

정상 상태 내부 유동이 있는 양단 고정 곡선 파이프의 비선형 진동 특성

이 수 일*, 정 진 태†

(2001년 2월 17일 접수, 2001년 10월 19일 심사완료)

Nonlinear Vibration Characteristics of a Curved Pipe with Fixed Ends and Steady Internal Flow

Soo Il Lee and Jintai Chung

Key Words : Pipe Conveying Fluid(유체 전달 파이프), Flow-induced Vibration(유동 기인 진동), Natural Frequency(고유진동수), Nonlinear Equations of Motion(비선형 운동 방정식), Steady Flow(정상유동)

Abstract

The nonlinear differential equations of motion of a fluid conveying curved pipe are derived by use of Hamiltonian approach. The extensible dynamics of curved pipe is based on the Euler-Bernoulli beam theory. Some significant differences between linear and nonlinear equations and the dynamic characteristics are discussed. Generally, it can be shown that the natural frequencies in curved pipes are changed with flow velocity. Linearized natural frequencies of nonlinear equations are slightly different from those of linear equations.

1. 서론

내부 유체 유동을 포함한 파이프의 진동 해석은 실제 응용 범위가 넓기 때문에 국내외에서 오래 전부터 다양한 방법으로 연구가 진행되어 왔다. 각종 플랜트, 냉동 및 공조 가전 기기, 산업 기계의 유압 배관 등 파이프 내부 유동에 의한 진동이 나타나는 계는 흔히 야 볼 수 있다. 이러한 진동 현상은 제품 자체의 성능과 수명에 영향을 미칠 뿐 아니라 소음 등의 발생 원인이 되기 때문에 이의 해결을 위한 각종 노력이 진행되고 있다.

일반적인 직선 및 곡선 파이프의 유동 기인 진동에 대해서는 국내외 많은 연구자들의 연구 결과가 발표되었으나,⁽¹⁻⁴⁾ 선형 모델의 해석 또는 2차원 비선형 진동 해석에 국한되어 있다. 또한 곡선

파이프에 대한 연구도 곡선이 이루는 평면을 기준으로 평면내(in-plane) 운동과 평면외(out-of-plane) 운동을 별도로 해석하였다.⁽²⁾

그러나 실제 양단 고정 파이프에서 유속이 큰 경우 파이프에 인장 변형과 평면내 굽힘 변형이 발생하면, 그 영향으로 인하여 평면의 진동 특성이 바뀌게 된다. 따라서 이러한 경우는 파이프의 인장 효과를 고려한 모델이 필요하게 되며, 이 경우의 유도된 운동방정식은 선형/비선형 연성을 포함하게 된다. 즉, 평면내 변형이 비선형으로 연성이 되어 평면의 운동에 영향을 미치게 된다.

따라서, 본 연구에서는 인장가능(extensible) 곡선 파이프 계에서 비선형 운동방정식을 유도하여 이들 평면내/외 변위(인장, 굽힘, 비틀림) 사이에 어떠한 연성이 존재하는가를 확인하고자 한다. 또한 이러한 비선형 항의 영향을 고려하여 정상 상태 평형 위치에서의 고유진동수 해석을 통하여 비선

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학과

E-mail : jchung@hanyang.ac.kr

TEL : (031)400-5287 FAX : (031)501-4590

* 한양대학교 BK21 기계분야사업단

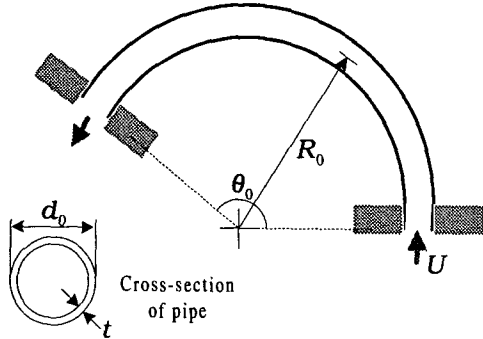


Fig. 1 Geometric configuration of a curved pipe conveying fluid

형상의 영향을 확인해 보고자 한다.

2. 운동 방정식

내부 유동이 있는 곡선 파이프의 비선형 운동 방정식을 유도하기 위하여, Fig. 1 과 같이 양단이 고정된 곡률 반경 R_0 , 각도 θ_0 , 외경 d_0 , 두께 t 인 파이프를 고려하였다. 파이프의 곡선 반경에 비해 파이프 외경이 작으므로 파이프의 전단 변형이나 회전 관성에 의한 효과는 무시할 수 있다. 또한 파이프의 변형이 어느 정도 큰 경우에는 일반적인 면내 굽힘 이외에도 인장이나 면의 굽힘도 동시에 고려해야 한다. 내부 유체는 비압축성으로, 유속 분포는 단면에서 균일하다고 가정 하여 2 차 유동 효과는 고려하지 않는다.

Fig. 2 는 변형 전· 후의 파이프 형상을 나타낸다. $(\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b)$ 와 $(\hat{e}_T, \hat{e}_N, \hat{e}_B)$ 는 임의의 파이프 중심 점에서 변형 전· 후의 단위 벡터계를 나타내며, u, v, w, ϕ 는 각각 파이프의 인장 방향(t), 면내 반경 방향(n), 면의 방향(b), 그리고 비틀림 방향 변위를 나타낸다.

계의 변형 에너지를 구하기 위하여 파이프의 변형률과 곡률 변화를 구하면 다음과 같다. 먼저 파이프의 인장 변형률(strain)은

$$e = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta \bar{s} - \delta s}{\delta s} \equiv \frac{d\bar{s}}{ds} - 1 \quad (1)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 그런데 파이프 길이 방향을 따라가는 변형 전· 후의 좌표를 각각 s, \bar{s} 라 하면, 다음과 같은 기하학적 관계식이 성립하므로,

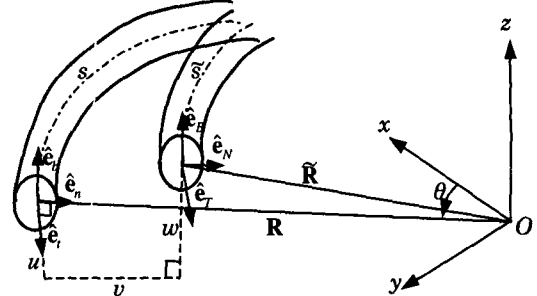


Fig. 2 Deformed and undeformed configurations of pipe

$$\frac{ds}{d\bar{s}} = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2)$$

곡선 파이프에서 인장 변형률을 다음과 같이 비선형 근사할 수 있다.

$$e \approx \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R_0} + \frac{u}{R_0} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \quad (3)$$

또한, 다음과 같이 굽힘에 의한 각 방향 선형 근사된 곡률 성분을 구할 수 있다.

$$\kappa_T \approx \frac{1}{R_0} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad (4a)$$

$$\kappa_N \approx \frac{1}{R_0} \phi - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad (4b)$$

$$\kappa_B \approx \frac{1}{R_0} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (4c)$$

$$\kappa_O = \frac{1}{R_0} \quad (4d)$$

여기서, $\kappa_T, \kappa_N, \kappa_B$ 는 각각 임의의 점에서 변형 후 좌표계의 각 방향축에 대한 곡률 성분을 나타내며, κ_O 는 곡선 파이프 최초 형상이 갖는 평면내 곡률을 나타낸다. 따라서 전체 계의 변형에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EAe^2 + GJ\kappa_T^2 + EI(\kappa_N^2 + (\kappa_B - \kappa_O)^2) \right] ds \quad (5)$$

여기서, EA, GJ, EI 는 각각 인장, 비틀림, 굽힘 강성계수를 나타낸다.

다음으로 계의 운동 에너지를 구하기 위하여 파이프와 내부 유체의 속도 벡터 \mathbf{v}_p 와 \mathbf{v}_f 를 구하면 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_p = \dot{u}\hat{\mathbf{e}}_t + \dot{v}\hat{\mathbf{e}}_n + \dot{w}\hat{\mathbf{e}}_b, \quad (6a)$$

$$\mathbf{v}_f = (\dot{u} + U)\hat{\mathbf{e}}_t + \left(\dot{v} + U \frac{\partial v}{\partial s} + U \frac{u}{R_0} \right) \hat{\mathbf{e}}_n + \left(\dot{w} + U \frac{\partial w}{\partial s} \right) \hat{\mathbf{e}}_b \quad (6b)$$

여기서 U 는 유체의 속도를 나타낸다. 따라서 전체 계의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (m \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p + I_T \dot{\phi}^2) ds + \frac{1}{2} \int_0^L (M \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_f) ds \quad (7)$$

여기에서 m 과 M 은 파이프와 유체의 단위 길이 당 질량을, I_T 는 파이프의 접선 방향에 대한 질량 관성모멘트를 나타낸다.

이상에서 구한 운동에너지 식 (7)과 변형에너지 식 (5)를 다음과 같이 확장된 해밀턴 정리 (extended Hamilton's Principle)⁽⁵⁾에 적용하면,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0, \quad (8)$$

다음 식(9a-d)와 같은 운동 방정식을 구할 수 있다. 여기서, δT , δV 는 각각 운동에너지와 변형에너지의 변분, δW_{nc} 는 비보존력에 의한 가상일, δM 는 경계를 통과하는 가상 운동량이다. 여기서 미

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{u} + M\dot{U} - MU \frac{\dot{v}}{R_0} + MU^2 \left(-\frac{u}{R_0^2} - \frac{v'}{R_0} \right) \\ + EA \left(-u'' + \frac{v'}{R_0} - v'v'' - w'w'' - \frac{uw}{R_0^3} - \frac{vv'}{R_0^2} - \frac{uw''}{R_0} \right) \\ + EI \left(-\frac{u''}{R_0^2} - \frac{v'''}{R_0} \right) = 0, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{v} + M\dot{U} \left(v' + \frac{u}{R_0} \right) + 2MU \left(\dot{v}' + \frac{\dot{u}}{2R_0} \right) \\ + MU^2 \left(v'' + \frac{u'}{R_0} \right) + EI \left(\frac{u'''}{R_0} + v'''' \right) \\ + EA \left[\frac{v}{R_0^2} - \frac{u'}{R_0} - u'v'' - u''v' - \frac{u^2}{2R_0^3} + \frac{u'v}{R_0^2} \right. \\ \left. - \frac{uu''}{R_0} + \frac{vv''}{R_0} - \frac{(u')^2}{2R_0} + \frac{(v')^2}{2R_0} - \frac{(w')^2}{2R_0} \right] = 0, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{w} + M\dot{U}w' + 2MU\dot{w}' + MU^2w'' \\ + EA \left(-u'w'' - u''w' + \frac{vw''}{R_0} + \frac{v'w'}{R_0} \right) \\ + EI \left(w'''' - \frac{\phi''}{R_0} \right) + GJ \left(-\frac{\phi''}{R_0} - \frac{w''}{R_0^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (9c)$$

$$I_T \ddot{\phi} + EI \left(\frac{\phi}{R_0^2} - \frac{w''}{R_0} \right) + GJ \left(-\phi'' - \frac{w''}{R_0} \right) = 0, \quad (9d)$$

분기호 ()' 과 () $\dot{}$ 는 각각 s 와 t 에 대한 미분을 나타낸다. 또한 완전 고정 경계조건은 양 끝단 ($s = 0, L$)에서 다음과 같다.

$$u = v = v' = w = w' = \phi = 0 \quad (10)$$

방정식(9a-d)는 2 차 비선형 항까지 근사한 결과로, 유체의 가속도에 의한 영향과 함께 u, v, w 간에 선형/비선형으로 서로 연성되어 있음을 알 수 있다. 만약 곡선 형상에 의한 효과를 무시하면(즉, $R_0 \rightarrow \infty$) 직선 파이프에 대한 운동 방정식을 얻을 수 있다. 이는 Thurman 등과 Semler 등의 방정식 유도 결과와 같다.⁽³⁾ 특히 평면내 운동에 대한 식 (9a-b)와 평면의 운동에 대한 식 (9c-d) 사이에는 비선형 항을 통하더라도 연성이 존재함을 확인할 수 있다.

다음으로 아래와 같은 무차원 변수와 매개변수를 도입하여 방정식(9a-d)를 무차원화 시킨다.

$$\begin{aligned} \bar{u} = \frac{u}{R_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{R_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{R_0}, \quad \bar{\phi} = \phi, \\ \bar{s} = \frac{s}{R_0} \equiv \theta, \quad \bar{t} = \frac{t}{R_0^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}, \\ \bar{U} = UR_0 \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{M}{m+M}}, \end{aligned}$$

$$k = \frac{EA}{EI} R_0^2, \quad \gamma = \frac{GJ}{EI}, \quad \mu = \frac{(m+M)R_0^2}{I_T},$$

$$\bar{\omega}_n = \omega_n R_0^2 \sqrt{\frac{m+M}{EI}}$$

여기서 ω_n 는 선형 고유진동수를 나타낸다. 이렇게 무차원화된 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \bar{U} R_0 \beta - \bar{U} \beta \dot{v} + \bar{U}^2 (-\ddot{u} - \ddot{v}') + k(-\ddot{u}'' + \ddot{v}') \\ - \ddot{v}' \ddot{v}'' - \ddot{w}' \ddot{w}'' - \ddot{u} \ddot{v}'' - \ddot{v} \ddot{v}'' - \ddot{u} \ddot{v}''' - \ddot{u}'' - \ddot{v}''' = 0, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \bar{U} R_0 \beta (\ddot{v}' + \ddot{u}) + 2\bar{U} \beta (\dot{v}' + \dot{u}/2) + \bar{U}^2 (\ddot{v}'' + \ddot{u}') \\ + k(\ddot{v} - \ddot{u}' - \ddot{u} \ddot{v}'' - \ddot{u}^2 + \ddot{u}' \ddot{v} - \ddot{u} \ddot{u}'' \\ + \ddot{v} \ddot{v}'' - \ddot{u}'^2/2 + \ddot{v}'^2/2 - \ddot{w}'^2/2) + \ddot{u}''' + \ddot{v}''' = 0, \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \bar{U} R_0 \beta \ddot{w}' + 2\bar{U} \beta \ddot{w}' + \bar{U}^2 \ddot{w}'' + k(-\ddot{u}' \ddot{w}'' - \ddot{u} \ddot{w}''') \\ + \ddot{v} \ddot{w}'' + \ddot{v}' \ddot{w}'' + \gamma(-\ddot{w}'' - \ddot{\phi}'') + \ddot{w}''' - \ddot{\phi}''' = 0, \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\ddot{\phi} + \mu(\ddot{\phi} - \ddot{w}'') + \mu \cdot \gamma(-\ddot{\phi}'' - \ddot{w}'') = 0, \quad (11d)$$

여기서 $(\dot{})' = \partial(\dot{})/\partial\theta$, $(\dot{})'' = \partial(\dot{})/\partial t$ 이며, $\theta = 0, \theta_0$ 에서 경계조건은 다음과 같다.

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{v}' = \bar{w} = \bar{w}' = \bar{\phi} = 0 \quad (12)$$

이상의 무차원화된 방정식(11a-d)에 다음과 같이 변수 분리에 의한 급수 해를 가정하여 대입한다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(\theta, \bar{t}) = \sum_{n=0}^N U_n(\theta) x_n(\bar{t}), \quad \bar{v}(\theta, \bar{t}) = \sum_{n=0}^N V_n(\theta) y_n(\bar{t}), \\ \bar{w}(\theta, \bar{t}) = \sum_{n=0}^N W_n(\theta) z_n(\bar{t}), \quad \bar{\phi}(\theta, \bar{t}) = \sum_{n=0}^N \Phi_n(\theta) \psi_n(\bar{t}) \end{aligned} \quad (13)$$

이때 θ 에 대한 함수 $U_n(\theta), V_n(\theta), W_n(\theta), \Phi_n(\theta)$ 는 기본적으로 기하학적 경계조건(양단 고정)을 만족하여야 하므로 기저함수(basis function)로서 간편하게 다음과 같이 다항 함수를 이용할 수 있다.

$$U_n(\theta) = a_n \theta^{n+1} (\theta - \theta_0), \quad V_n(\theta) = b_n \theta^{n+2} (\theta - \theta_0)^2,$$

$$W_n(\theta) = c_n \theta^{n+2} (\theta - \theta_0)^2, \quad \Phi_n(\theta) = d_n \theta^{n+1} (\theta - \theta_0) \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

여기서, 각 함수들은 자동적으로 고정 경계조건을 만족하며, 계수 a_n, b_n, c_n, d_n 은 함수의 정규화(normalization) 조건으로부터 구해지는 상수이다. 이러한 다항함수를 이용한 이산화의 경우 직교성이 보장되지 않아 수렴성은 약간 떨어지나 수치적으로 다루기 용이하여 엄밀해(exact solution)를 찾기 어려운 경우 간단한 근사 과정에 많이 이용된다. 이러한 가정과 식 (11a-d)의 약형(weak form)으로부터 갤러킨(Galerkin) 근사 방법을 적용하여 방정식을 이산화하게 된다.

적분 연산을 거쳐 이산화된 방정식은 부록에 나타낸 것과 같고, 이는 다시 다음과 같은 비선형 벡터-행렬 식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\bar{U} \mathbf{G} \dot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{K} + \bar{U}^2 \mathbf{B} + \bar{U} \mathbf{A}) \mathbf{X}(t) \\ + \mathbf{N}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{F}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = \{x_0(t), \dots, x_N(t); y_0(t), \dots, y_N(t); \\ z_0(t), \dots, z_N(t); \psi_0(t), \dots, \psi_N(t)\}^T \end{aligned}$$

이고, 무차원화 시간 \bar{t} 는 t 로 간략히 나타내었으며, $\mathbf{N}(\mathbf{X}(t))$ 는 비선형 벡터이다.

일정한 유속에서 파이프에는 유체에 의한 힘이 작용하여 일정하게 변형을 하게 된다. 즉, 일정 유속 상태에서 시간에 따른 운동의 변화가 없는 정적 평형 상태의 변형 형상을 식 (14)로부터 구할 수 있다. 식 (14)에서 시간에 의한 변화를 무시하면,

$$(\mathbf{K} + \bar{U}^2 \mathbf{B}) \mathbf{X} + \mathbf{N}(\mathbf{X}) = \mathbf{F} \quad (15)$$

와 같고, 이 식을 만족하는 평형 해 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ 를 무차원유속 \bar{U} 에 따라 수치적으로 구할 수 있다.

다음으로 평형 해에서 비선형 항의 자코비안(Jacobian)으로부터 다음과 같은 접선 행렬(tangent matrix)을 구할 수 있다.

Table 1 Dimensionless natural frequencies of a curved pipe with fixed ends when $\bar{U} = 0, \theta_0 = \pi, k = 800, \mu = 402.2, \gamma = 0.77$

N	Out-of-plane modes			In-plane modes		
	1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
1	2.1407	5.9130	-	28.3756	28.9940	-
2	1.9042	5.4827	12.4316	28.3022	28.9940	32.4260
3	1.8201	5.2454	11.6630	28.3020	28.9689	31.1003
4	1.8168	5.2306	11.0341	28.3019	28.9668	30.8323
5	1.8168	5.2306	11.0341	28.3019	28.9663	30.8323
6	1.8168	5.2306	11.0341	28.3019	28.9663	30.8382
Ref. (6)	1.8115	-	-	28.2467	28.9656	30.7958

$$K_T = \left. \frac{\partial N(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} \quad (16)$$

이 접선 행렬은 비선형 항의 영향을 정적 평형위치에서 선형화 한 것으로, 이를 이용하면 전체 계의 선형화된 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M \ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\bar{U}G \dot{\mathbf{X}}(t) + \left(\mathbf{K} + \bar{U}^2 \mathbf{B} + \bar{U} \mathbf{A} + \mathbf{K}_T \right) \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (17)$$

여기에서 각 행렬의 요소는 부록에 나타낸 것과 같다.

3. 고유진동수 해석

이산화된 방정식(14)의 수렴성 검증을 위하여 비선형 항과 유체 유동에 의한 영향을 무시하고 ($\mathbf{N}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \bar{U} = \bar{U} = 0$), $\theta_0 = \pi, k = 800, \mu = 402.2, \gamma = 0.77$ 일 때, 고유치 해석을 수행하였다. Table 1에서와 같이 $N = 4$ 이상에서 고유치가 일정 값에 잘 수렴하는 것을 알 수 있다. 또한 기존의 곡선 보 이론에 의한 고유진동수⁽⁶⁾와 비교 결과 (Table 1), 역시 서로 잘 일치 함을 확인할 수 있다. 일반적인 예측과 같이 평면의 방향(w)의 굽힘 고유진동수가 가장 낮게 나옴을 알 수 있다.

이산화된 선형 방정식에서 $M = N = L = 5$ 일 때, 복소 고유치 해석을 통하여 무차원 유속 \bar{U} 에 따라 변화하는 고유진동수 궤적 그래프는 Fig. 3에 나타낸 것과 같다. Fig. 3 (a)는 평면의 방향 선형

고유진동수 선도로 유속이 증가함에 따라 고유진동수는 점차 감소하는 경향을 보이고 있다. 본 연구의 선형 모델은 평면내와 평면외 방향이 서로 독립되어 있으므로 이를 따로 나누어 해석한 기존 선형 해석 결과와 같다. Fig. 3 (b)는 평면내 방향 고유진동수 결과로 역시 평면외 방향의 결과와 유사한 경향을 보인다. 또한 Fig. 3 (a)으로 부터 고유진동수가 0 이 되어 진동 모드가 불안정해지는 일종의 임계(critical) 유속(3)이 있음을 확인할 수 있다. 양단지지 반원형 파이프의 선형 모델에서 무차원 임계 유속은 $\bar{U}_{cr} = \pi/2$ 이다.

다음으로 본 연구에서 유도한 방정식을 바탕으로 평면내/외 방향의 비선형 연성 항의 영향을 추가하여 해석하였다. 유속에 따른 정상상태 평형해를 식 (15)로부터 구하고, 그 위치에서 식 (16)의 접선 행렬을 이용하여 비선형 방정식을 선형화하였다. 이러한 과정으로부터 얻어진 비선형 모델의 유속에 따른 평면외/내 고유진동수 궤적 그래프는 각각 Fig. 4(a), (b)와 같다. 비선형 모델의 해석 결과, 평면외 굽힘 고유진동수가 선형의 경우보다 유속이 증가함에 따라 감소하는 경향이 작음을 알 수 있고, 또한 안정성 영역도 변화함을 알 수 있다. 즉, 본 연구에서 설정한 비선형 모델의 경우 선형 모델보다 무차원 임계 유속이 12.2% 정도 증가함을 확인할 수 있다. 이는 비선형 모델에서는 선형 임계 유속 이상에서도 안정 모드가 계속 존재하는 것으로 해석할 수 있다. 한편, Fig. 4 (b)에서 상당히 높은 유속($\bar{U} > 6.0$)의 영역에서는 모드 간에 분기(bifurcation) 현상과 같은 부분을 볼 수

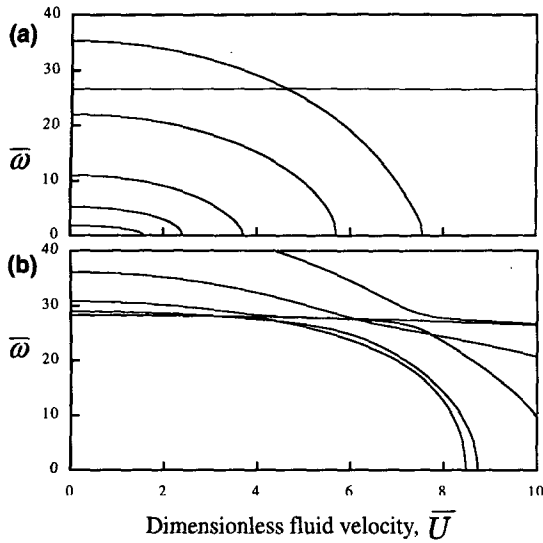


Fig. 3 Dimensionless linear natural frequencies of a pipe with fixed ends for (a) the out-of-plane modes and (b) the in-plane modes when $\theta_0 = \pi$, $k = 800$, $\mu = 402.2$, $\gamma = 0.77$

있는데, 이는 비선형 현상의 특징으로 높은 유속 구간에서는 좀 더 복잡한 동역학이 존재함을 예측할 수 있다.

4. 결론

일반적인 선형 정식화에 의한 내부유동이 있는 파이프의 진동 해석에서는, 평면내 방향과 평면외 방향이 독립적으로 나타나므로 평면내·외의 상호작용에 의한 영향이 나타나지 않는다. 이와 같이 지금까지 연구들은 선형 해석이거나, 비선형 모델이라도 평면내/외 방향을 별도로 모델링한 해석에 국한되어 왔다.

그러나, 본 연구에서는 기존 연구에서 적용하지 않은 평면내/외 변위 간의 연성을 고려하였다. 즉, 실제 파이프 계에서와 같이 파이프의 인장, 평면내 굽힘 등 효과를 고려하면 그 영향이 평면내/외의 변위 사이에 선형/비선형으로 연성되는 또한 식 (9a-d)와 같은 비선형 방정식을 구할 수 있다. 비선형 모델의 고유진동수 해석 결과, 유속에 따른 고유진동수 경향에 기존 모델과 변화가 있음을 확인하였고, 선형 모델보다 평면외 굽힘 모드에 대한 임계 유속이 다소 높게 나타남을 확인하였다. 또한 아주 높은 유속($\bar{U} > 6.0$) 구간에서는 복잡

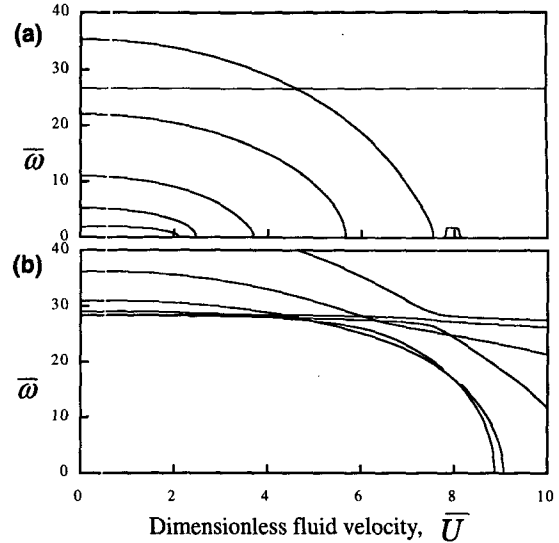


Fig. 4 Dimensionless linearized natural frequencies of a pipe with fixed ends for (a) the out-of-plane modes and (b) the in-plane modes when $\theta_0 = \pi$, $k = 800$, $\mu = 402.2$, $\gamma = 0.77$

한 동역학이 존재함을 알 수 있었다.

향후 본 연구에서 유도된 비선형 방정식을 이용하여 좀 더 엄밀한 안정성 해석과, 유체 맥동(pulsating flow)이 평면내/외 진동 모드에 미치는 영향이 규명되기를 기대한다.

참고문헌

- (1) 이우식, 박철희, 홍성철, 1991, "내부에 유체가 흐르는 파이프계의 동적 안정성 및 응답 해석," 대한기계학회논문집, 제 15 권, 제 6 호, pp. 1861~1871.
- (2) 홍성철, 2000, "조화진동유동을 포함한 곡선파이프 계의 외평면 혼돈운동 연구," 한국소음진동 공학회지, 제 10 권, 제 5 호, pp. 849~858.
- (3) Paidoussis, M. P., 1998, *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, Academic Press.
- (4) Dupis, C., Rousselet, J., 1992, "The Equations of Motion of Curved Pipes Conveying Fluid," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 153, No. 3, pp. 473~489.
- (5) McIver, D. B., 1972, "Hamilton's Principle for Systems of Changing Mass," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 7, pp. 249~261.
- (6) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand.