

# 임의의 단면을 갖는 보의 전단중심 결정에 관한 연구

오택열\*, 변창환\*\*, 유용석\*\*\*, 권영하\*

## A Study on Determination of Shear Center of Beam Having Arbitrary Cross Section

Teak-Yul Oh\*, Chang-Hwan Byun\*\*, Young-Seok Yu\*\*\*, and Young-Ha Kwon\*

### ABSTRACT

It is important to determinate the shear center of beam having arbitrary cross-section in structures. In this study, we have introduced the determination of shear center that gets the equivalent stiffness matrix representing arbitrary cross section of beam and applies energy equivalence theory. This method shows the results of applying on examples that we know the exact and approximate solution of open and cross section of beam. This study also compares with the shear center of composite rotor blade got by the experiment and by the suggested method.

**Key Words** : Shear Center(전단중심), Equivalent Stiffness Matrix(등가강성행렬), Energy Equivalence Theory(에너지 동등개념), Arbitrary Cross Section(임의단면)

### 1. 서론

전단중심은 굽힘 모멘트만을 일으키고 비틀림 모멘트를 생기지 않게 하는 단면내의 특정한 점으로 정의되고, 단면의 형상치수에 의하여 결정되는 특정한 점으로써, 일반적으로 주어진 단면의 주축에 평행하게 전단응력의 합력을 구하고 양 합력의 교점으로 결정되는 것으로 알려졌으나, 이 정의를 그대로 적용하는 것은 쉬운 일이 아니다. 특히 두께가 얇은 개방 단면(open cross section)을 가진 보의 비틀림에 매우 약하기 때문에 전단중심의 위치를 찾고 비틀림의 영향을 고려하는 것은 구조적으로 매우 중요하다.

전단중심은 1913년 Timoshenko에 의해 처음으로

로 구해졌으며, 엄밀해나 근사해를 알 수 있는 단순한 형상을 제외한 임의의 단면을 갖거나 두 가지 이상의 다른 소재로 이루어진 조립보(built-up beam)에 대해서는 어려운 문제이다.

특히, 현대의 헬리콥터용 회전익은 전형적인 복합재료로 구성된 구조물로 비등방성, 비균질성 재료이다. 이러한 진보적인 회전익은 힌지 없는, 베어링 없는 허브의 설계를 가능케 했고 공력탄성학적 안정성 향상을 위한 구조적 연성을 제공하였다. 하지만 인장-전단-비틀림-굽힘변형이 연성되어 있을 수 있고 워핑 등의 효과는 심각하다. 이와 같은 복잡성은 기존의 오일러 빔 이론을 무효하게 만들었지만 아직은 잠재적으로 커다란 굽힘을 하고, 스핀 방향의 비균일성, 단면이 복잡하게

2001년 4월 27일 접수  
\* 경희대학교 기계산업시스템공학부  
\*\* 경희대학교 대학원 기계공학과  
\*\*\* ㈜칸티바이오

변화하는 회전익을 설명할 수 있는 충분하고 일반적인 이론은 존재하지 않는다. 동시에 회전익을 1 차원 보로 가정하여 이론을 전개하는 경우, 보에 관한 적절한 운동기하학을 매끄럽게 기술한다고 해도 엄격하게는 3 차원 탄성계수들로 이루어지는 구상방정식들의 근사적 서술일 수 밖에 없다. 이럴 경우 본질적으로 내재하는 1 차원 보 모델링으로 인한 오차를 어떻게 최소화하느냐 하는 것이 관건이 된다. 물론 3 차원 유한요소 모델이 채택될 수는 있지만 비용이 매우 비싸고 결과의 해석이 쉽지 않다. 따라서, 일반적인 회전익은 축방향 길이가 폭에 비해 길기 때문에 컴퓨터를 이용한 해석의 관점에서 1 차원 모델링은 최적의 선택으로 보인다.

Reissner<sup>(1)(2)</sup>는 최소상보에너지법(minimum complementary energy analysis)을 이용하여 2 차 미분방정식을 풀었으며, Kosmatka<sup>(3)</sup>는 멱급수 해법(power series solution)과 saint-venant의 반역법(semi-inverse method)을 사용하여 그 해를 구하였다. 이와 같이 전단중심을 구하기 위하여 복잡한 수식을 풀어야 하는 많은 노력과 특별한 유한요소를 개발하는 등의 비싼 대가를 치러 왔다.<sup>(4)</sup>

자유도 저감법은 컴퓨터를 이용한 수치해법이 발달하면서 계산상 과다한 메모리와 저장용량을 줄이기 위하여 도입되기 시작했다. Guyan<sup>(5)</sup>의 연구를 시작으로 Irons 등<sup>(6,7,8)</sup>의 많은 학자들이 자유도 저감법에 대한 논문을 발표하였는데, 본 연구에서는 Guyan의 저감법(Reduction)으로 알려진 자유도 저감법을 적용하여 임의의 단면을 갖는 보의 등가 강성 행렬을 추출하고, 이를 전단중심의 정의에 근거하여 연성항을 배제하는 방법으로 전단중심을 구하였다. 연구결과의 타당성 검증을 위하여 엄밀해를 알고 있는 간단한 폐쇄 단면(closed cross section)과 개방 단면(open cross section)의 근사해와 비교해 보았으며, 복합소재로 만들어진 헬리콥터용 회전익(rotor blade)의 전단중심을 주진의<sup>(9)</sup> 실험값과 비교하여 검증하였다.

## 2. 에너지 동등 개념

Fig. 1 과 같이 임의의 단면을 갖는 외팔보의 자유단에서 전단중심을 O 라하고, 중심점에서 y 축방향으로 a, z 축 방향으로 b 만큼 떨어진 곳에서

의 좌표 원점을 O'라고 할 때, O 에서의 자유도는 다음과 같이 정의된다.

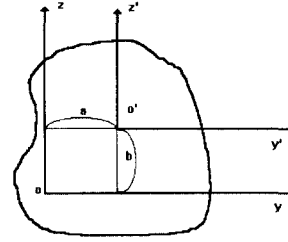


Fig. 1 Coordinate system

$$(u)^T = (x \ y \ z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z) \quad (1)$$

원점 O 와 u 로 표현되는 좌표계는 관성주축방향이라 가정하고, O'를 원점으로 하는 좌표계 u'를 아래와 같이 정의한다. u'의 좌표계 역시관성주축방향이라 가정한다. 주축방향의 결정은 Oh<sup>(10,11)</sup>의 방법을 이용하였다.

$$(u')^T = (x' \ y' \ z' \ \theta'_x \ \theta'_y \ \theta'_z) \quad (2)$$

이 때 자유단에서의 하중벡터 f 와 변위와의 관계는 아래와 같이 표현되고

$$(f) = [A](u) = [B](u')$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \theta'_x \\ \theta'_y \\ \theta'_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

이때 강성행렬[A]는 관성축계에서 유도 되므로 Fig. 1 과 같은 좌표계에서 위와 같은 형태를 갖게 된다.

Fig.1 에서 O 와 O'에서의 변위의 관계를 관찰하면 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 x' &= x + b\theta_y - a\theta_z & (a) \\
 y' &= y - b\theta_x & (b) \\
 z' &= z + a\theta_x & (c) \\
 \theta'_x &= \theta_x & (d) \\
 \theta'_y &= \theta_y & (e) \\
 \theta'_z &= \theta_z & (f)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

전단중심의 위치를 결정하기 위하여, 전단중심은 굽힘 모멘트만을 일으키고 비틀림 모멘트를 생기지 않게 하는 단면내의 축정한 점으로 정의되므로, 전단중심과 관계되는 항들로 구성되는 힘-변위의 관계식을 구성하면 아래와 같게 되고, 여기서 a 와 b 는 전단중심에서의 거리가 되는 것이다.

$$\begin{aligned}
 (f_s) &= [A_s](u_s) = [B_s](u'_s) \\
 &= \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ \theta_x \end{pmatrix} & (5) \\
 &= \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ \theta'_x \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

외팔보의 자유단에 동일한 하중이 가해질 때 보의 변형에너지는 중심의 위치와 무관하게 거시적으로 동일하다는 에너지 동등 개념을 적용하면

$$\frac{1}{2} (u_s)^T [A_s] (u_s) = \frac{1}{2} (u'_s)^T [B_s] (u'_s) \tag{6}$$

가 성립한다. 각 항을 풀어서 정리하여 양변의 계수를 비교하면 다음과 같이 전단중심의 위치를 결정할 수 있다.

$$a = -\frac{b_{34}}{b_{33}}, \quad b = \frac{b_{24}}{b_{22}} \tag{7}$$

### 3. 등가 강성 행렬

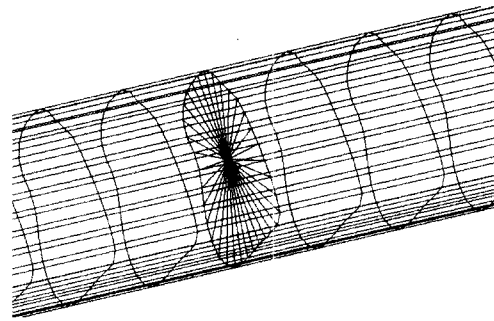


Fig. 2 Illustration of reduction technique

임의 단면의 등가 강성 행렬(Equivalent Stiffness Matrix)을 추출하기 위하여 Fig. 2 와 같이 3 차원 유한요소 모델에 임의의 비구조적 절점(Non-structural Node)을 구하고자 하는 단면에 부여하고, 이 절점에 단면내의 각 절점이 나타내는 강성과 자유도의 방향을 고려하여 전체 단면의 특성을 나타낼 수 있는 자유도를 부여한다. 다음에 이 비구조적 절점에 자유도 저감법을 이용하여 단면의 거동을 대표할 수 있도록 하여 강성행렬을 출력시키는 방식으로 단면의 등가 강성 행렬을 얻는다.

본 논문은 전통적인 Guyan 의 저감법<sup>(5)</sup>을 사용하였는데 일반적으로 이 방법은 질량과 감쇠 행렬의 값은 근사해를 갖지만 강성 행렬의 경우는 정확한 등가 행렬(exact equivalent matrix)을 얻을 수 있는 것으로 알려져 있다.<sup>(12)</sup>

이와 같이 출력된 등가 강성 행렬을 이용하면 간단한 행렬연산으로 전단중심을 결정할 수 있다.

이와 같은 일련의 과정은 기존의 상용 유한요소 해석 소프트웨어를 이용하면 별도의 특별한 프로그래밍 과정 없이 가능하다. 따라서, 복잡한 형태 혹은 조립보의 경우, 간단하게 단면 모델링을

이용한 3 차원 보 모델링을 수행하고 이를 이용하여 범용 유한요소해석 프로그램의 자유도 저감법을 수행하여 등가 강성 행렬을 간단히 얻을 수 있다는 것을 의미하므로 적용상의 간편성을 확보할 수 있다.

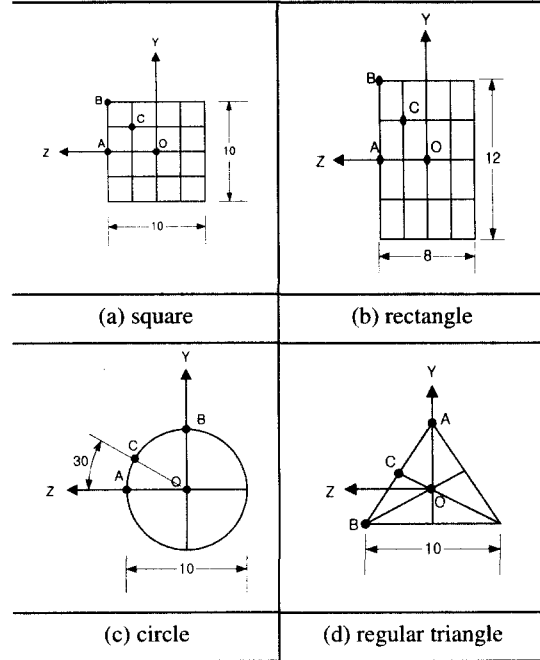
#### 4. 결과

에너지 동등 개념을 이용한 전단중심의 위치에 관한 식을 검증하기 위하여 엄밀해를 알고 있는 간단한 폐쇄 단면(closed cross section)을 갖는 균일보와 근사해를 알고 있는 개방 단면(open cross section)을 갖는 균일보를 이용하여 그 해의 타당성을 검토하였다. 또한, 실험적으로 구한 전단중심의 위치와 본 연구의 방법을 이용한 결과와 비교하여 보았다.

Table 1 의 (a), (b), (c), (d)와 같이 정사각형, 직사각형, 원, 정삼각형 단면을 갖고 있는 길이 1,000mm 인 외팔보를 이용하여 각각의 강성행렬을 추출하고 이를 이용하여 전단중심의 위치를 확인하였다. 이 경우 전단중심은 모두 O 점에 위치하게 되며, A~C 까지의 다른 위치에서 추론한 강성행렬로부터 계산된 전단중심의 위치는 O 점까지의 거리로 나타나는 것이 정확한 해가 된다.

해석 결과는 Table 2 에 나타내었으며, 해석결과

Table 1 Types of closed cross section of beam (mm)



는 엄밀해와 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

개방 단면(open cross section)의 경우에 대해서는 Table 3 에 정리한 것과 같이 Boresti<sup>(13)</sup>의 근사해와 비교해 보았다. 해석결과는 Table 4 에 나타내었

Table 2 Results of closed cross section of beam for shear center (mm)

Type of cross section	Center	Y			Z		
		Exact	In this study	Error (%)	Exact	In this study	Error (%)
Square	A	0	0	0	5	5.009	0.18
	B	5	5.009	0.18	5	5.009	0.18
	C	2.5	2.5	0	2.5	2.5	0
Rectangle	A	0	0	0	4	4.001	0.025
	B	6	6.002	0.033	4	4.001	0.025
	C	3	3.001	0.033	2	2.0005	0.025
Circle	A	0	0	0	5	5.0003	0.006
	B	5	5.0003	0.006	0	0	0
	C	2.5	2.50003	0.001	4.3301	4.3302	0.002
Regular Triangle	A	5.773	5.774	0.017	0	0	0
	B	2.887	2.888	0.035	5	5	0
	C	1.4435	1.4435	0	2.5	2.5	0

으며 근사해의 전단중심과 본 연구방법으로 구한 전단중심에 하중을 가하여 나타나는 비틀림각  $\theta_x$  와 처짐각  $\theta_y$  의 비  $\theta_x/\theta_y$  를 비교한 결과 오히려 본 연구방법으로 구한 전단중심에서의 비틀림이 적게 나타나고 있음을 알 수 있다.

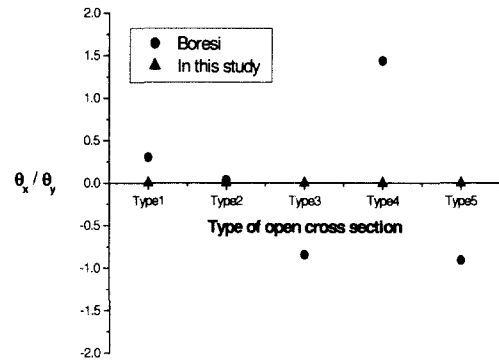
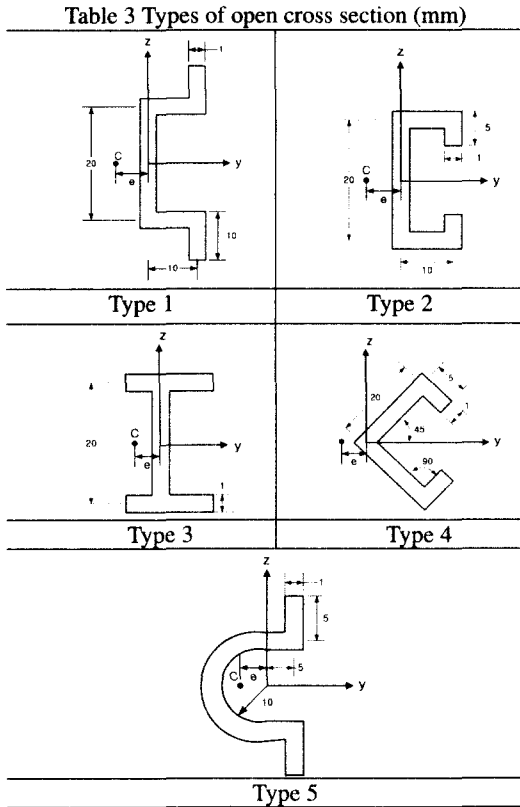


Fig. 3 Result of  $\theta_x/\theta_y$  for open cross section

Table 4 Results of open cross section of beam for shear center

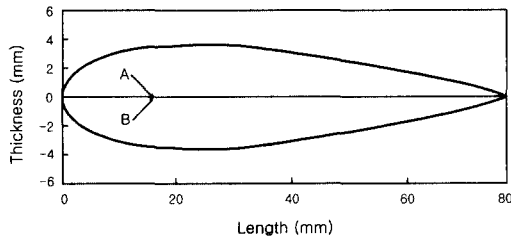
Type		e(mm)	$\theta_x/\theta_y$
Type 1	Boresi	3.1494	0.299472
	In this study	3.0397	-0.00069
Type 2	Boresi	5.6355	0.030557
	In this study	5.5981	0.0003
Type 3	Boresi	2.5714	-0.84471
	In this study	3.0082	-0.00012
Type 4	Boresi	1.4002	1.437164
	In this study	1.3544	-0.00028
Type 5	Boresi	15.0275	-0.90696
	In this study	14.7816	-0.00037

이는 Boresi 의 해 역시 근사해 이기 때문에 나타나는 결과일 수 있다. Fig. 3 은 Boresi 의 근사해와 본 연구방법에 의한 전단중심에서의  $\theta_x/\theta_y$  값을 비교하여 본 결과이다.

앞에서 예시한 방법은 단면의 형상이나 재질에 어떠한 전제로 가정되지 않았다. 따라서 본 논문에서 사용한 방법은 조립보에도 적용될 수 있다.

다음으로 주진<sup>(9)</sup>의 논문에서 제시된 NACA-0012 형상의 복합재료 회전익에서 실험에 의하여 구한 전단중심과 본 이론에 의하여 해석적으로 구한 전단중심을 비교하여 타당성 검토를 수행하였다.

Fig. 4 는 주진<sup>(9)</sup>의 실험결과와 본 논문의 방법으로 구한 전단중심의 위치를 도시한 그림이다. 두 전단중심의 차이는 실제 실험적으로 전단중심을 구할 때 완벽한 고정단을 표현할 수 없는 등의 실험상의 오차와 유한요소 모델이 가지는 이산화 과정에서의 오차를 고려한다면 크지 않은 것으로 생각된다.



A : Shear Center (Experiment) B : Shear Center (In this study)

Fig. 4 Shear center of the NACA-0012 composite blade

### 5. 결론

복합소재로 이루어진 회전익등에 있어서 보의 전단중심을 구하는 것은 중요한 의미를 가져왔다. 본 논문에서는 유한요소법상의 자유도 저감법을 이용하여 임의 단면의 등가 강성 행렬을 추출하고 이 강성행렬을 이용하여 전단중심을 얻어내는 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 엄밀해 혹은 근사해를 알고 있는 개방과 폐쇄 단면(open and closed cross section)에 적용하여 그 결과를 비교하였고, 훌륭한 일치성을 보이고 있다. 2 절에서 제시한 전단중심의 위치는 단면의 형상이나 재질에 어떠한 가정도 전제하지 않았기 때문에 이 방법은 여러 재질로 이루어진 조립보(built-up beam)에도 적용할 수 있고, 이를 주진<sup>(9)</sup>의 복합재료 회전익의 실험값과 비교하여 검증하였다. 제안된 방법은 기존의 상용 유한요소해석 프로그램에서 간단히 강성 행렬을 추출할 수 있기 때문에 (예를 들면 MSC/NASTRAN 의 DMAP) 새로운 프로그램 개발과 같은 낭비를 줄일 수 있을 뿐만 아니라, 단순히 특정 형상의 단면만을 모델링하여 이를 돌출시키는 방법으로 간단히 모델링한 유한요소 모델을 이용하므로 계산상의 용이함 까지 갖추고 있다고 생각된다.

### 참고문헌

1. E. Reissner, "A Note on the Shear Center Problem for Shear-Deformable Plates," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 32, No. 5, pp. 679-682, 1994.
2. E. Reissner, "The Shear Center Problem for

- Nonlinear Material Behavior," *Transactions of the ASME*, Vol. 62, pp. 822-823, 1995.
3. J. B. Kosmatka, "General Behavior and Shear Center Location of Prismatic Anisotropic Beams via Power Series," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, No. 3, pp. 417-439, 1994.
4. R. W. Mindlin, "Calculation of the Cross Section Properties and Shear Stress of Composite Rotor Blade," *Vertica*, Vol. 6, 1982.
5. R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 3, pp. 380, 1965.
6. B. M. Irons, "Structural Eigenvalue Problems ; elimination of Unwanted Variables," *AIAA Journal*, Vol. 3, pp. 961-962, 1965.
7. G. C. Wright, G. A. Miles, "An Economical Method for Determining the Smallest Eigenvalues of Large Linear Systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 25-33.
8. M. Geradin, "Error Bounds for Eigenvalue Analysis by Elimination of Variables," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 19, pp 111-132.
9. 주진, "힌지 없는 헬리콥터 로우터의 정지 비행 시 동적특성에 관한 실험적 연구," 서울대학교 박사학위 논문, 1993.
10. Taek-Yul Oh, Myung-Jin Choi, Yong-Seok Yu, Kyung-Duck Chae, "Determination of the Principal Directions of Composite Helicopter Rotor Blades with Arbitrary Cross Sections," *KSME International Journal*, Vol. 14, No. 3, pp. 291~297, 2000.
11. 유용석, 최명진, 오택열, "임의 단면을 갖는 복합재료 회전익의 주축계 결정에 관한 연구," 대한기계학회논문(A), 제 21 권, 제 6 호, pp. 981~987, 1997.
12. The MacNeal-Schwendler Corporation, "MSC/NASTRAN Dynamics Seminar Notes," The MacNeal-Schwendler Corporation, pp. 4-9 ~ 4-11, 1992.
13. Arthur P. Boresi, Richard J. Schmidt, Omar M. Sidebottom, "Advanced Mechanics of Materials," John Wiley & Sons, pp. 331-361, 1993.