generalized closed-form expression for the BER performance of M-ary square QAM with Gray code bit mapping is derived and analyzed in the presence of additive white Gaussian noise (AWGN) channel. The derivation is based on the consistency of the format in signal constellation of Gray coding and it has been derived from the results for M=16, 64, and 256.

I. 서론

멀티 미디어와 데이터 서비스의 도래로 해서 보다 고속의 데이터 전송을 요구한다. 주어진 무선 통신 환경에서 주파수 효율이 우수한 변조 방식들이 요구되고

있다. 직교 진폭 변조(QAM)는 추가의 대역폭 증가없이 고속의 데이터 전송이 가능하여 이러한 통신 환경에서 매우 매력적인 변조 방식이다.

지금까지 M진 정방형 직교 진폭 변조 신호에 대하여 비트 오류 확률을 구하는 많은 노력들이 있어 왔으며, 특정 M에 대하여는 비트 오류 확률을 구할 수 있다. 예를 들어, M이 16 일 때와 64 일 때 직교 진폭 변조 신호에 대한 비트 오류 확률은 참고문헌 [1], [2], [7] 등에서 찾을 수 있다. 그러나, 임의의 M에 대하여 일반화된 오류 확률 표현식은 이제까지 구하여진 바 없고 단지 이에 대한 근사식들이 여러 문헌에 언급되어 있으며^[8,9] 특히 최근에는 참고문헌 [3], [4] 등에서 각각 신호 공간 개념과 회귀 알고리즘에 기초한 근사식들이 유도되어 있다. 그러나, 이러한 근사식들은 신호대 잡음비가 높을 때는 그 결과가 잘 맞으나, 신호대 잡음비가 낮을 때는 정확한 결과식과 많은 차이가 난다. 이러한

* 正會員, LG電子 次世代通信團
(Mobile Comm. Tech. Dept., LG Electronics, Seoul, Korea)

** 正會員, 大田大學校 情報通信工學科
(Dept. of Information & Communication Eng., Taejon Univ., Taejon, Korea)

※ 저자들은 영국 Southampton 대학의 Hanzo 교수와 미국 JPL의 Simon 박사의 조언에 감사를 표합니다.
接受日字:2001年6月13日, 수정완료일:2001年9月5日

성능 차이는 페이딩 환경에서는 더 늘어나게 된다.

본 논문에서는 직교 진폭 변조 신호의 비트 오류 확률을 모든 M에 대하여 일반화된 closed-form의 BER을 유도하고 분석한다. M이 16, 64, 256일 때의 연은 수식 사이에 규칙성을 찾아내고 임의의 M에 대한 일반화된 표현식을 추론하고 분석한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 M진 직교 진폭 변조 신호에 대한 해석 모델을 다루며, 3장에서는 M=16, 64, 256일 때의 직교 진폭 변조 신호의 BER을 유도한다. 이로부터 그레이 부호화의 규칙성을 이용하여 일반화된 closed-form의 BER 표현식을 4장에서 유도하고 분석하며 5장에서 결론을 맺는다.

II. 해석 모델

직교 진폭 변조 신호는 간단히 두 개의 진폭 변조 (PAM) 신호를 각각 동상 채널과 직교 채널로 해서 독립적으로 전송되는 전송 모델이다.

$$s(t) = A_c \cos 2\pi f_c t - A_s \sin 2\pi f_c t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

여기서 A_c 와 A_s 는 각각 동상과 직교 신호 성분의 진폭이고, f_c 는 반송파 주파수, T 는 전송 심볼 시간이다. M진 직교 진폭 변조 신호는 $\log_2 M$ -비트의 전송 심볼을 각각 동상 성분과 직교 성분으로 분배해서 보낸다. 식 (1)에서 A_c 와 A_s 는 각각 \sqrt{M} -레벨을 가지며 $-(\sqrt{M}-1)d$, $-(\sqrt{M}-3)d$, ..., $(\sqrt{M}-3)d$ 또는 $(\sqrt{M}-1)d$ 의 진폭을 갖는다. 여기서 d 는 인접 신호 심볼사이의 거리 값의 반에 해당하며 다음의 관계식을 갖는다.

$$d = \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot E_b}{2(M-1)}} \quad (2)$$

여기서 E_b 는 M진 직교 진폭 변조 신호의 비트 에너지이다. 또한 신호 배치도의 심볼은 그레이 부호화로 되어 있다고 가정하며 각각의 신호점은 서로 동일한 확률값을 갖는다고 가정한다.

직교 진폭 변조 신호가 가산성 백색 잡음 채널 환경을 겪은 후의 수신 신호는

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (3)$$

이 되며, 이 때 $n(t)$ 는 평균값이 0이고 전력 밀도 함수

값이 $N_0/2$ 인 가산성 백색 가우시안 잡음 신호이다. 직교 진폭 신호의 복조는 서로 직교하는 두 개의 진폭 변조 신호를 복조함으로써 이룰 수 있고 이 때 주파수 동기화 및 심볼 동기가 이루어졌다고 가정한다. 심볼을 구성하는 비트의 위치가 직교 진폭 변조 신호의 비트 오류 확률에 영향을 미치게 된다.

III. M진 직교 진폭 변조 신호의 BER

1. 16-QAM에서의 BER

M이 16, 64, 256로 주어질 때 M진 직교 진폭 변조 신호의 BER은 지루하지만 쉽게 구할 수 있다. 본 논문에서 이 결과식들의 값이 서로 일정한 규칙성을 보여주고 있다. 이 규칙성으로부터 일반화된 M진 직교 진폭 변조 신호의 BER 표현식 유도하게 된다.

먼저 정방형 16-QAM의 경우에 대하여 살펴본다. 그림 1에는 16-QAM의 신호점 배치도를 나타나 있다. 여기서 각 심볼들은 동상 성분의 i_1 , i_2 , 직교 성분의 q_1 , q_2 비트로 이루어지며 이들 비트들은 서로 인터리빙되어 i_1, q_1, i_2, q_2 의 4 비트가 하나의 심볼을 구성한다.

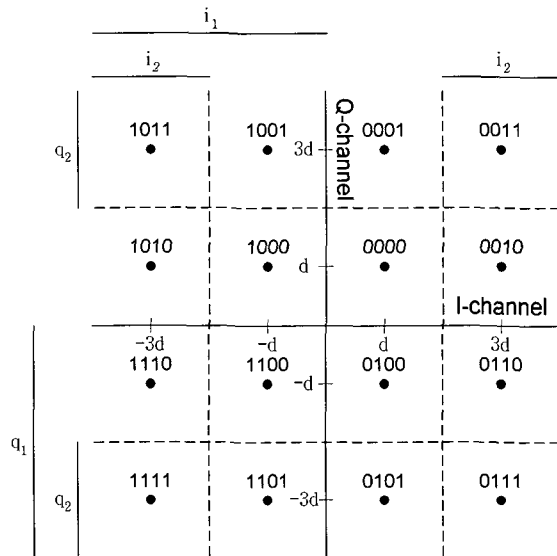


그림 1. 정방형 16-QAM의 신호점 배치도
Fig. 1. Signal-space diagram for square 16-QAM.

그림 1에서 i_k 와 q_k 는 각각 $i_k=1, q_k=1$ 인 영역을 나타낸다. 세로축의 왼쪽 평면은 i_1 이 언제나 1이며 가로축의 아래 평면은 q_1 이 언제나 1인 영역이다.

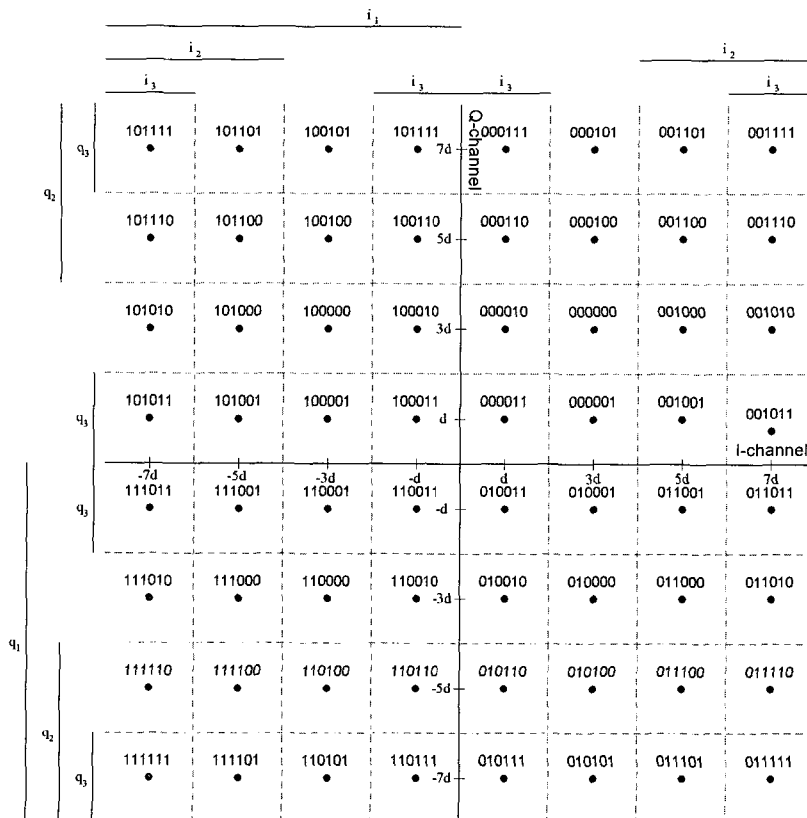


그림 2. 정방형 64-QAM의 신호점 배치도
Fig. 2. Signal-space diagram for square 64-QAM.

16-QAM의 4비트로 이루어진 심볼에서 각 비트의 위치가 오류 확률에 영향을 미친다. 16-QAM의 신호점에서 각 비트가 오류가 되는 것은 각각 동상 성분과 직교 성분상의 k번째(k = 1, 2) 비트가 오류가 되는 다음과 같은 두 가지 경우(경우 I, 경우 II)가 있으며 평균 비트 오류 확률은 두 경우의 평균을 구하면 된다^[1].

경우 I은 각 성분의 첫 번째 비트 i_1, q_1 이 오류가 되는 경우이다. 이때 동상 성분과 직교 성분에 대하여 결정 경계는 각각 모두 0이 되고 각 신호점은 결정 경계로부터 d 와 $3d$ 의 거리를 갖는다. 수신된 i_1, q_1 비트는 다음 규칙에 따라 복원된다.

$$\begin{cases} \text{if } I, Q \geq 0 \text{ then } i_1, q_1 = 0 \\ \text{if } I, Q < 0 \text{ then } i_1, q_1 = 1 \end{cases} \quad (4)$$

이 경우에 각 성분의 첫 번째 비트 i_1, q_1 가 오류가 될 확률은 다음과 같다.

$$P_b(1) = \frac{1}{4} \left[\text{erfc} \left(\sqrt{\frac{2\gamma}{5}} \right) + \text{erfc} \left(3\sqrt{\frac{2\gamma}{5}} \right) \right] \quad (5)$$

여기서 $\gamma = \frac{E_b}{N_o}$ 는 비트당 신호대 잡음비이며 $\text{erfc}(\cdot)$ 는 상보 오차 함수(complementary error function)이고 다음과 같이 정의된다^[6].

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad (6)$$

경우 II는 각 성분의 두 번째 비트 i_2, q_2 가 오류가 되는 경우이다. 이때 동상 성분과 직교 성분에 대하여 결정 경계는 $-2d$ 와 $2d$ 이 되고, 각 신호점은 결정 경계로부터 d 만큼 떨어져 있다. 왼쪽 평면에 대하여 $i_2=1$ 일 때 잡음이 d 를 초과하면 수신 오류가 발생하며, $5d$ 를 초과하면 오류가 발생하지 않는다. 왼쪽 평면에서 $i_2=0$ 일 때 잡음이 $-d$ 와 $3d$ 를 초과하면 수신 오류가 발생한다. 오른쪽 평면에 대하여도 같은 규칙이

적용된다. 따라서 i_2, q_2 비트는 다음 규칙에 따라 복원된다.

$$\begin{cases} \text{if } I, Q < -2d \text{ then } i_2, q_2 = 1 \\ \text{if } -2d \leq I, Q < 2d \text{ then } i_2, q_2 = 0 \\ \text{if } I, Q \geq 2d \text{ then } i_2, q_2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

여기서 $d = \sqrt{\frac{2E_b}{5}}$ 이고 식 (2)로부터 구할 수 있다.

따라서 이 경우에 각 성분의 두 번째 비트 i_2, q_2 가 오류가 될 확률은 다음과 같다.

$$P_b(2) = \frac{1}{4} \left[2\text{erfc}\left\{\sqrt{\frac{2\gamma}{5}}\right\} + \text{erfc}\left\{3\sqrt{\frac{2\gamma}{5}}\right\} - \text{erfc}\left\{5\sqrt{\frac{2\gamma}{5}}\right\} \right] \quad (8)$$

정방형 16-QAM 신호의 평균 비트 오류 확률은 위의 식 (5)와 식 (8)을 평균함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_b = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 P_b(k) \quad (9)$$

2. 64-QAM에서의 BER

정방형 64-QAM의 각 심볼은 그림 2와 같이 6비트로 이루어진다. 동상 성분으로 i_1, i_2, i_3 , 직교 성분으로 q_1, q_2, q_3 비트로 이루어지며 서로 인터리빙이 되어 $i_1, q_1, i_2, q_2, i_3, q_3$ 의 6비트가 하나의 심볼을 구성한다^[1].

16-QAM에서 사용한 규칙을 적용하면 64-QAM의 비트 오류 확률은 다음의 3가지 경우를 가진다.

경우 I는 각각 모두 0이 결정 경계로 주어지며 i_1, q_1 비트는 다음 규칙에 따라 복원된다.

$$\begin{cases} \text{if } I, Q \geq 0 \text{ then } i_1, q_1 = 0 \\ \text{if } I, Q < 0 \text{ then } i_1, q_1 = 1 \end{cases} \quad (10)$$

각 성분의 첫 번째 비트가 오류가 될 확률은

$$P_b(1) = \frac{1}{8} \left[\text{erfc}\left\{\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + \text{erfc}\left\{3\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + \text{erfc}\left\{5\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + \text{erfc}\left\{7\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} \right] \quad (11)$$

이다.

경우 II에 대하여 $-4d$ 와 $4d$ 가 결정 경계로 주어

지며 i_2, q_2 비트는 다음 규칙에 따라 복원된다.

$$\begin{cases} \text{if } I, Q < -4d \text{ then } i_2, q_2 = 1 \\ \text{if } -4d \leq I, Q < 4d \text{ then } i_2, q_2 = 0 \\ \text{if } I, Q \geq 4d \text{ then } i_2, q_2 = 1 \end{cases} \quad (12)$$

여기서 $d = \sqrt{\frac{E_b}{7}}$ 이며 식(2)에 주어져 있다. 이 경우 각 성분의 두 번째 비트가 오류가 될 확률은

$$P_b(2) = \frac{1}{8} \left[2\text{erfc}\left\{\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + 2\text{erfc}\left\{3\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + \text{erfc}\left\{5\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + \text{erfc}\left\{7\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} - \text{erfc}\left\{9\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} - \text{erfc}\left\{11\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} \right] \quad (13)$$

이다.

경우 III에 대하여, $-6d, -2d, 2d$ 와 $6d$ 가 결정 경계로 주어지며 각 성분의 마지막 세 번째 비트 i_3, q_3 는 다음 규칙에 따라 복원된다.

$$\begin{cases} \text{if } I, Q < -6d \text{ then } i_3, q_3 = 1 \\ \text{if } -6d \leq I, Q < -2d \text{ then } i_3, q_3 = 0 \\ \text{if } -2d \leq I, Q < 2d \text{ then } i_3, q_3 = 1 \\ \text{if } 2d \leq I, Q < 6d \text{ then } i_3, q_3 = 0 \\ \text{if } 6d \leq I, Q \text{ then } i_3, q_3 = 1 \end{cases} \quad (14)$$

따라서, 각 성분의 세 번째 비트가 오류가 될 확률은

$$P_b(3) = \frac{1}{8} \left[4\text{erfc}\left\{\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + 3\text{erfc}\left\{3\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} - 3\text{erfc}\left\{5\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} - 2\text{erfc}\left\{7\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + 2\text{erfc}\left\{9\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} + \text{erfc}\left\{11\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} - \text{erfc}\left\{13\sqrt{\frac{\gamma}{7}}\right\} \right] \quad (15)$$

가 된다. 최종적으로 정방형 64-QAM 신호의 평균 비트 오류 확률은 위의 식 (11), 식 (13), 식(15)를 평균함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_b = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 P_b(k) \quad (16)$$

3. 256-QAM에서의 BER

정방형 256-QAM의 각 심볼은 8비트로 이루어진다. 동상 성분으로 i_1, i_2, i_3, i_4 직교 성분으로 q_1, q_2, q_3, q_4 비트로 이루어지며 서로 인터리빙되어 $i_1, q_1, i_2, q_2, i_3, q_3, i_4, q_4$ 의 8비트가 하나의 심볼을 이루게 된

다. 위와 같은 규칙을 적용하여 정방형 256-QAM 신호의 평균 비트 오류 확률을 구하면 다음과 같다^[1].

$$P_b = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 P_b(k) \quad (17)$$

여기서,

$$P_b(1) = \frac{1}{16} \left[\operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 3\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 5\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 7\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 9\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 11\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 13\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 15\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} \right] \quad (18)$$

$$P_b(2) = \frac{1}{16} \left[2\operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 2\operatorname{erfc} \left\{ 3\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 2\operatorname{erfc} \left\{ 5\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 2\operatorname{erfc} \left\{ 7\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 9\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 11\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 13\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 15\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ 17\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ 19\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ 21\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ 23\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} \right] \quad (19)$$

$$P_b(3) = \frac{1}{16} \left[4\operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 4\operatorname{erfc} \left\{ 3\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 3\operatorname{erfc} \left\{ 5\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 3\operatorname{erfc} \left\{ 7\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 3\operatorname{erfc} \left\{ 9\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 3\operatorname{erfc} \left\{ 11\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 2\operatorname{erfc} \left\{ 13\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 2\operatorname{erfc} \left\{ 15\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 2\operatorname{erfc} \left\{ 17\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 2\operatorname{erfc} \left\{ 19\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 21\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 23\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ 25\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ 27\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} \right] \quad (20)$$

$$P_b(4) = \frac{1}{16} \left[8\operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 7\operatorname{erfc} \left\{ 3\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 7\operatorname{erfc} \left\{ 5\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 6\operatorname{erfc} \left\{ 7\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 6\operatorname{erfc} \left\{ 9\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 5\operatorname{erfc} \left\{ 11\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 5\operatorname{erfc} \left\{ 13\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 4\operatorname{erfc} \left\{ 15\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 4\operatorname{erfc} \left\{ 17\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 3\operatorname{erfc} \left\{ 19\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 3\operatorname{erfc} \left\{ 21\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - 2\operatorname{erfc} \left\{ 23\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + 2\operatorname{erfc} \left\{ 25\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 27\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ 29\sqrt{\frac{4\gamma}{85}} \right\} \right] \quad (21)$$

이다. 각각 첫 번째 비트, 두 번째 비트, 세 번째 비트, 네 번째 비트가 오류가 될 확률이다.

IV. M진 직교 진폭 변조 신호의 일반화된 BER 표현식

M진 직교 진폭 변조 신호의 일반화된 BER은 그래

이 부호화의 비트 배치의 규칙성에 기초를 둔다. 여기서 간단히 진폭 변조 신호에 대해 설명을 하고자 한다. N진 진폭 변조 신호에 대한 신호 배치도는 다음과 같다.

	좌측 평면 신호	우측 평면 신호
2-PAM	1	0
4-PAM	11, 10	00, 01
8-PAM	111, 110, 100, 101	000, 010, 011
16-PAM	1111, 1110, 1100, 1000, 1001, 1010, 1011, 1000, 0000, 0001, 0100, 0101, 0110, 0111	
:

위의 비트 배치도에서 진폭 변조 신호의 첫 번째 비트를 도시하면 다음과 같다.

	좌측 평면 신호							
2-PAM								1
4-PAM							1	1
8-PAM					1	1	1	1
16-PAM	1	1	1	1	1	1	1	1
:	...							

진폭 변조 신호의 두 번째 비트는 다음과 같다.

	좌측 평면 신호							
4-PAM							1	0
8-PAM					1	1	0	0
16-PAM	1	1	1	1	0	0	0	0
:	...							

진폭 변조 신호의 세 번째 비트는 다음과 같다.

	좌측 평면 신호															
8-PAM							1	(()						
16-PAM					1	1	(((())				
32-PAM	1	1	1	1	(((((((1))))
:	...															

그리고, 다음은 진폭 변조 신호의 마지막 비트의 신호 배치도이다.

	좌측 평면 신호	우측 평면 신호
2-PAM	1	0
4-PAM	1, 0	0, 1
8-PAM	1, 0, 0, 1	1, 0, 0, 1
16-PAM	1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1	1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1
:

표 1. BER 유도의 규칙성
Table 1. BER Derivation Regularity.

M	k [in P _b (k)]	X [식 (22)]	Y [식 (22)]	No. of X
4	1	1	1	1
16	1	1,1	1,3	2
	2	2, 1, -1	1,3,5	3
64	1	1,1,1,1	1,3,5,7	4
	2	2,2, 1,1, -1,-1	1,3,5,7,9,11	6
	3	4, 3, -3, -2, 2, 1, -1	1,3,5,7,9,11,13	7
256	1	1,1,1,1,1,1,1,1	1,3,5,7,9,11,13,15	8
	2	2,2,2,2, 1,1,1,1, -1,-1,-1,-1	1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23	12
	3	4,4, 3,3, -3,-3, -2,-2, 2,2, 1,1, -1,-1	1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27	14
	4	8, 7, -7, -6, 6, 5, -5, -4, 4, 3, -3, -2, 2, 1, -1	1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29	15
1024	1	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31	16
	2	2,2,2,2,2,2,2, 1,1,1,1,1,1,1,1, -1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1	1,3,5,7,9,11,13,15,17,19, ... 41,43,45,47	24
	3	4,4,4,4, 3,3,3,3, -3,-3,-3,-3, -2,-2,-2,-2, 2,2,2,2, 1,1,1,1, -1,-1,-1,-1	1,3,5,7,9,11,13,15,17,19, ... 49,51,53,55	28
	4	8,8, 7,7, -7,-7, -6,-6, 6,6, 5,5, -5,-5, -4,-4, 4,4, 3,3, -3,-3, -2,-2, 2,2, 1,1, -1,-1	1,3,5,7,9,11,13,15,17,19, ... 53,55,57,59	30
	5	16,15,-15,-14,14,13,-13,-12,12,11,-11,-10,10,9,-9,-8,8,7,-7,-6,6,5,-5,-4,4,3,-3,-2,2,1,-1	1,3,5,7,9,11,13,15,17,19, ... 55,57,59,61	31
M	1	1,1,1,...,1,1	1,3,5,7,..., 2($\frac{\sqrt{M}}{2}-1$)+1	$\frac{\sqrt{M}}{2}$
	2	2,2,2,...,2,2, 1,1,1,...,1,1, -1,-1,-1,...,-1,-1	1,3,5,7,..., 2($\frac{3\sqrt{M}}{4}-1$)+1	$\frac{\sqrt{M}}{4} \times 3$
	3	4,4,...,4, 3,3,...,3, -3,-3,...,-3, -2,-2,...,-2, 2,2,...,2, 1,1,...,1, -1,-1,...,-1	1,3,5,7,..., 2($\frac{7\sqrt{M}}{8}-1$)+1	$\frac{\sqrt{M}}{8} \times 7$
	4	8,8,...,8, 7,7,...,7, -7,-7,...,-7, -6,-6,...,-6, 6,6,...,6, -2,-2,...,-2, 2,2,...,2, 1,1,...,1, -1,-1,...,-1	1,3,5,7,..., 2($\frac{15\sqrt{M}}{16}-1$)+1	$\frac{\sqrt{M}}{16} \times 15$
	$\log_2 \sqrt{M}$	$\frac{\sqrt{M}}{2}, (-\frac{\sqrt{M}}{2}-1), (-\frac{\sqrt{M}}{2}-1), (-\frac{\sqrt{M}}{2}-2), (-\frac{\sqrt{M}}{2}-2), (-\frac{\sqrt{M}}{2}-3), (-\frac{\sqrt{M}}{2}-3), \dots, -2,2,1,-1$	1,3,5,7,..., 2($\sqrt{M}-1-1$)+1	$\frac{\sqrt{M}}{2}-1$

위에 보듯이 N진 진폭 변조 신호의 N의 값이 두 배로 증가함에 따라 마지막 비트를 제외한 k(k = 1, 2, 3, ..., log₂√N-1) 번째 비트는 각각 한 비트씩 반복되고 있다. 그리고, 마지막 비트 (log₂√N)는 N이 2일 때를 제외하고 특정 시퀀스(1001)가 반복된다.

M진 직교 진폭 신호의 동상 성분과 직교 성분의 k 번째 비트가 오류가 될 확률 P_b(k)는 다음과 같이 얻어진다.

$$P_b(k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum X \cdot \text{erfc} \left\{ Y \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right\} \quad (22)$$

먼저 k = 1일 때, 변수 X는 항상 1이며 M = 2^N에서 변수 Z는 M = 2^{N-2}에서 변수 Z의 두 배이다. 또한 k = log₂√M 일 때, 변수 X는 $\frac{\sqrt{M}}{2}$ 부터 시작하여 다음에 그 값이 하나 감소하며 (절대값으로) 그 다음에는 부호가 바뀌면서 변수 X가 -1이 될 때까지 진행되는 시퀀스를 가지며 변수 Z는 √M-1이 된다. 다른 k(k = 2, 3, ..., log₂√M-2) 값일 때, M = 2^N에

서 변수 X는 M = 2^{N-2}에서 변수 X의 하나씩 반복되는 시퀀스를 가지며 M = 2^N에서 변수 Z는 M = 2^{N-2}에서 변수 Z의 두 배이다. 표 1에는 이런 규칙성을 정리되어 있다.

이러한 규칙성은 그레이 부호화에 기인한 것이다. 그레이 부호화된 M진 정방형 직교 진폭 변조 신호의 평균 비트 오류 확률을 구하면 다음과 같다^[10].

$$P_b = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} P_b(k) \quad (23)$$

여기서

$$P_b(k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} (-1)^{\lfloor \frac{j \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} \rfloor} \left\{ 2^{k-1} - \lfloor \frac{j \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \rfloor \right\} \cdot \text{erfc} \left\{ (2j+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right\} \quad (24)$$

으로 각각 동상 성분과 직교 성분의 k(k = 1, 2, 3, ..., log₂√M) 번째 비트가 오류가 될 확률이다. 식 (24)에서 ⌊x⌋는 x보다 크지 않는 최대 정수이다. 그럼

3에는 식 (23)로부터 신호대 잡음비에 따른 $M = 4, 16, 64, 256, 1024$ 일 때 직교 진폭 변조 신호의 BER 성능을 나타내고 있다.

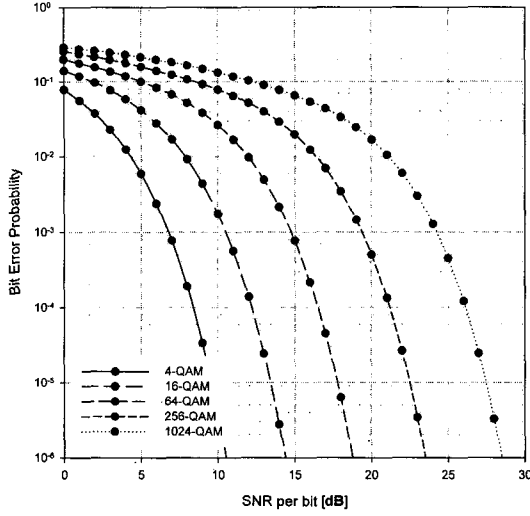


그림 3. M진 직교 진폭 변조 신호의 BER
Fig. 3. BER of M-ary square QAM.

식 (23)에서 $M = 4$ 이면 일반적인 QPSK 신호의 비트 오류 확률식이 된다.

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad (25)$$

$(1-2^{-k})\sqrt{M-1} \sum_{j=0}^{j \cdot 2^{k-1}} (-1)^{\lfloor \frac{j \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} \rfloor} \left\{ 2^{k-1} - \lfloor \frac{j \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \rfloor \right\}$
 $\approx \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}-1} 2^{k-1}, \quad k=1, \dots, \log_2 \sqrt{M}$ 이라면, 식 (23)은 다음과 같은 결과를 얻는다 [3, (18)].

$$P_b = \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{j=0}^{\frac{\sqrt{M}-1}{2}} \operatorname{erfc} \left\{ (2j+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right\} \quad (26)$$

신호대 잡음비가 높을 때 식 (24)에서 첫 번째 항($j = 0$)이 결과식에 지배적이고 나머지 항의 값을 무시되므로 다음의 근사식을 얻을 수 있다.

$$P_b \approx \frac{1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} 2^{k-1} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right\} \quad (27)$$

$$= \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right\}$$

식 (27)은 참고문헌 [3, (18), when $i = 1$], [4, (13)],

[8, (7.24)], [9, (11.46a)]의 결과식과 같다.

그리고 식 (24)에서 첫 번째와 두 번째 항($j = 0, 1$)을 고려한다면, 다음과 같은 근사식이 된다 [4, (16)].

$$P_b = \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right\} + \frac{\sqrt{M}-2}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left\{ 3 \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right\} \quad (28)$$

그림 4에서 본 논문에서 유도한 결과식과 근사식 (27)과 (28)에 대한 BER 성능 비교를 나타낸다.

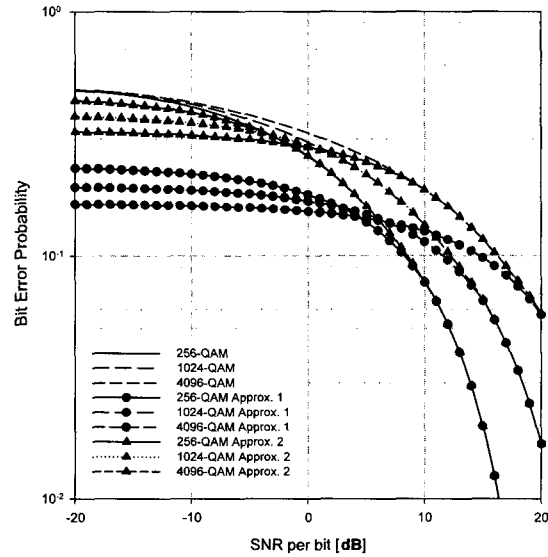


그림 4. BER 성능 비교
Fig. 4. BER performance comparisons.

V. 결론

이 논문에서는 가산성 백색 가우시안 잡음 환경에서 그레이 부호화된 정방형 M진 직교 진폭 변조 신호의 일반화된 비트 오류 확률식을 유도하고 분석하였다. M이 16, 64, 256 일 때의 직교 진폭 변조 신호의 비트 오류 확률식 결과들로부터 유도 과정의 규칙성을 찾아내고 그 규칙성들로부터 임의의 M에 대하여 일반화된 비트 오류 확률 표현식을 유도하고 분석하였다. 이 논문에서 표현한 결과식은 임의의 M에 대한 직교 진폭 변조 신호의 비트 오류 확률 계산을 편리하게 계산할 수 있게 하여 주며, 충분히 일반적이다. 또한, M진 직교 진폭 변조는 독립된 \sqrt{M} 진 진폭 변조가 각각 동상 채널과 직교 채널로 전달되는 것으로 해석할 수 있으

므로 이 논문에서 유도한 식으로부터 \sqrt{M} 진 진폭 변조(PAM) 신호에 대한 일반화된 BER 표현식도 쉽게 구할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] L. Hanzo, W. Webb, and T. Keller, *Single- and Multi-Carrier Quadrature Amplitude Modulation*, John Wiley & Sons, 2000.
- [2] M. P. Fitz and J. P. Seymour, "On the Bit Error Probability of QAM Modulation," *International Journal of Wireless Information Networks*, vol. 1, no. 2, pp.131-139, 1994.
- [3] J. J. Lu, K. B. Letaief, J. C-I Chuang, and M. L. Liou, "M-PSK and M-QAM BER Computation Using Signal-Space Concepts," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp.181-184, Feb. 1999.
- [4] L. Yang and L. Hanzo, A Recursive Algorithm for the Error Probability Evaluation of M-ary QAM, *IEEE Comm. Letters*, vol.4, No.10, pp. 304-306, Oct. 2000.
- [5] W. J. Weber, III, "Differential Encoding for Multiple Amplitude and Phase Shift Keying Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 26, pp. 385-391, March 1978.
- [6] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic, 1980.
- [7] M. K. Simon, S. M. Hinedi and W. C. Lindsey, *Digital Communication Techniques*, Prentice-Hall, 1995.
- [8] B. Sklar, *Digital Communications*, Prentice-Hall, 1988.
- [9] I. A. Glover and P. M. Grant, *Digital Communications: 2nd Edition*, Prentice-Hall, 2001.
- [10] D. Yoon, K. Cho, and J. Lee, "Bit Error Probability on M-ary Quadrature Amplitude Modulation", *IEEE VTC Fall 2000*.

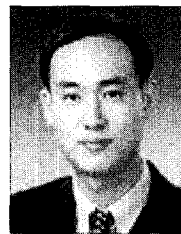
저 자 소 개



趙慶國(正會員)

1995년 한양대학교 전자통신공학과 졸업(공학사). 1997년 한양대학교 전자통신공학과 졸업(공학석사). 1997년~2000년 LG정보통신 이동통신연구소 근무. 2000년~현재 LG전자 차세대통신연구소 근무. 관심분야:

CDMA Modem, ASIC, 무선통신



尹東源(正會員)

1989년 한양대학교 전자통신공학과 졸업(공학사). 1992년 한양대학교 전자통신공학과 졸업(공학석사). 1995년 한양대학교 전자통신공학과 졸업(공학박사). 1995년~1997년 동서대학교 정보통신공학과 전임강사.

2001년~현재 펜실베이니아주립대 연구교수. 1997년~현재 대전대학교 컴퓨터정보통신공학부 조교수. 관심분야: 무선통신, 이동통신, 디지털통신 시스템