

구조용 강재의 반복소성모델 분석 연구

State of the Art of the Cyclic Plasticity Models of Structural Steel

이 은 태¹⁾

Lee, Eun Taik

요 약 : 소성이론의 연구방향은 일반적으로 두 가지 대별된다. 첫 째는 강재의 소성변형을 적절하게 나타내는 응력-변형도 관계를 정립하는 것이고, 둘째는 위의 과정을 이용한 기법을 개발하고 구조물을 설계하는 것이다. 소성이론을 연구하는데 한 가지 중요한 문제는 복잡한 하중이력에 대하여 소성영역에서 경화재료의 거동을 묘사하는 것이다. 또한, 구조물이 강한 지진이나 바람하중을 받을 경우, 비례하중보다는 복잡한 불비례하중에 의하여 영향을 받는다. 따라서 소성이론과 강재의 소성거동에 대한 연구는 불비례하중의 거동과 영향을 나타낼 수 있어야한다. 지금까지 많은 연구자들이 이 분야에서 이론을 발표하였고, 지금도 계속하여 새로운 소성모델 연구를 하고 있다. 본 논문은 지금까지 가장 많이 쓰이고 있는 소성모델을 two-surface 소성모델을 중심으로 분석하고 각 소성모델의 특징과 문제점을 파악하였고, 앞으로의 연구과제를 제안하였다.

ABSTRACT : The task of plastic theory is twofold: first, to set up relationships between stress and strain that adequately describe the observed plastic deformation of metals, and second, to develop techniques for using these relationships in studying of the mechanics of metal forming processes, and the analysis and design of structures. One of the major problems in the theory of plasticity is to describe the behavior of work-hardening materials in the plastic range for complex loading histories. This can be achieved by formulating constitutive laws either in the integral or differential forms. To adequately predict the response of steel members during cyclic loading, the hardening rule must account for the features of cyclic stress-strain behavior. Neither of the basic isotropic and kinematic hardening rules is suitable for describing cyclic stress-strain behavior, although a kinematic hardening rule describes the nearly linear portions of the stabilized hysteresis loops. There is also a limited expansion of the yield surface as predicted by the isotropic hardening rule.

Strong ground motions or wind gusts affect the complex and nonproportional loading histories in the inelastic behavior of structures rather than the proportional loading. Nonproportional loading is defined as externally applied forces on the structure, with variable ratios during the entire loading history. This also includes the rate of time-dependency of the loads. For nonproportional loading histories, unloading may take place along a chord instead of the radius of the load surface. In such cases, the shape of the stress-strain curve has to be determined experimentally for all non-radial loading conditions.

The plasticity models including two surface models are surveyed based on a yield surface and a bound surface that represent a state of maximum stress. This paper is concerned with the improvement of a plasticity models of the two-surface type for structural steel. This is followed by an overview of plasticity models on structural steel. Finally the need for further research is identified.

핵심용어 : 강재, 반복하중, 불비례하중, 항복조건, 경화법칙, 반복소성모델

KEYWORDS : steel, cyclic loading, nonproportional loading, yield criterion, hardening rule, cyclic plasticity model

1. 서론

강구조물은 때때로 소성한지의 연성을 통하여 붕괴 없이 심각한 지진을 견디도록 설계된다. 일반적으로 구조물의 반복

거동을 모델화하는 데에는 다음과 같은 세 가지의 방법이 사용된다: (1) fiber-element 방법; (2) discrete-segment 방법; (3) finite-element 방법이다.

지금까지 많은 연구자들이 구조용 강재의 비선형거동을 설

1) 정희원, 중앙대학교 공과대학 건축학과 조교수, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 2003년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

명하기 위하여 연구해 왔다. 그러나, 제안된 소성 모델들이 단축, 비례하중상태에 대해 집중되어 있다. 이 모델들은 해석의 단순화와 편리를 위해 응력-변형도 관계를 다중직선(multi-linear)이나 지수형으로 나타낸 모델들이다. 그러나, 이 모델들은 계속된 반복하중 시 소성거동을 정확히 설명하지 못했다. 따라서, 이러한 모델들은 다축하중과 불비례하중(nonproportional loading), 예를 들면 심한 바람이나 지진과 같이 소성역에까지 영향을 미치는 하중상태에서의 거동을 예측할 수 없었다. 이러한 문제점으로 말미암아 새로운 소성 모델들이 발전하기 시작했다.

소성모델은 소성화 과정의 경화법칙에 의해 각각 구분되는데, Hodge⁽¹⁵⁾에 의해 처음 제안된 등방경화법칙(isotropic hardening rule)의 경우에는 초기항복점과 재하(unloading) 때의 항복점이 같다고 제안하고 있다. 그러나 이 법칙은 실제 재하실험 결과와 많은 오차가 있다. Prager⁽⁴¹⁾에 의해 제안된 이동경화법칙(kinematic hardening rule)은 바우싱거 효과를 나타낼 수 있는데 이는 이중직선 응력-변형도곡선에 기초하고 있다⁽⁶⁾. 그리고 이 이동경화법칙은 Ziegler⁽⁵⁰⁾, Eisenberg & Phillips⁽¹¹⁾, Baltov & Sawczuk⁽²⁾ 등에 의해 발전되었다. 또한, Rashid⁽⁴³⁾는 변수를 갖는 비선형 경화법칙을 이력에 종속적이고 항복면 이동의 함수라는 것으로 이론을 향상시켰다.

Mroz⁽³²⁾⁽³³⁾는 응력장에서 소성변형이 몇 개의 면(surface)으로 표현되는 work-hardening 계수 장(field)의 개념을 도입했다. 그리고 Krieg⁽²¹⁾, Dafalias & Popov⁽⁹⁾ 등이 Mroz⁽³³⁾가 제안한 면을 경계면(bound surface)과 재하면(loading surface)으로 발전시켰다. 또한, Tseng & Lee⁽⁴⁷⁾는 비선형 거동에 대해 항복면(yield surface)과 기억면(memory surface)을 제안하며 two surface 모델이론을 발표하였다. 이 two surface 모델은 Chang & Lee⁽⁵⁾의 2축 반복 불비례하중 상태에서의 실험결과와 비교되어 상당한 일치성을 보였다.

반복하중 상태에서의 소성모델은 많은 연구자들이 지금도 연구를 하여 건물과 강구조 재료의 실제 거동에 맞는 모델을 찾는데 많은 노력을 하고 있다(Yang 등⁽⁴⁹⁾). Mizuno, Tanaka, Usami⁽³¹⁾는 Dafalias-Popov two-surface 모델을, 탄성범위의 감소, bounding lines의 이동, 반복하중동안에 yield plateau의 감소와 없어짐, 새로 정의된 형상계수, memory lines, virtual bounding lines 등을 소개하면서, yield plateau를 갖는 단축반복 응력-변형도 거동을 정확하게 예측할 수 있는 모델로 확장시켰다. Voyiadis & Kattan⁽⁴⁸⁾은 Tseng-Lee 모델과 비슷한 Eulerian reference 시스템에서 유한변형에 대한 반복소성이론을 만들

었다. 또한, Klisinski⁽¹⁹⁾는 fuzzy sets 이론에 바탕을 둔 서로 다른 재료들의 반복하중의 거동을 나타내는 일반적인 이론을 소개하였다. 두 개나 그 이상의 항복이나 경계면을 이용하는 대신에, 한 개의 일반면(general surface)이 응력과 함께하는 함수에 의해 span된 장에서 소개되었다. Shen⁽⁴⁵⁾ 등은 경계선(bounding line)에 따른 yield plateau와 경계선의 각도에 따른 새로운 개념을 도입·연구하였다. 또한, Ling⁽²⁴⁾ 등은 합성보강재에 대한 bounding surface 모델을 연구하여, 최근에는 two-surface 개념이 다른 재료에 적용되고 있음을 알 수 있다.

본 논문에서는 강구조 재료의 소성상태(비선형 거동)에 대하여 알아보고, 지진하중이나 풍하중과 같이 다축 반복 불비례하중에서의 구조용 강재의 거동에 대한 소성모델들을 two-surface 모델을 중심으로 분석하고자 한다.

2. 소성이론

소성이론의 연구는 크게 두 가지로 대별되는데, 첫 째는 강재의 소성변형을 알맞게 나타내는 응력과 변형도간의 관계식을 세우는 것이고, 또 하나는 그러한 관계식을 이용하여 구조물의 해석과 설계를 위한 기법을 개발하는 것이다.

소성이론에서의 중요한 문제중의 하나는 복잡한 하중이력에 대하여 소성범위에서 경화재료의 거동을 나타내는 것이다. 이것은 미분이나 적분의 형태로 구성요소법칙(constitutive law)을 세움으로서 해결할 수 있다. 부과된 하중이나 변형이력에 대한 재료의 응답은 증가하는 거동을 적분함으로서 얻어질 수 있다. 또한, 재료의 거동을 나타내기 위해서는, 소성 흐름의 법칙이외에 경화법칙(work-hardening rule)이 필요하다.

일반적인 소성이론에 대한 기본원리들은 Hill⁽¹⁴⁾, Calladine⁽⁴⁾, Chen & Han⁽⁶⁾, Malvern⁽²⁵⁾에 의한 저서에서 찾아볼 수 있다.

2.1 항복조건

항복조건은 조합된 응력상태에서 재료의 탄성한계를 정의한다. 일반적으로, 탄성한계나 항복응력은 응력 σ_y 의 함수이다. 항복조건은 응력의 조합상태에서 단순 탄성과 소성거동을 분리해서 생각할 수 있고, 응력장(stress space)에서 하나의 면(surface)으로 나타낼 수 있다.

일반적으로, 연구결과로부터 등방(isotropic)재료의 초기 항복면(yield surface)은 von Mises와 Tresca 면 사이에 있다는 것을 알 수 있다. 대부분의 강재에서는 von Mises

항복조건이 Tresca 항복조건보다 더 정확하고 사용하기에 유리하다고 알려져 왔다.

von Mises 항복조건을 단순한 형태로 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (1)$$

여기서, $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk}\delta_{ij}$ 는 stress deviator tensor의 불변량이고, k 는 단순인장이나 압축에서의 항복응력이다. 또한 Tresca 항복조건은 다음과 같다.

$$\text{Max}\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) = k \quad (2)$$

여기서, 재료상수 k 는 단순 인장실험으로부터 결정된다. 그리고, $k = \sigma_0/2$ 이다. 또한, σ_0 는 단순 인장에서의 항복응력이다.

항복조건에 대한 자세한 기술은 참고문헌 김덕재·이은택⁽¹⁾, Phillips & Lee⁽³⁴⁾, Yang⁽⁴⁹⁾ 등에 자세히 소개되어있다.

2.2 소성흐름의 법칙(flow rule)

항복조건은 소성흐름의 시작에서 응력들의 위험한 조합상태를 나타낸다. 그러나, 법칙은 재료의 소성흐름을 응력-변형도 관계로 나타낸다. 일반적으로 이것을 소성흐름의 법칙이라고 하고, 소성흐름의 법칙은 소성변형이나 소성흐름을 나타내는데 필요한 가정이다. 그것은 소성변형도 증가 텐서들의 비율이나 상대적 크기를 나타낸다. 소성흐름의 법칙은 응력증가 요소에 대한 소성변형도에서의 증가량과 관계가 있다. 그러므로, 소성흐름의 법칙은 변형도 장에서 소성변형도 증가벡터의 방향을 정의한다(Chen & Han⁽⁶⁾).

2.3 경화법칙(hardening rule)

경화법칙은 이어지는 항복면의 진전상황을 나타낸다. 근본적으로 경화법칙은 두 가지로 이루어지는데, 첫 째, 경화법칙은 임의의 하중이력에서 한 점에서의 재료의 변형도경화를 나타낸다. 둘째, 경화법칙은 이동(transition), 변형(distortion), 축소(contraction) 등과 같은 항복면의 변동을 나타낸다. 탄성-완전소성 재료에서, 항복함수는 항복이 시작된 후에 변하지 않는다. 그러나, 변형도경화 재료에서는, 항복함수가 항복이 진행됨에 따라 변한다. 경화법칙은 응력과 변형도 이력에

대한 항복함수에서의 변화(예를 들면, 항복면의 크기, 모양, 위치의 변화)와 관계가 있다.

재료에 경화가 없을 때, 재료는 완전소성으로 거동한다. 그 때의 항복면은 다음과 같이 나타낸다.

$$f(J_i, k) = f(J_i) - k = 0 \quad (3)$$

여기서, f 는 응력 불변량의 함수이고 k 는 상수이다. 항복면의 모양, 크기, 방향은 소성동안에 변하지 않고 유지된다.

2.3.1 등방경화법칙(isotropic hardening rule)

등방경화법칙은 Hill⁽¹⁴⁾과 Hodge⁽¹⁵⁾에 의해 제안되었다. 등방경화 동안에, 초기항복면은 소성흐름이 발생함에 따라 항복면의 모양과 중심이 변하지 않으면서 균등하게 확장한다. 초기 항복면은 초기항복이 발생할 때 응력상태의 자취(locus)로서 정의된다. 등방경화는, 재하면이 균등하게 확장하기 때문에, 대부분의 구조용 강재에서 나타나는 바우싱거 효과를 완전히 무시하고 있다. 등방경화법칙의 항복면은 다음과 같이 표현된다.

$$f(J_i, I) = f(J_i) - k(I) = 0 \quad (4)$$

여기서, f 는 응력 불변량 J_i 의 함수이고 k 는 소성변형도의 불변량 I 와 같은 매개변수의 함수이다(그림 1. 참조).

2.3.2 이동경화법칙(kinematic hardening rule)

이동경화법칙(Prager⁽⁴¹⁾)은, 소성변형 동안에, 초기항복면의 크기, 모양, 방향을 유지하면서 항복면이 응력장에서 강성체(rigid body)처럼 이동한다. 따라서, 이동경화는 전체 이력에서 바우싱거 효과를 나타낼 수 있다. Prager의 이동경화법칙은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, k) = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0 \quad (5)$$

여기서, α_{ij} 는 항복면의 전체 이동을 나타내고, k 는 항복면의 크기이다(그림 1. 참조).

이동경화법칙은 Ziegler⁽⁵⁰⁾, Kadashevich & Novozhilov⁽¹⁸⁾, Eisenberg & Phillips⁽¹¹⁾, Rashid⁽⁴³⁾, Baltov & Sawczuk⁽²⁾ 등에 의해 더욱 발전되고 복잡한 형태로 발전되었다.

2.3.3 등방-이동경화법칙(isotropic-kinematic hardening rule)

Hodge⁽¹⁶⁾는 등방경화와 이동경화의 조합된 경화법칙을 제안하였다. 이 경우에는, 항복면이 응력장에서 이동과 균등한 팽창을 한다. 이 등방-이동 경화법칙은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, k) = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0 \quad (6)$$

여기서, k 는 항복면의 크기이고, α_{ij} 는 항복면의 중심이다. 식(6)의 방정식은 k 가 상수일 때 이동경화로 되고, $\alpha_{ij} = 0$ 일 때 등방경화가 된다.

위의 모든 경화법칙은 그림 1.에 나타나 있다.

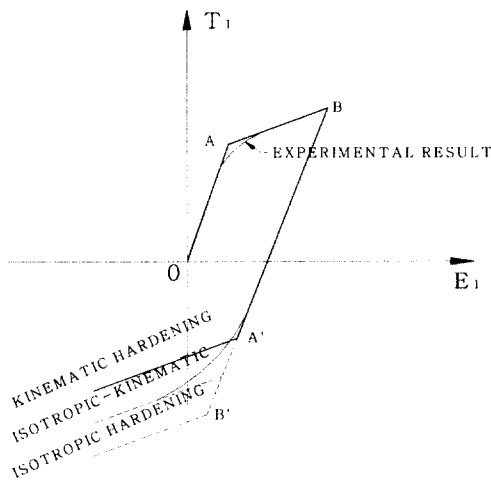


그림 1. 경화법칙

3. 반복소성모델(Cyclic Plasticity Model)

반복하중 동안에 강구조 부재의 반응을 정확하고 적절하게 예측하기 위하여 2장에서 기술한 경화법칙은 반복 응력-변형도 거동의 모양을 설명해야한다. 비록 이동경화법칙이 안정된 이력곡선의 거의 선형적인 부분을 잘 묘사해주고, 등방경화법칙에 의해 예측된 것처럼 항복면의 제한적 확장이 있다 하더라도, 등방경화법칙과 이동경화법칙은 반복 응력-변형도 거동을 예측하는데 적절하다.

강재의 반복 응력-변형도 거동에 대한 실험적 연구는 관찰된 이력거동을 가장 잘 나타내기 위하여 선택된 파라미터의 수단으로 메모리효과를 설명하는 다양한 곡선의 모델을 형성하게 한다. 더 일반적인 하중이력에 대한 이력곡선특성의 모양에 대한 주의는, 축적된 소성변형도나 이전 사이클에서의

소성변형도에 근거한 더 단순화된 이력법칙들은 관찰된 거동을 완전히 묘사하는데 적당하지 않다는 것을 보여준다. 고정된 변형도 한도간의 사이클링에 대한 이러한 실험결과들로부터의 근본적인 관찰은 많은 사이클(변형도 진폭(amplitude)과 함께 감소하는) 이후의 안정된 이력곡선이고, 한도가 변할 때마다 이력곡선이 다시 안정될 때까지 또 다른 전이된 사이클 단계가 있다는 것이다.

일축반복하중을 받는 동안에, 다음과 같은 현상들이 관찰되었다(Cofie⁽⁷⁾).

- ① 구조용강재의 반복 응력-변형도 곡선은 유일하고 이전의 이력과는 독립적이다.
- ② 평균응력들은 변형도 크기에만 의존하는 안정응력의 값에 영향을 미치지 않는다.
- ③ 반복경화는 반복연화와 평균응력의 감소보다 훨씬 빠른 속도로 발생한다.
- ④ 반복 응력-변형도 거동은 fading memory에 의해서 지배된다. 응력-변형도 이력에 대한 가장 큰 영향은, 특히 큰 변형도의 거동일 경우, 가장 최근의 반복거동으로부터 온다.
- ⑤ 응력-변형도 반복거동은 비선형 부분이 비대칭적으로(asymptotically) 접근하는 직선 경계(bound)를 나타낸다. 이러한 직선 경계들은 대략적으로 서로 평행하다.

아래에 기술되는 모델들은 재료의 반복 혹은 단축 반복거동을 나타낼 수 있다. 등방경화나 이동경화 소성의 전통적인 모델들은 단순화되어있고 단순하중 이력에 대해서는 모델화 작업이 비교적 수월하다. 그러나, 소성범위에서의 반복하중과 같은 복잡한 하중에 대해서는 이러한 모델들은 실험에 의하여 관찰된 거동들을 나타낼 수 없다. 아래에서 기술될 Dafalias & Popov^{(8),(9)} 그리고 Krieg⁽²¹⁾에 의해서 제안된 bounding surface 이론은 재료의 반복거동을 설명하기 위한 전통적인 흐름이론을 일반화하기 위한 시도이다. 또한, Tseng & Lee⁽⁴⁷⁾ 그리고 Chang & Lee⁽⁵⁾는 바깥쪽 "memory" surface는 재료의 memory의 nonfading 부분을 나타내는 최대응력을 가지고 등방적으로 확장한다는 또 다른 two-surface 모델을 제안하였다.

3.1 Masing 모델

Masing 모델^{(12),(13)}은 기본적으로 일련의 탄성-소성 직선들로 구성된 모델이다. 소성거동 곡선은 소성요소의 직선거동에 추가적으로 더해짐으로서 구할 수 있다. 이 모델은 재료

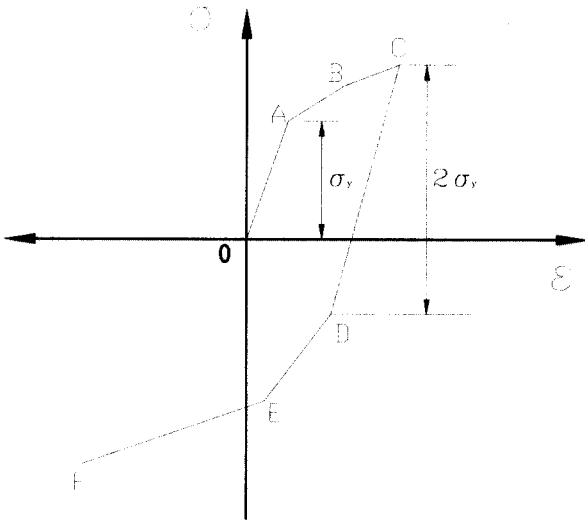


그림 2. Masing 모델

의 반복거동에 대한 이력곡선을 알지 못할 때, 그 재료의 이력곡선을 쉽게 나타낼 수 있는 장점이 있다. 그러나, 이 모델은 다양한 반복하중상태의 거동을 나타낼 수가 없다는 단점이 있다. Masing 모델은 그림 2에 나타나 있다.

3.2 Ramberg-Osgood 모델

Ramberg-Osgood 모델⁽⁴²⁾은 이 모델의 다양한 적용성 때문에 재료의 이력곡선을 나타내는데 있어서 가장 일반적으로 사용되는 모델 중 하나다. 이 모델은 기본적으로 수학적 모델이고 다양한 파라미터의 값들이 실험결과로부터 결정되기 때문에, 다양한 모양의 곡선을 얻을 수 있다. 이 모델의 파라미터들은 항복변형도 ϵ_y , 항복응력 σ_y , 그리고 경화지

수(hardening exponent) γ 이다. Ramberg-Osgood 모델의 식은 다음과 같다.

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^{r-1} \right] \quad (7)$$

또한, 이력곡선은 마지막 변형도가 역전되는 것으로부터 나타낼 수 있다. 그리고, 하나의 요소에 의해 확대된 곡선을 나타내는 것이 가능하다. 예를 들어, 식(7)은 식(8)과 같이 변환될 수 있다. 이 모델이 그림 3에 나타나 있다.

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_y} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_y} \left[1 + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_y} \right)^{r-1} \right] \quad (8)$$

여기서, $\bar{\epsilon} = \epsilon - \epsilon_r / 2\epsilon_y$

$\bar{\sigma} = \sigma - \sigma_r / 2\sigma_y$

$\epsilon_r =$ 마지막 변형도 역전에서의 변형도

$\sigma_r =$ 마지막 변형도 역전에서의 응력

3.3 α - β 모델

구조용 강재의 소성거동을 나타내는데 Masing 모델을 향상시키기 위하여, Santhanam⁽⁴⁴⁾은 강성저하계수 α 와 항복응력 증가계수 β 라는 두 가지의 파라미터를 이용한 수치모델을 제안하였다. 이 파라미터들은 그림 4에서 나타난 것처럼, 일축 소성 응력-변형도 실험결과로부터 구해진다.

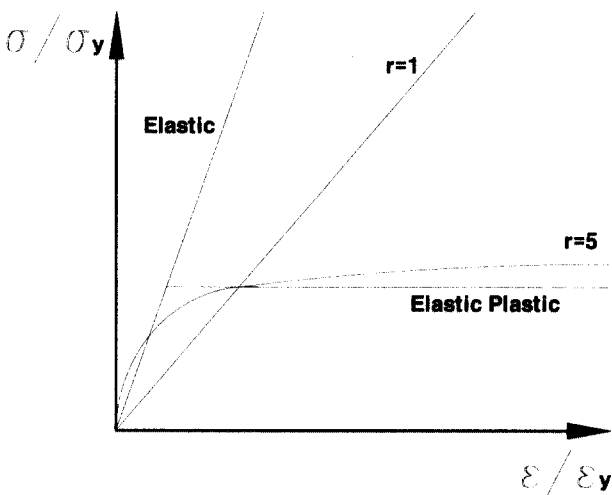


그림 3. Ramberg-Osgood 모델

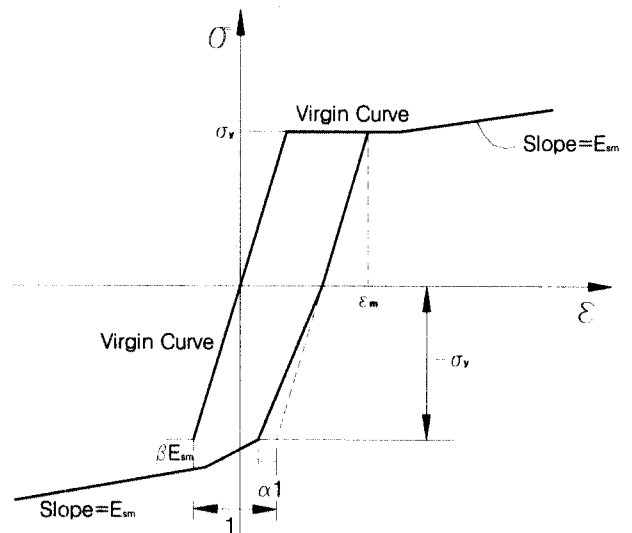


그림 4. α - β 모델

α - β 모델의 장점은 이력곡선이 수렴되는 특성에 있다. 이 모델에서 내력저하만 고려될 때에는 철근콘크리트 골조의 소성 힘-변형관계를 나타내는데 사용될 수 있다. 그러나, 변형도 연화(strain softening)가 무시되면, 이 모델은 반복하중을 받는 시험체의 안정된 상태를 예측하지 못하는 단점이 있다.

3.4 Menegotto-Pinto 모델

Menegotto-Pinto 모델⁽³⁰⁾은 응력-변형도 곡선에서 초기 강성(E_0)과 마지막 강성(E_s)을 나타내는 두 개의 선으로 정의된다. 응력은 변형도의 정확한 함수로 나타낸다. 그리고, 이력곡선은 초기값과 마지막 값 사이의 변화하는 강성을 가지고 있는 곡선으로 나타낸다. 이 모델은 그림 5에 나타나 있다.

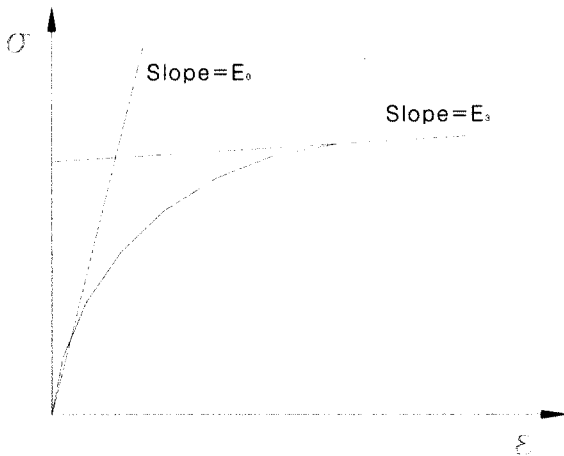


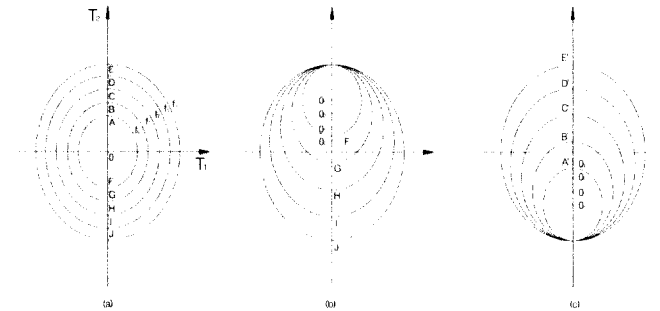
그림 5. Menegotto-Pinto 모델

3.5 Mechanical Sublayer 모델

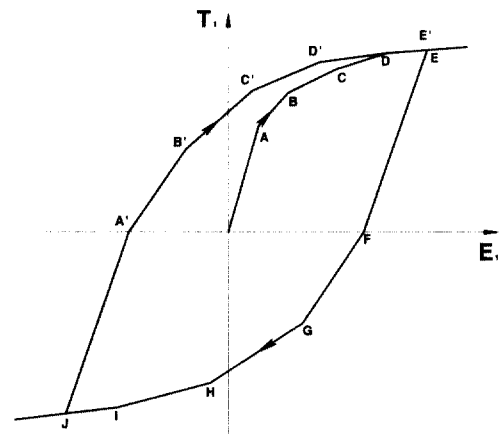
Duwez⁽¹⁰⁾에 의해 제안된 Mechanical sublayer 모델은 탄성과 소성 물체의 평행한 선들을 모음으로서 일축 반복하중상태에 있는 재료의 거동을 나타낸다. 이 모델은 재료의 거동을 나타내는데, 다양하고 확장하지 않는 항복표면을 사용하고 있다. 이 모델은 이중직선(bi-linear)으로 나타내는 재료의 다른 경화법칙보다 일축하중상태의 반복거동을 더욱 잘 나타낼 수 있다. Besseling⁽³⁾은 이 Mechanical sublayer 모델의 개념을 더 발전시켰다.

3.6 Mroz 모델

Mroz⁽³²⁾와 Iwan⁽¹⁷⁾은 Duwez의 일차원 모델을 “work hardening 계수의 장”의 개념을 도입함으로써 응력공간에서 다차원화된 모델로 확장시켰다. 초기에 등방 재료에 대한 이러한 계수들의 변화는 접선소성계수들의 직선들로 나타내고, 응력공간(stress space)에서 n 개의 표면 f_0, f_1, \dots, f_n 에 의해 나타낼 수 있다. 여기서, f_0 는 항복표면(yield surface)이고 f_1, \dots, f_n 는 일정한 work hardening 계수이다.



(a)



(b)

그림 6. Mroz 모델

어떠한 하중상태에서도, 이력곡선과 응력장(stress field)은 그림 6(a)와 (b)에서 보이는 것처럼 모든 표면(surface)의 이동(translation)과 확장이나 수축을 계산함으로써 구할 수 있다. Prager, Ziegler, Hodge의 것과는 다른 새로운 이동경화 법칙이 또한 Mroz⁽³³⁾에 의해 제안되었다.

3.7 Two-Surface 모델

Phillips & Sierakowski⁽³⁷⁾는 동시에 일어나지 않는 항복면과 하중면을 갖는 모델에 대한 실험을 수행하였다. 또한, Krieg⁽²¹⁾는 증가하는 증가율에 대한 전통적인 아이디어에 하

중면의 전통적인 개념, 관계된 흐름법칙, 이동경화와 등방경화를 새로 첨가한 소성론의 현상학적 이론인 two-surface 모델을 발표하였다. 응력상태가 소성과정 동안에 이 면에 접촉한 상태로 있기 때문에 내부면을 하중면이라 부른다. 바깥면(outer surface)을 탄성, 선형경화, 등방-이동 소성이론의 조합 등과 동일한 경화법칙을 갖는 한계면(limiting surface)이라 부른다.

3.7.1 Dafalias-Popov 모델

Dafalias & Popov⁽⁹⁾가 제안한 소성모델의 주요 개념은 경계면(bound surface)이 항상 재하면을 둘러싸고 있다는 것이며 이 두 면은 Mroz의 경화법칙에 따라 응력장에서 서로 교차하지 않고 균일하게 확장 이동한다. 일반적으로 경계면은 항복면에 비해 천천히 확장하므로 이 두 면은 접하게 되고 두 면이 접한 후 소성 하중이 가해지면 두 면은 함께 같은 방향으로 움직인다. 탄성재하(elastic unloading) 후 소성재하(plastic reloading)가 가해지면 항복면은 경계면으로부터 떨어져 반대 방향으로 이동하고 반대 경계면에 닿아 이동을 한다. 이 동안 이 두 면은 세 개의 영역으로 나누어지는데 소성계수 (E^p)가 $E^p = \infty$ [$\dot{E}^p(\delta_{ini}, \delta_{mi}) = \infty$]인 탄성역과 소성계수가 완전히 감소하는 전이역 [$\dot{E}^p(0, \delta_{mi}) = E^p_0$], 그리고 $E^p = E^p_0$ [$\dot{E}^p(\delta, \delta_{mi}) \geq E^p_0$]로 경계면에 근접한 점근적 소성역으로 구분된다. 소성계수는 현재의 재하점과 이 점에 상응하는 경계면과의 상대적 거리 δ 와 재하 또는 재하시 초기 항복점과 이 점에 상응하는 경계면과의 거리 δ_{mi} 의 함수이고 그것은 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$E^p = E^p_0 \left[1 + \mu \frac{\delta}{\delta_{mi} - \delta} \right] \quad (9)$$

여기서, E^p_0 와 μ 는 실험으로부터 얻어지는 재료상수이다. Dafalias-Popov 모델을 그림으로 나타내면 그림 7과 같다.

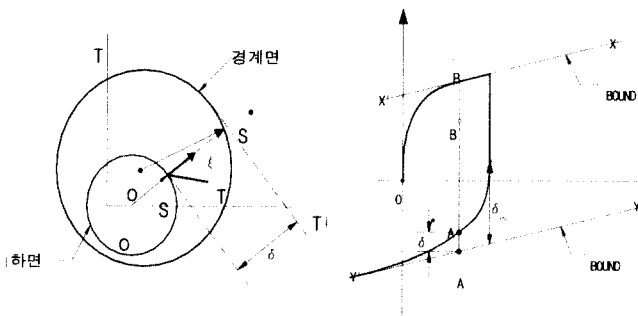


그림 7. Dafalias-Popov 모델

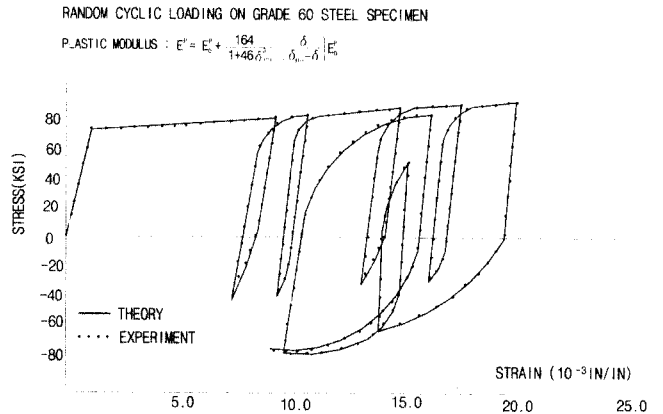


그림 8. Dafalias-Popov 모델(실험결과와의 비교)

그러나, Dafalias-Popov 모델에서는 일반적인 불비례하중 경로 즉 제하가 소성흐름을 일으킬 만큼 충분하지 않은 경우의 하중에 대해 과다하게 평가하는 것을 그림 9로부터 알 수 있다. 이는 δ_{mi} 가 점점 감소하기 때문이다. 따라서 Dafalias-Popov 모델은 불비례하중 상태에서 다소 결점이 있음을 알 수 있다.

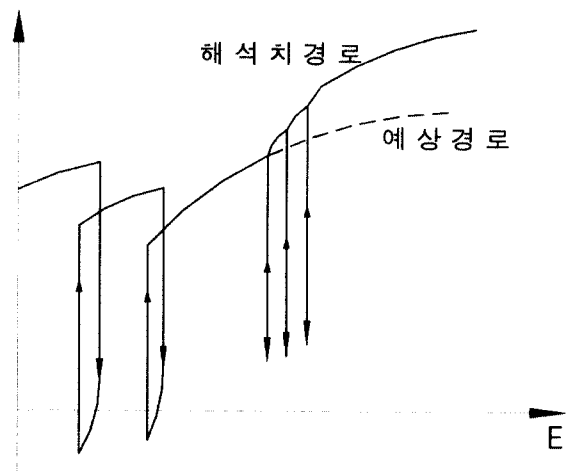


그림 9. Dafalias-Popov 모델의 불일치성

3.7.2 Tseng-Lee Model

1) Tseng-Lee Model⁽⁴⁷⁾의 실험적 배경

Two-surface 소성모델은 다음 세 가지 실험적 결과를 근거로 유도되었다:

① Phillips & Lee⁽³⁴⁾는 이축(bi-axial) 불비례 하중상태에서의 순수 알루미늄 시험체 실험을 통해 응력장에서 등방적으로 확장하고 하중 이력의 최고 응력점을 지나는 재하면(load surface)과 이 면 안에서 크기와 모양이 변화하는 내부항복면(inner yield surface)이 존재함을 관측하였

다. 그리고 재하면 안에서 항복면은 독립적으로 움직이는 것이 관측되었다.

② Krempl⁽²⁰⁾은 구조용 강재가 단축 반복하중을 받을 때의 비선형 거동 연구에서 최고 응력점과 그 방향이 변화하지 않는 “non-fading” 기억면(memory surface)을 관찰했다.

③ Lamba & Sidebottom^{(22),(23)}은 90도 이상에서 구리의 불비례 변형이력에서 최대 유효응력으로 제한된 “제한면(limiting surface)”이 존재함을 관찰하였다.

이들 실험에 의한 연구로부터 Tseng & Lee⁽⁴⁷⁾는 등방으로 확장하고 응력장에서 이전 최고 응력 이력을 갖는 기억면(memory surface)과 등방-이동경화법칙을 따르는 아래와 같은 항복면을 제안하였다.

2) 항복면(yield surface)과 기억면(memory surface)
항복면은 등방-이동경화 법칙에 의해 식(10)과 같이 나타낸다.

$$f(\sigma_{ab} - \bar{\alpha}_{ab}) - k^n = 0 \quad (10)$$

여기서, σ_{ab} 는 응력텐서(tensor), $\bar{\alpha}_{ab}$ 는 응력장에서의 항복면의 중심좌표, k 는 항복면의 크기를 나타낸다. 기억면은 등방경화 법칙(isotropic hardening rule)을 따르며 다음 식(11)으로 나타낸다.

$$\bar{F}(\sigma_{ab}) - \bar{k}^n = 0 \quad (11)$$

여기서, \bar{k} 는 기억면의 크기이다. 이를 von Mises의 항복조건으로 나타내면,

$$f(\sigma_{ab} - \bar{\alpha}_{ab}) = \frac{3}{2}(S_{ab} - \alpha_{ab})(S_{ab} - \alpha_{ab}) \quad (12)$$

$$F(\sigma_{ab}) = \frac{3}{2} S_{ab} S_{ab} \quad (13)$$

여기서, $S_{ab} = \sigma_{ab} - \frac{1}{3} \sigma_{cc} \delta_{ab}$,

그리고 $\alpha_{ab} = \bar{\alpha}_{ab} - \frac{1}{3} \bar{\alpha}_{cc} \delta_{ab}$ 이다.

3) 소성변형률과 소성 재하함수

Associated flow rule에 의해 소성변형률 벡터 $\dot{\epsilon}^p$ 는 항복면에 수직인 벡터를 따라 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{\epsilon}^p_{ab} = \frac{\langle L \rangle}{E^p} n_{ab} \quad (14)$$

여기서,

$$n_{ab} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}}}{N} ; N = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right]^{1/2} \quad (15)$$

$$L = \dot{\sigma}_{ab} n_{ab} \quad (16)$$

4) 경화 법칙(hardening rule)

그림 10에서 항복면은 선분 $\overline{o_y c}$ 따라 움직인다. ν 를 $\overline{o_y c}$ 의 단위 벡터라고 하면

$$\nu_{ab} = \frac{\frac{2}{3}(\bar{k} - k)\lambda_{ab} - \alpha_{ab}}{\left| \frac{2}{3}(\bar{k} - k)\lambda - \alpha \right|} \quad (17)$$

그리고, λ 를 선분 \overline{OB} 의 단위 벡터라 하면

$$\lambda_{ab} = \frac{s_{ab} + \delta \frac{\dot{s}_{ab}}{|s_{ab}|}}{\left| s + \delta \frac{\dot{s}}{|s|} \right|} \quad (18)$$

여기서, δ 는 선분 \overline{AB} 와 같은 응력치를 갖고 이는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta = \frac{-(s_{ab} \dot{s}_{ab}) + \sqrt{(s_{ab} \dot{s}_{ab})^2 + \left(\frac{2}{3} \bar{k}^2 - |s|^2\right) |s|^2}}{|s|} \quad (19)$$

여기서, $|s| = (s_{ab} s_{ab})^{1/2}$, $|\dot{s}| = (\dot{s}_{ab} \dot{s}_{ab})^{1/2}$ 이다. 항복면의 증분량 $|\dot{\alpha}|$ 는 적합조건을 이용해 나타내면,

$$|\dot{\alpha}| = \frac{\frac{\partial f}{\partial s} \dot{s} - 2kk}{\frac{\partial f}{\partial s} \nu} \quad (20)$$

여기서, $|\underline{\dot{a}}| = (\dot{\alpha}_{ab} \dot{\alpha}_{ab})^{1/2}$ 이고 $\dot{\alpha}_{ab} = |\underline{\dot{a}}| v_{ab}$ 이다.

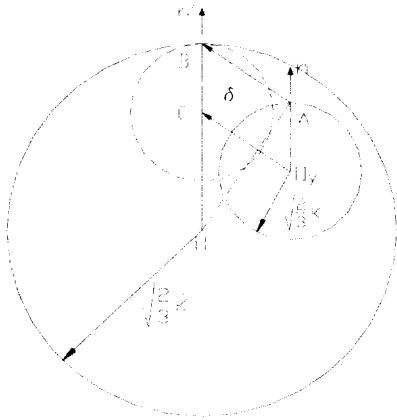


그림 10. 기억면내에서 항복면의 움직임(편치응력장)

5) 응력-변형도 관계

소성하중이 가해질 때 응력-변형도 관계는 다음 식(21)과 같다.

$$\dot{\sigma}_{ab} = C_{abcd} \dot{\epsilon}_{cd}^e \quad (21)$$

여기서, C_{abcd} 는 탄성계수이다. 전체 변형률 $\dot{\epsilon}_{cd}$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{cd} = \dot{\epsilon}_{cd}^e + \dot{\epsilon}_{cd}^p \quad (22)$$

비탄성역에서의 응력-변형도 관계는 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{\sigma}_{ab} = D_{abcd} \dot{\epsilon}_{cd} \quad (23)$$

여기서, D_{abcd} 는 접선 계수이다. 하중이 가해져 항복면이 기억면에 접해 함께 움직이면 접선 계수는 등방경화 법칙에 따라 다음과 같다.

$$D_{abcd} = \mu(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) + \lambda\delta_{ab}\delta_{cd} - \frac{1}{k^2} \frac{6\mu^2}{H(\underline{\epsilon}, W^p) + 2\mu} s_{ab} s_{ab} \quad (24)$$

여기서, μ 와 λ 는 Lamé 상수이고 δ_{ab} 는 Kronecker delta, $H(\underline{\epsilon}, W^p)$ 는 기억면에 상응하는 소성계수이다. 그러나, 항복면이 기억면내에서 움직일 때 접선계수는 이동경화

법칙에 따라 다음과 같이 나타낸다.

$$D_{abcd} = \mu(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) + \lambda\delta_{ab}\delta_{cd} - \frac{1}{k^2} \frac{6\mu^2}{H + 2\mu} (s_{ab} - \alpha_{ab})(s_{ab} - \alpha_{ab}) \quad (25)$$

여기서, 일반 소성계수 H 는 다음과 같다.

$$H = \left(1 + h \frac{\delta / \delta_{ini}}{1 - \delta / \delta_{ini}} \right) \hat{H}(\underline{\epsilon}, W^p) \quad (26)$$

소성계수는 현재 재하점과 이 점에 상응하는 경계면과의 상대적 거리 δ 와 제하 또는 재하시 초기 항복점과 이 점에 상응하는 경계면과의 거리 δ_{ini} 의 함수이다. 그리고 h 는 실험으로부터 얻은 보정값이다.

6) 실험과의 비교

Chang & Lee⁽⁵⁾는 2축 반복 불비례하중 상태에서 A-36 구조용 강을 실험하였다. 이 실험으로 얻은 결과는 two surface이론과 비교되었고 실험결과와 two-surface 소성이론과는 잘 일치하였다. 또한, Yang 등⁽⁴⁹⁾은 H형강의 실험을 통하여 Tseng-Lee 모델의 정확성을 입증하였다.

4. 결론

구조용 강재의 반복소성모델의 이론에 대한 분석연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 지진하중이나 풍하중을 받을 경우, 건물에 발생하는 불비례반복하중을 모델화하는 지금까지의 가장 정교한 소성모델은 항복면과 기억면이 도입된 two-surface 모델이다. 기억면은 비탄성 거동을 설명하기 위해 등방으로 확장하고 이전 이력의 최고 응력점을 통과한다.
- (2) 재료의 항복면은 등방-이동경화 법칙 혹은 이동경화 법칙을 따른다. 그리고 소성계수는 현재 재하점과 이 점에 상응하는 경계면과의 상대적 거리 δ 와 제하 또는 재하시 초기 항복점과 이 점에 상응하는 경계면과의 거리 δ_{ini} 의 함수이다.
- (3) Two-surface 모델은 항복면과 기억면의 초기 위치와 크기를 재료의 성질이나 응력-변형도 곡선의 이력으로부터 선택하는 것으로 비탄성 거동을 예측할 수 있다. 그리고 대부분의 구조용 강이 재료적 성질로 보이고 있는 plastic plateau는 기억면의 \hat{H} 에 대한 비선형

함수를 이용해 예측 할 수 있다. 또한 변형도 경화 현상이나 변형도 연화 현상, 반복 크립에도 실험 결과와 상당히 근접하고 있다.

- (4) 위에서 기술한 소성모델들은 기본적인 소성상태의 거동으로부터 복잡한 소성거동까지를 나타내고 있다. 그러나, 심한 지진과 같은 하중 때문에 발생하는 불비례 하중(nonproportional loading) 등에 대한 더욱 정교한 실험이 다양하게 이루어져야하고 지진에 맞는 하중이력의 검토가 이루어져야한다.

감사의 글

이 논문은 2002학년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것입니다. 연구비지원에 감사드립니다.

참고 문헌

1. 김덕재·이은택, 강구조 이론과 한계상태설계, 기문당, pp. 418-424, 2000.
2. Baltov, A. and Sawczuk, A., "A Rule of Anisotropic Hardening", Acta Mechanica, Vol. 1, pp. 81-92, 1965.
3. Besseling, J. F., "A Theory of Elastic, Plastic, and Creep Deformation of an Initially Isotropic Material Showing Strain Hardening, Creep Recovery, and Secondary Creep", Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 529-536, 1958.
4. Calladine, C. R., Plasticity for Engineers, John Wiley & Sons, 1985.
5. Chang, K. C. and Lee, G. C., "Constitutive Reactions of Structural Steel Under Nonproportional Loading", Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 112, No. 8, August, pp. 806-820, 1986.
6. Chen, W. F. and Han, D. J., Plasticity for Structural Engineers, Springer-Verlag, New York Inc., 1988.
7. Coffe, N. G., Cyclic Stress-Strain and Moment-Curvature Relationships for Steel Beams and Columns, Dissertation presented to Stanford University in 1983, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
8. Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., "A Model for Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading", Acta Mechanica, Vol. 21, No.3, pp. 173-192, 1975.
9. Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., "Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity", Journal of Applied Mechanics, Vol. 98, No. 4, December, pp. 645-651, 1976.
10. Duwez, P., "On the Plasticity of Crystals", Physical Review, Vol. 47, No. 6, pp. 494-501, 1935.
11. Eisenberg, M. A. and Phillips, A., "On Nonlinear Kinematic Hardening", Acta Mechanica, Vol. 15, pp. 1-13, 1968.
12. Hays, C. O. Jr., "Inelastic Material Models in Earthquake Response", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 107, No.ST1, January, pp. 13-28, 1981.
13. Hays, C. O. Jr. and Santhanam, T. K., "Inelastic Section Response by Tangent Stiffness", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 105, No.ST7, July, pp. 1241-1259, 1979.
14. Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, 1950.
15. Hodge, P. G. Jr., "The Theory of Piecewise Linear Isotropic Plasticity", IUTAM Colloquium Madrid, 1955, "Deformation and Flow of Solids", Berlin, 1956.
16. Hodge, P. G. Jr., "Discussion of (Prager, W., "A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids")", Journal of Applied Mechanics, vol. 23, pp. 482-484, 1957.
17. Iwan, W. D., "On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite Systems", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 34, pp. 612-617, 1967.
18. Kadashevich, I. I. and Novozhilov, V. V., "The Theory of Plasticity Which Takes Into Account Residual Microstresses", Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 22, pp. 104-118, 1959.
19. Klisinski, M., "Plasticity Theory Based on Fuzzy Sets", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 114, No. 4, April, pp. 563-582, 1988.
20. Krempl, E., "Cyclic Plasticity - Some Properties of the Hysteresis Curve of Structural Metals at Room Temperature", Journal of Basic Engineering, Vol. 93D, pp. 317-323, 1971.
21. Krieg, R. D., "A Practical Two Surface Plasticity Theory", Journal of Applied Mechanics, vol. 97, September, pp. 641-646, 1975.
22. Lamba, H. S. and Sidebottom, O. M., "Cyclic Plasticity for Nonproportional Paths: Part 1-

- Cyclic Hardening, Erasure of Memory, and Subsequent Strain Hardening Experiments", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Transactions of the ASME, Vol. 100, January, pp. 96-103, 1978.
23. Lamba, H. S. and Sidebottom, O. M., "Cyclic Plasticity for Nonproportional Paths: Part 2- Comparison with Predictions of Three Incremental Plasticity Models", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Transactions of the ASME, Vol. 100, January, pp. 104-111, 1978.
 24. Ling, H. I., Liu, H., Mohri, Y., Kawabata, T., "Bounding Surface Model for Geosynthetic Reinforcements", *Journal of Engineering Mechanics*, 127(9), pp. 963-967, 2001.
 25. Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall Inc., 1969.
 26. McDowell, D. L., "A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity: Part I- Development of Appropriate Equations", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 52, pp. 298-302, 1985.
 27. McDowell, D. L., "A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity: Part I- Comparison of Theory with Experiments", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 52, pp. 303-308, 1985.
 28. McDowell, D. L., "An Experimental Study of the Structure of Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Plasticity", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 107, October, pp. 307-315, 1985.
 29. McDowell, D. L., "An Evaluation of Recent Development in Hardening and Flow Rules for Rate-Independent, Nonproportional Cyclic Plasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 323-334, 1987.
 30. Menegotto, M. and Pinto, P., *Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plan Frames Including Changes in Geometry and Nonelastic Behavior of Elements under Combined Normal Force and Bending*", In IABSE Symposium on the Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well-Defined Repeated Loads, IABSE, Libson, pp. 122-140, 1973.
 31. Mizuno, E., Shen, C., Tanaka, Y., and Usami, T., "A Uniaxial Stress-Strain Model for Structural Steels under Cyclic Loading", *Stability and Ductility of Steel Structures under Cyclic Loading*, Edited by Fukumoto, Y. and Lee, G. C., pp. 37-48, 1992.
 32. Mroz, Z., "On the Description of Anisotropic Work Hardening", *J. Mech. Phys. Solid*, Vol.15, pp. 163-175, 1967.
 33. Mroz, Z., "An Attempt to Describe the Behaviour of Metals Under Cyclic Loads Using a More General Workhardening Model", *Acta Mechanica*, Vol. 7, pp. 199-212, 1969.
 34. Phillips, A., and Lee, C. W., "Yield Surfaces and Loading Surfaces. Experiments and Recommendations", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, pp. 715-729, 1979.
 35. Phillips, A., Liu, C. S., and Justussons, J. W., "An Experimental Investigation of Yield Surfaces at Elevated Temperatures", *Acta Mechanica*, Vol. 14, pp. 119-146, 1972.
 36. Phillips, A. and Moon, H., "An Experimental Investigation Concerning Yield Surfaces and Loading Surfaces", *Acta Mechanica*, Vol. 27, pp. 91-102, 1977.
 37. Phillips, A. and Sierakowski, R. L., "On the Concept of the Yield Surface", *Acta Mechanica*, Vol. 1, pp. 29-35, 1965.
 38. Phillips, A. and Tang, J. L., "The Effect of Loading Path on the Yield Surface at Elevated Temperatures", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 8, pp. 463-474, 1972.
 39. Phillips, A., Tang, J. L., and Ricciuti, M., "Some New Observations on Yield Surfaces", *Acta Mechanica*, Vol. 20, pp. 23-39, 1974.
 40. Popov, E. P. and Petersson, H., "Cyclic Metal Plasticity: Experiments and Theory", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 104, No. EM6, December, pp. 1371-1388, 1978.
 41. Prager, W., "A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 78, pp. 493-496, 1956.
 42. Ramberg, W. and Osgood, W. R., "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters", NACA, TN No. 902, 1943.
 43. Rashid, Y. R., "On Nonlinear Kinematic Hardening Plasticity Theory", *Nuclear Engineering and Design*, 29, pp. 135-140, 1974.

44. Santhanam, T. K., "Model for Mild Steel in Inelastic Frame Analysis", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 105, No.ST1, January, pp. 199-220, 1979.
45. Shen, C., Mamaghani, I. H. P., Mizuno, E., and Usami, T., "Cyclic Behavior of Structural Steels. II: Theory", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 121(11), pp. 1165-1172, 1995.
46. Sugiura, K., Lee, G. C. and Chang, K. C., "Endochronic Theory for Structural Steel Under Nonproportional Loading", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 113, No. 12, December, pp. 1901-1917, 1987.
47. Tseng, N. T. and Lee, G. C., "Simple Plasticity Model of Two-Surface Type", Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 109, No.3, June, 1983.
48. Voyiadjis, G. Z. and Kattan, P. I., "A Generalized Eulerian Two-Surface Cyclic Plasticity Model for Finite Strains", Acta Mechanica, 81, pp. 143-162, 1990.
49. Yang, C. F., Lee, Eun Taik, Chang, K. C., and Lee, G. C., "Inelastic Behavior of Steel Members under Nonproportional Loading", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 21, No. 1, January, pp. 131-141, 1995.
50. Ziegler, H., "A Modification of Prager's Hardening Rule", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 17, No. 1, pp. 55-65, 1959.

(접수일자 : 2002년 9월 17일)