

## B-Spline 기저 고차경계요소법에 의한 자유수면하의 2차원 물체주위 유동해석

유재문\*, 김양익\*\*

### Analysis of Steady Flow Around a Two-Dimensional Body Under the Free Surface Using B-Spline Based Higher Order Panel Method

Jae-Moon Lew\* and Yang-Ik Kim\*\*

#### 요 약

B-spline을 이용하여 물체의 형상과 포텐셜을 표현함으로써, 저차경계요소법의 단점들을 극복하고 수치계산의 정도를 높이기 위한 고차 패널법을 개발하였다. 물체표면과 자유표면에 법선 다이폴과 소스를 분포시켰으며, 자유표면 및 방사조건을 만족시키기 위해 상류차분식을 사용하는 대신 B-spline의 기저함수를 미분하여 선형화된 자유표면 경계조건에 직접 적용하였다. 이 방법을 적용함으로써 Dawson 방법에서 문제가 되었던 수치감쇠 문제를 피할 수 있었다.

수치계산 프로그램을 검증하기 위해 2차원 원주주위의 유동계산과 날개면 주위의 유동해석을 수행하였으며, B-spline 기저 고차패널법에 의한 수치계산 결과가 저차패널법에 비해 빠른 수렴성과 정확성을 보였고 계산에 필요한 패널 수가 현저히 줄어드는 대단히 만족스러운 결과를 얻었다.

※Keywords: B-spline based higher order panel method(B-spline 기저 고차 패널법), Low order panel method(저차패널법), numerical damping(수치감쇠), linearized free surface condition(선형화된 자유표면조건), Dawson's method(Dawson 방법)

#### Abstract

A two-dimensional higher order panel method using B-splines has been developed to overcome the disadvantages of the low order panel method and to obtain more accurate solution. The sources and the normal dipoles are distributed on both the body and the free surface. Instead of applying the upwind finite difference schemes to satisfy the linearized free surface and the radiation condition, the derivatives of the basis functions of the B-splines are directly

---

접수일자: 2001년 6월 23일, 승인일자: 2001년 11월 4일

\* 정회원, 충남대학교 교수(E-mail: jmlw@cnu.ac.kr)

\*\* 정회원, 현대중공업 연구원(연구당시 충남대학교 대학원, E-mail: daroo@hhi.co.kr)

applied to the linearized free surface condition. Numerical damping in the Dawson's method are avoided in the present computations.

In order to validate the present method, numerical computations are carried out for a submerged cylinder and a two-dimensional hydrofoil steadily moving beneath a free surface. The numerical results show that fast convergence and better accuracies have been achieved by the present method.

## 1. 서론

Dawson(1977)이 이중선체모형을 기본유동으로 도입하고, 이에 대한 자유표면 조건을 선형화한 다음 이를 상류 유한차분형태로 자유표면 조건과 방사조건을 만족시킴으로써 선박의 조파저항을 계산한 이래 Rankine 쏘스법은 많은 연구자들에 의해 선체 주위 유동해석에 이용되어왔다. Raven(1988), Kim(1989), Janson(1997) 등은 상방향 패널법(raised panel method)을 사용하여 비선형 해의 수렴성을 개선하는 연구를 수행한 바 있으며, 홍사영(1994)은 8점 경계요소를 이용하여 물체표면의 형상을 정확하게 표현하고, 자유표면에서의 해의 거동을 2차 스플라인 함수로 근사하는 Rankine 쏘스에 기초한 고차 경계요소법을 개발하였다. 전호환 등(1997)은 소수선면 쌍동선의 조파저항 계산을 수행하였으며, 김도현(2000)은 일정 세기의 Rankine 쏘스를 사용하는 상방향 패널법을 이용하고, Preconditioned GMRES를 도입하여 수치계산 시간을 단축시켰다.

B-spline을 기저로 하는 고차패널법은 조충호 등(1999)이 2차원 수중익 문제에 적용한 이래 김건도 등(2000)은 3차원 유동해석으로 확장하였고, 조충호 등은 2차원 문제에 대한 수치실험을 수행한 바 있으나 이들은 모두 무한유체 중의 유동해석을 다루었다. B-Spline은 제어점을 이용하기 때문에 물체형상이나 포텐셜을 표현하기에 적합하고, 미분이 편리하기 때문에 선형화된 자유표면 조건을 수치계산에 의해 만족시키는 Rankine 쏘스법에 의한 조파저항 계산에 적합한 방법이라 할 수 있다. B-Spline을 이용함으로써 선형화된

자유표면 조건식의 미분항을 표현하는데 기존의 차분식 대신 해석적인 미분이 가능하게 되며 물체와 포텐셜을 자연스러운 곡선으로 표현함으로써 수렴성과 계산정도향상을 기대할 수 있다.

Hsin(1993)은 영향계수의 해석적 계산식을 포함하여 무한 유체 중의 2차원 문제에 대한 일반적인 B-Spline 기저 고차 패널법을 개발하였고, Maniar(1995)는 이를 3차원문제까지 확장하였다. 그러나 위의 두 논문은 수학적 엄밀성에도 불구하고 유기 포텐셜의 계산에 유한항의 급수전개를 적용함으로써 급수항의 절단으로 인한 오차를 포함하는 문제가 있다.

Lee and Kerwin(1999)은 이런 문제점을 개선하기 위해 특이적분의 적분변수를 변환하여 특이성을 제거하는 새로운 방법을 찾아내어 비 특이화된 적분을 Gauss 구적법으로 수행함으로써 계산의 정도를 높였다.

본 논문에서는 Rankine 쏘스를 이용한 B-Spline기저 고차패널법을 이용하여 자유표면하에서 일정속도로 진행되는 2차원 물체주위의 유동해석을 수행하여 수치해석의 타당성과 저차패널법과의 수렴성 및 계산정도를 비교하였다.

## 2. 경계치 문제의 정식화

Fig.1과 같이 교란되지 않은 정수면과 실린더의 중앙을 원점으로 하고 연직 상방향을 y 축의 양의 방향, 우측을 x 축의 양의 방향으로 한다. 유체를 비점성, 비압축성으로 하고 유동을 비회전성으로 가정하면 속도포텐셜이 존재하며 다음과 같은 라플라스 방정식을 만족하여야 한다.

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0, \text{ in the fluid domain (1)}$$

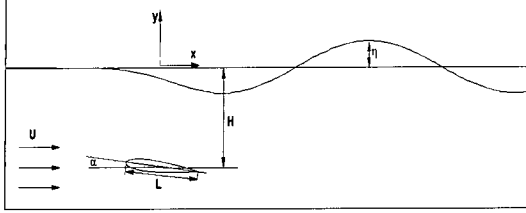


Fig.1 Descriptions of coordinate system

전속도 포텐셜은 균일유동 속도 포텐셜과 교란 속도 포텐셜로 나눌 수 있다.

$$\Phi(x, y) = Ux + \phi(x, y) \quad (2)$$

식(1)로 표현되는 Laplace 방정식은 다음과 같은 경계조건을 부여함으로써 유일해가 구해진다.

선형화된 자유표면경계조건:

$$\phi_{xx} + F_n^{-2} \phi_y = 0, \quad \text{on } y=0 \quad (3)$$

여기서,  $F_n = U/\sqrt{gL}$ 이며, 교란되지 않은 정수면에서 만족되어야 할 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \text{on } y=0 \quad (4)$$

식(4)와 선형화된 자유수면조건 식을 이용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = F_n^2 \phi_{xx}, \quad \text{on } y=0 \quad (5)$$

물체표면경계조건

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } S_B \quad (6)$$

방사조건

$$\nabla \phi \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (7)$$

해지면 경계조건

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \nabla \phi = 0 \quad (8)$$

### 3. 적분방정식

고차 경계요소법에서는 B-Spline의 장점인 해석적 미분을 이용하기 위해 포텐셜을 미지수로 하는 방정식을 풀어야 한다. 따라서 포텐셜을 표현할 수 있는 제어꼭지점을 미지항으로 풀기 위해서 물체 표면과 자유표면에 다이폴과 소스를 분포시키고 경계조건을 적용시키도록 한다.

Green 정리(Newman, 1966)로부터 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{2} = & - \int_{S_B} \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds + \int_{S_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} G ds \\ & - \int_{S_F} \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds + \int_{S_F} \frac{\partial \phi}{\partial n} G ds \quad (9) \\ & - \int_{S_W} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds \end{aligned}$$

식(9)에서,  $G = 1/2\pi \log r$ 은 2차원 Rankine 소스를,  $S_B$ ,  $S_F$ 는 물체 표면과 자유표면을 각각 나타내며,  $S_W$ 에 대한 적분항은 양력문제에 적용할 때 Kutta 조건을 만족시키기 위해 포함되는 wake sheet에 대한 적분이다.

식(9)의 적분방정식에 선형화된 경계조건, 식(5)를 대입하면 다음과 같은 적분방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi + \int_{S_B} \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds + \int_{S_F} \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds \\ - F_n^2 \int_{S_F} \phi_{xx} G ds \\ + \int_{S_W} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int_{S_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} G ds \end{aligned} \quad (10)$$

이 적분방정식은 정수면과 물체표면에 다이폴과 소스를 모두 분포시켜 미지수인 포텐셜,  $\phi$ ,을 구하도록 구성되었음을 알 수 있다.

### 4. B-Spline을 이용한 고차 경계요소법

B-spline을 이용하여 포텐셜을 나타내는 제어 꼭지점( $\phi^v$ )와 B-Spline의 기저함수 곱의 합으로

포텐셜을 나타낼 수 있다.

$$\phi(u) = \sum_{a=0}^p N_{s-p+a}(u) \phi_{s-p+a}^v \quad (11)$$

여기서 N은 B-Spline의 기저함수, p는 차수 (degree), s는 매개변수(u)가 포함된 knot span을 나타낸다. 식(10)으로 표현된 적분방정식을 풀기 위해서는 다이폴과 쏘스에 의한 유기속도를 계산하여야 한다. 이창섭 등(1999)은 물체표면의 다이폴과 쏘스의 유기속도 계산을 위한 구분구적법과 해석해를 구한 바 있다. 본 논문에서는 물체 표면에 분포된 쏘스와 다이폴의 적분항은 이창섭 등의 결과를 이용하고 정수면에 분포된 다이폴의 적분항은 물체표면의 적분과 유사하게 계산하였다. 그러나 정수면에 분포된 쏘스의 적분항은 쏘스의 세기 항이 포텐셜의 2계 미분항으로 표현되기 때문에 물체표면의 쏘스의 적분항과는 그 처리가 다르며 다음 식으로 계산하였다(김양익, 2000).

#### 4.1 정수면에 분포된 쏘스

선형화된 자유표면 조건에 Rankine 쏘스를 분포시키기 때문에 정수면에 분포된 쏘스의 적분을 수행해야 한다. 쏘스의 세기가 미지항이 되며 포텐셜의 2계 미분항이다. 포텐셜의 2계 미분항은 B-Spline으로 표현되고 B-Spline은 매개변수의 함수이기 때문에 다음과 같이 매개변수의 미분으로 나타낸다.

$$\phi_{xx} = x_u^{-2} \phi_{uu} - x_{uu} x_u^{-3} \phi_u \quad (12)$$

포텐셜을 B-spline으로 표현하기 때문에 미분은 기저함수의 미분으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_{uu} = \sum_{a=0}^p N_{s-p+a,uu}(u) \phi_{s-p+a}^v \quad (13)$$

따라서 자유수면에 분포된 쏘스항의 적분은 다음과 같이 표현된다( $\Gamma^{Sx}$ 는 정수면에 분포된 쏘스의 적분항을 나타낸다).

$$\begin{aligned} \Gamma^{Sx} &= \int \phi_{xx} G dx \\ &= \int_{u_L}^{u_R} \sum_{a=0}^p \phi_{s-p+a}^v \{ N_{s-p+a,uu}(u) x_u^{-2} - N_{s-p+a,uu}(u) x_{uu} x_u^{-3} \} G ds \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4.2 정수면에 분포된 쏘스의 자기유기

자유수면에 분포된 쏘스의 자기유기는 쏘스는 log 함수이기 때문에 제어점으로 수렴할 때 식은 발산하기 때문에 이창섭 등(1999)이 사용했던 제어점을 원점으로 하는 곡선길이( $s^*$ )를 정의하고 쏘스의 세기( $\phi_{xx}$ )를  $s^*$ 의 p차의 다항식으로 정의한다.  $s^*$ 로 정의된 식은 해석적으로 구할 수 있는 항과 1.0으로 수렴하는 정규함수의 형태로 나타낼 수 있으며 이를 수치적분으로 처리한다.  $\phi_{xx}$ 는  $s^*$ 로 나타낼 수 있으며, 또한 B-Spline의 기저함수로의 미분으로 나타낼 수 있다.

([S]는  $s^*$ 의 행렬식, { $\alpha$ }는 다항식의 계수)

$$\phi_{xx} = \sum_{b=0}^p \alpha_{j,b} s^{*b} = [S]\{\alpha\} \quad (15)$$

식(12)이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\{\phi_{xx}\} = ([N_{uu}] + [N_u])\{\phi^v\} = [M]\{\phi^v\} \quad (16)$$

([ $N_{uu}$ ]는 2계미분 행렬식, { $\phi^v$ } 제어꼭지점의 벡터, [M]=[ $N_{uu}$ ] + [ $N_u$ ])

따라서 식(15)와 식(16)식을 이용하여 계수  $\alpha$ 를 구할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [S^{-1}][M]\{\phi^v\} \\ &= [S^{-1}]( [N_{uu}] + [N_u] )\{\phi^v\} \\ &= [R]\{\phi^v\} \end{aligned} \quad (17)$$

식(14)는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_b &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{s_R^{*b+1}}{b+1} \log s_R^* - \frac{s_R^{*b+1}}{(b+1)^2} \right\} \\ &+ \frac{u_R - u_L}{2} \sum_{k=0}^{N_k-1} w_k \left( s^{*b} \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{s^*} \frac{ds}{du} \right)_k \end{aligned} \quad (18)$$

따라서 정수면에 분포된 쏘스의 자기유기 속도는 다음식으로 표현된다.

$$I_{self,R}^S = \sum_{b=0}^p \alpha_b C_b \quad (19)$$

$$= [R]^T \{C_b\} \{\phi^v\}$$

### 5. Kutta 조건 및 방사조건

양력문제에 적용하기 위해 2차원 정상유동에서 Morino의 Kutta 조건, "날개 끝에서 포텐셜 점프(potential jump)와 wake sheet의 다이폴 세기가 같다", 을 적용하였다. 즉,

$$\Delta \phi = \phi^+ - \phi^- = \phi_{NB-1}^v - \phi_0^v \quad (20)$$

여기서, +는 날개의 윗부분을 -는 날개의 아랫부분을 나타낸다.

식(7)로 표현되는 방사조건을 만족시키기 위해 자유수면 첫 번째 점에서의 1차부터 p-1차까지의 미분계수를 0으로 놓는다.

$$\phi u^{(i)} = \sum_{j=0}^p N_{s-p+a, u^{(i)}}(0) \phi_{s-p+a}^v = 0 \quad (21)$$

$$(i = 1, \dots, p-1)$$

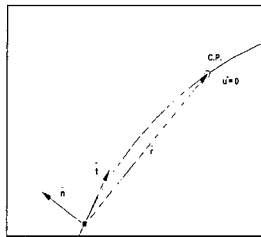


Fig.2 Local curvilinear coordinate

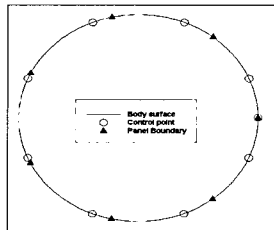


Fig.3 Distributions of panels & control points

B-Spline을 이용해 포텐셜을 표현할 경우에 제어 꼭지점의 수는 B-Spline의 차수(p)와 제어 꼭지점( $N_{\phi^v}$ )의 개수의 합이 된다. 각 패널에 제어점을 하나씩 놓을 경우에는 B-Spline의 차수만큼 경계조건을 만족시키기 위한 제어점이 부족하게 된다. 따라서 Fig.3과 같이 B-spline의 차수에 해당하는 제어점을 추가로 분포하여 경계조건을 만족하도록 하였다. 자유표면에 분포되어 있는 쏘스의 세기는 포텐셜의 2계 미분항으로 표현되며, 이 쏘스의 세기는 부드러운 곡선의 형태가 되어야하기 때문에 본 논문에서는 포텐셜의 차수를 4차로 택하였으며, 물체표면은 3차로 표현하였다.

### 6. 수치계산 및 고찰

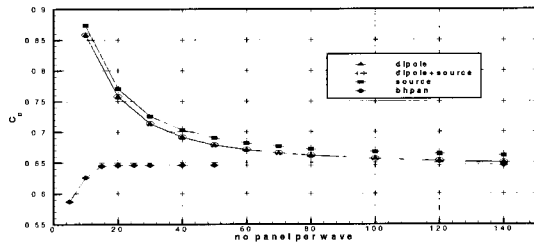
#### 6.1 계산조건

저차패널법의 경우는 제어점이 일반적으로 패널의 중앙부에 위치하고, 고차패널법은 B-Spline의 특성상 미지수인 제어꼭지점의 수가 패널수가 보다 p개(degree)만큼 모자라게된다. 이를 해결하기 위해 추가적인 조건이 없는 한 패널에 상관없이 등 간격으로 제어꼭지점의 수만큼 제어점을 분포하여야 한다. 그러나 Kutta 조건이 들어가지 않는 2차원 실린더 문제에서는 물체의 끝점에서 '포텐셜점프(potential jump)가 없다'는 추가적인 조건을 하나 부여하며 따라서 제어점의 개수는 제어꼭지점보다 하나가 적게 된다. 양력문제의 경우에는 운동학적 Kutta조건을 적용하기 때문에 마찬가지로 제어꼭지점 보다 하나 작은 제어점을 분포하였다.

#### 6.2 물수 실린더 주위 유동계산

B-Spline기저 고차 경계요소법(BHPan)의 수렴성을 시험하기 위해 자유수면 아래에서 일정한 속도로 전진하는 실린더 주위의 유동을 계산하였다. 고차경계요소법의 유용성을 보이기 위해 저차 경계요소법에 의한 수치계산도 병행하였다. 저차 경계요소법에 의한 수치계산은 포텐셜을 기저로 하는 방법과 속도를 기저로 하는 방법을 각각 적용하여 수치계산 방법에 차이를 검토하였다.

검증 계산을 위한 자유표면으로부터 실린더 중심까지의 물수깊이(H)를 실린더 지름(L)으로 무차원화시킨  $H/L=1.0$ 일때  $Fn=V/\sqrt{gL}=1.0$ 에 대한 수치계산을 수행하였다.



**Fig.4** Convergence test of a submerged cylinder with different methods ( $H/L = 1.0$ ,  $Fn = 1.0$ )

Fig.4에는 고차경계요소법에 의한 계산결과와 저차경계요소법에 의한 수렴성 계산결과를 도시하였다. 본 논문에서는 저차경계요소법의 계산방법에 의한 차이를 밝히기 위한 목적으로 다이폴만을 분포시킨 경우 전속도포텐셜 기저 패널법, 다이폴과 소스를 함께 분포시킨 점동속도포텐셜 기저 패널법에 의한 계산결과 및 소스만을 분포시킨 속도기저 저차 패널법에 의한 계산을 모두 수행하여 각 방법에 따른 수렴성과 계산의 정확도를 비교하였다. 물체에 분포된 패널수는 80개로 고정하고 자유수면의 파장당 패널수를 바꿔가며 계산한 결과, 포텐셜 기저 패널법에 의한 수치계산 결과가 속도를 기저로 하는 패널법 비해 동일한 패널수에서 계산정도가 높게 나타나고 있다. 이러한 이유는 포텐셜의 차수(order)가 속도보다 높아 오차는 1차가 낮은데 기인한다고 판단된다. 계산결과로부터 B-Spline 기저 고차패널법에 의한 수치계산 결과는 저차패널법에 비해 매우 빠른 수렴성을 보이고 있음을 알 수 있다. 고차패널법의 경우 한 파장당 20개의 패널을 분포하면 완전히 수렴된 결과를 얻을 수 있었으나 저차패널법의 경우에는 한 파장당 140개 이상의 패널을 분포해야만 완전히 수렴된 결과를 얻을 수 있었다.

이상의 결과로부터 B-spline 기저 고차경계요

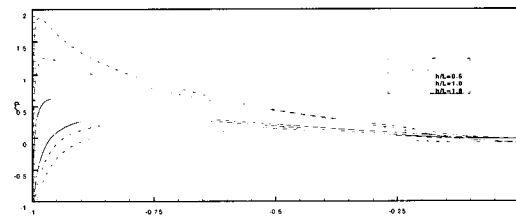
소법에 의한 수치계산 결과는 저차경계요소법에 의한 수치계산 결과에 비해 적은 수의 패널수로 만족스러운 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다.

### 6.3 날개면 주위의 유동 계산

고차 경계요소법을 양력문제에 적용하여 계산정도를 확인하였다. 수치계산은 Parkin 등(1956)에 의해 실험이 수행되고 Bai 등(1994)이 수치계산을 수행한 바 있는 12% 두께의 Joukowski 날개에 대해 수행하였다.

수치계산시 날개 표면에 30개, 자유표면에 파장당 20개의 패널을 분포하였고, 받음각  $5^\circ$ ,  $Fn=0.95$ , 정수면으로부터 뒷날(trailing edge)까지의 물수 깊이(H)를 코드 길이로 무차원화시킨  $H/c = 0.5, 1.0, 1.8$ 에 대해 계산을 수행하고 Bai 등의 계산 결과 및 Parkin 등의 실험결과와 비교하였다.

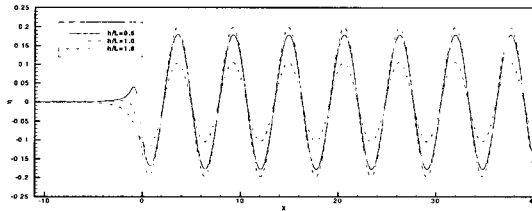
Fig.5는 물수 깊이 변화에 따른 날개표면에서의 압력분포를 나타내고 있다. 날개의 하면에서는 별다른 변화가 없지만 자유표면과 마주하고 있는 날개의 상면에서는 자유표면의 영향에 따라 물수 깊이가 깊어질수록 날개 상하면의 압력차가 줄어드는 것을 알 수 있고, 이 결과는 Bai의 계산결과와 동일한 경향을 보이고 있다.



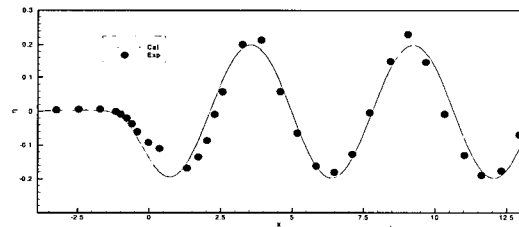
**Fig.5** Pressure distributions on the foil surface with various submergence depths ( $H/c=1.8,1.0,0.5$ )

Fig.6에는 물수 깊이 변화에 따른 자유표면상의 파형을 비교하여 도시하였다. 계산결과와 Parkin 등의 실험결과 및 Bai 등의 계산결과와 정성적으로 유사한 경향을 보이고 있으나, 정량적으로는 다소의 차이를 보이고 있다. Fig.7에는

$Fn=0.95$ ,  $H/c=1.0$ 에 대하여 계산된 파형의 결과를 Parkin 등의 실험결과와 비교하였다. 전체적으로 수치계산 결과는 실험치와 좋은 일치를 보이고 있으나, 파정 부근에서 약간 실험치에 비해 작은 값을 주는 것을 알 수 있다. 이러한 이유는 수치계산시 선형화된 자유표면 조건을 적용하였기 때문이라 생각되며, 실험결과에 보다 가까운 해를 구하기 위해서는 비선형 자유표면 조건을 적용하는 것이 타당할 것으로 생각된다.



**Fig.6** Wave profiles on free surface with various submergence depths ( $H/c = 1.8, 1.0, 0.5$ )



**Fig.7** Comparisons of computed wave profiles with experiments ( $H/c = 1.$ )

## 7. 결론

Rankine 소스와 다이폴을 물체표면과 자유표면에 분포하고 B-spline을 이용하여 물체의 형상과 포텐셜을 표현하여 자유표면 아래서 일정속도로 진행하는 물체 주위의 유동해석을 수행할 수 있는 고차경계요소법을 개발하였다. 적은 수의 패널로 수치계산의 정도를 높일 수 있었으며, 특히 자유표면조건과 방사조건을 만족시키기 위해 Dawson 등이 사용하였던 상류차분식을 사용하는 대신 B-spline의 기저함수를 미분하여 자유표면

경계조건에 직접 적용하였다. 2차원 원주주위의 유동계산과 날개면 주위의 유동해석을 수행하였으며, B-spline 기저 고차패널법에 의한 수치계산 결과가 저차패널법에 비해 빠른 수렴성과 정확성을 보였고 계산에 필요한 패널의 수가 현저히 줄어 대단히 만족스러운 결과를 얻었다.

앞으로 3차원 물체의 조파저항 계산문제와 비선형 경계조건 적용이 필요하다고 여겨진다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 목적기초 연구과제(96-0200-14-01-3)의 일부로 수행된 것으로, 위 기관의 후원에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- Dawson, C.W., 1977, "A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems", 2nd Int. Conf. on Num. Ship Hydrodynamics, U.S.A.
- Kim, K.J., 1989, "Ship Flow Calculations and Resistance Minimization," Ph.D. dissertation, Chalmers Univ., Gothenburg, Sweden
- Janson, C.E., 1997, "Potential Flow Panel Methods for the calculations of Free-Surface Flows with Lift," Ph.D. dissertation, Chalmers Univ., Gothenburg, Sweden
- Raven H.C., 1996, "A Solution Method for the Nonlinear Ship Wave Resistance Problem," Ph. D. dissertation, Delft Univ. of Tech., Netherlands
- 홍사영, 최항순, 1995, "고차경계요소법에 의한 선체주위 유동해석," 대한조선학회 논문집, 제 32권 1호, pp. 42-57
- 전호환, 이명희, 주영렬, 장학수, 1997, "Rankine 소스 패널법을 이용한 소수선면 쌍동선의 조파저항 계산," 대한조선학회 논문집, 제 34권 제2호, pp. 27-38

- 김도현, "비선형 조파문제 해석을 이용한 수치기법 연구," 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 2000
- 조충호, 이창섭, 2000, "B-스플라인 고차패널법에 의한 2차원 수중익 문제 해석," 대한조선학회 논문집, 제 37권 제 2호, pp. 9-20
- 김건도, 황의상, 이창섭, 2000, "B-스플라인 고차패널법에 의한 3차원 포텐셜 유동 해석," 대한조선학회논문집, 제 37권 제 2호, pp. 57-69
- Lee, C.-S. & Kerwin, J.-E., 1999, "A B-Spline Based Higher Order Panel Method" Journal of Ship Research, Accepted for publication.
- Hsin, C, Kerwin, J & Newman, J., 1994, "A High-Order Panel Method Based on B-Splines" Proc. 6th Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, U.S.A.
- Maniar, H.D. 1995, "A three dimensional higher order panel method based on B-spline". Ph. D. Thesis, Department of Ocean Engineering, MIT
- 조충호, 이창섭, "2차원 B-스플라인 기저 고차패널법의 수치실험" 대한조선학회논문집, 제37권 제 3호, pp27~36
- 김양익, 2000, "B-Spline 기저 고차 경계 소법에 의한 2차원 물체주위 유동해석", 충남대학교 대학원 석사학위논문
- Bai, K. J. and Han, J. M., 1994, "A Localized Finite-Element Method for the Nonlinear Steady Waves Due to a Two-Dimensional Hydrofoil," J.S.R., Vol. 38, No. 1, pp. 42-51