대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.2, 205-221. June 2002

음수의 본질과 형식적 접근에 의한 음수지도에 관한 고찰

최병철* 우정호**

I. 서 론

최근 학교수학에 대한 교육적 논의에서는 대체로 학습-지도에서 수학의 논리적 구조를 우선시키는 것에 의문이 제기되어 왔으며, 논리적으로 배열된 닫힌 이론 내에 포함되지 않은 의미론적 측면과 관련된 발생적 관계를 중시해 왔다. 개념을 처음부터 정의하는 것이 아니라 적절한 발생적 문맥을 통하여 심상의 구성과정을 거치도록 함으로써 수학적 개념이 현실과 수학을 조직하는 강력한 수단이 되도록 지도할 것을 요구하고 있다.

또한 개념을 지도하기 위한 한 방편으로 많이 사용되는, 발생적 측면을 도외시한 지나친 구체화는 학생들로 하여금 수학화의 과정을 경험하지 못하게 하는 문제점이 있다.

학교수학에서 음수는 중학교 수학에서 수직선 모델과 여러 가지 직관적 모델로 도입된 후, 방정식의 근으로 다루고 고등학교 수학에서 실수체계로 통합되어 형식적으로 다루어지게 된다. 그러나 중학교 1학년에서 다루고 있는 음수의 구체적 모델과 수직선 모델은 불완전하여 여러 가지 모델이 편의적으로 사용되고 있고, 음수개념의 본질에 대한 이해를 할 수 있는 설명이 부재하고, 음수개념의 본질을 바탕으로 한 연산지도가 이루어지고 있지 않다는 문제점이 제기되고 있다.

음수는 역사적으로 오랫동안 인정할 수 없었던 논란의 대상이었고, 그것이 받아들여진 것은 19세기초에 이르러서야 가능했음에도 불구하고 학교수학에서의 음수지도는 그러한 역사적 맥락이 고려되지 않고, 탈문맥화되어 지도되고 있으며 학생들에게 음수를 이미 존재하는 완성된 개념으로 받아들이도록 강요하고 있다.

음수의 인식론적 장애는 Hermann Hankel이 음수를 형식적 대상으로 간주함으로써 전환점을 맞이하고 음수를 자유롭게 사용할 수 있다는 인식의 변화를 통하여 극복되었다 (Hefendehl, 1991). 나아가 어떤 수의 제곱이 음수가 되는 수인 허수를 도입함으로써 수 체계의 형식적 확장이 이루어졌다. 이로 인해 이전의 실제적 수의 지배에서 벗어난, 대수적 구조에 입각한 형식적 수로의 전환이 일어났고 형식적 수 체계가 실제적인 수를 종속시키는 형식의 자유를 가져오게 되었다.

음수와 그 연산은 역사적으로 오랜 기간동안 논란의 대상이었고, 그것은 대수의 발전과 더불어 공리화 과정을 통하여 음수의 존재성이 정당화되면서 극복되었기 때문에 음수의 개념을 학교수학에서 학생들에게 조기에 지도하는 과정 속에서 나타나는 어려움은 피할 수 없는

* 서울사대부중
** 서울대학교

것이다. 그러나 그 어려움을 피하기 위하여 학교수학에서 제시하는 음수지도의 지나친 비형식화와 구체화가 음수개념의 본질과 연산지도에 대한 문제점을 일으키고 있는 것이다.

따라서 본 연구에서는 음수개념을 대상으로 음수의 본질과 그 이해에 따르는 인식론적 장애 요인을 밝히고 음수의 본질에 비추어 음수지도의 개선방향은 찾고자 한다.

Ⅱ. 음수 개념의 본질

1. 음수의 역사

오늘날 방정식 $x+2=0$의 해가 -2라는 것을 쉽게 알고 있지만 음수 -2라는 개념을 받아들이게 된 것이 오랜 역사적 과정을 거쳐 인식의 장애를 극복한 결과라는 것을 알면 놀랄 것이다. 고대 바빌로니아, 이집트, 그리스에서 음수를 인정했다는 증거를 찾을 수 없으며 그리스에서는 기하를 수학의 전형으로 여겼기 때문에 음수를 사용하지 않았다.

음수가 유럽에서 오랫동안 거부되어 왔던 것은 Euclid의 원론이 현상을 바탕으로 연역적 사고를 기본으로 하는 수학의 정신세계를 지배하면서 대수의 발달을 지체시킨 것이 그 이유 중 하나라고 할 수 있다. Klein(1939a)도 이러한 문제점에 대하여 Euclid를 비판하고 있다.

유클리드에게 수는 '일'보다 큰 자연수이고 그것은 단자이다.(Bourbaki, 1999). 유클리드는 수와 크기를 구분하여 사용하고 있으며 무리수의 개념을 두 크기의 통약불가능성(incommen-surability)으로 설명하고 있지만 그것을 수로서 다루고 있지 않는다. 이러한 유클리드의 수 개념은 무(無)보다 작은 수 개념을 논리적으로 인정할 수 없는 것이었다.

유클리드 원론이 기하학을 통하여 논리적 연역적 사고를 발달시키고 수학의 기본이 되게 하였음은 역사의 위대한 업적이지만 한편으로 대수를 다루는 일은 소홀히 하였다. Sfard(1995)는 그러한 문제점을 다음과 같이 지적하고 있다.

> 기하에서는 대수를 다루는 데 있어서, 그 범위를 상당히 제한한 금지 시스템을 만들게 되었다. 예를 들어, 미지수는 보통 길이로 언급되었으며, 그 제곱은 넓이로, 그리고 세제곱은 부피로 여겨졌기 때문에, 다른 거듭제곱은 한동안 결코 문제시되지 못했다. 또한, 3이상의 거듭제곱은 계산에서 인정받지 못했다.(p. 23)

대수방정식의 해를 다루었던 Diophantus(AD 200~284?)는 방정식의 해 중에서 양수로 표현할 수 없는 것이 있다는 것을 알고 있었지만 "엉터리"수로써 배제하였다. 방정식 문제를 다룬 그의 저서 Arithmetica에 나오는 방정식 $4x+20=4$의 해 $x=-4$는 "불가능"한 것이며 "(우항의) 4는 20보다 큰 수이어야 한다"고 기술하고 있다(Burton, 1991). 그런데 그가 대수식의 계산에서 예를 들면 $(x-3)(x-4)$의 곱의 한 부분으로써 +12를 알았다는 것(Kaufmann & Lowry, 1971)은 (-3)(-4)= +12라는 것을 알고 있었으리라는 것을 보여주지만 양수의 계산과정에서 만들어진 부산물로 여겼기에 음수개념에 대한 이해의 한계를 보여주고 있다. Diophantus는 방정식의 해를 구하는데 있어서 일반적인 방법을 갖고 있지 않았다. Arithmetica에서 189개의 방정식 문제들 각각은 다른 방법에 의하여 풀이되고 있다. 이것은 그가 음수의 존재성을 부정하였기 때문에 일차, 또는 이차방정식의 일반형과 일반해를 찾을 수 없었던 것으로도 해석된다. 그는 이차방정식을 다음과 같이 다섯 가지 유형으로 나누어 풀고 있다. $ax^2=bx$, $ax^2=b$, $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=bx$

, $ax^2 = bx + c$ (Kline, 1972, p. 142).

7세기 경 인도의 회계장부에서는 양수를 자산으로 음수를 부채로 사용하고 있다.(Gullberg, 1997). 그 이전에 음수를 처음 사용한 것은 1세기경 중국 한나라 시대의 수학 책인 '구장산술'이다. 총 9장으로 이루어진 이 책은 방정장에서 양수음수의 계산법을 사용하여 양수와 음수의 덧셈, 뺄셈 문제를 다루고 있다.

힌두교의 천문학자인 Brahmagupta(598 ~ 665)는 음수개념을 명확히 이해하고 있었고 그는 음수가 포함된 사칙계산법을 언급하고 있다. 인도 수학자 Bhāskara(1114 ~ 1185)은 양수의 제곱근이 두 개 즉 양의 근과 음의 근이 있음을 지적하고 있다(Kline, 1972).

인도의 수학은 아랍으로 전해졌고 음수와 음수의 계산법 역시 알려졌지만 아랍인들은 음수에 대하여 거부하였다. al-Khowarizmi는 음의 계수를 피하기 위하여 Diophantus가 5가지로 분류한 전통을 따랐다 (Kline, 1972). al-Khowarizmi의 저서는 유럽에 소개되었고 그의 저서의 이름이 algebra의 기원이 되었다. 아랍으로부터 유럽으로 전해진 음수는 15세기 Nicolas Chuquet, 16세기 Stifel에 의하여 엉터리 수로 불리어졌다(Kline, 1972). 16세기경 유럽에서 음수가 사용된 증거는 이탈리아의 수학자 Girolamo Cardano(1501 ~ 1576)가 1545년에 출판한 Ars *magna*이다(Gullberg, 1997). 그러나 그 당시 유럽의 수학자들은 음수를 인정하기를 거부하였는데 Descartes(1596 - 1650)는 음의 근을 "거짓 근"이라고 불렀고 Pascal은 "0보다 작은" 수는 존재하지 않는다고 말하였다. 18세기 프랑스의 수학자 Arnauld는 음수에 대하여 다음과 같은 두 가지 의문을 제기하였다. 첫째, 작은 수에서 큰 수를 빼는 것이 어떻게 가능한가? 둘째, 음수 곱하기 음수가 양수가 되는 것은 모순을 일으킨다. 예를 들어, 1 : -4 가 어떻게 -5: 20과 같을 수 있는가? 첫 번째 의문에 대하여 Prestet은 5냥에서 7냥을 뺀다는 것은 2냥이 빼어질 수 없는 수로 남는 것이라고 말하고 있다. -2는 하나의 대상으로서가 아니라 2를 더 빼어야 하는 것으로 생각하고 있는 것이다. 두 번째 의문에 대하여 그는 기하적 비례를 다룰 때 단순히 부호를 고려해서는 안 된다고 주장하고 있다(Mancosu, 1996). 그러나, 이러한 설명은 19세기까지는 만족스럽게 받아들여지지 않았다. Gottignies(1630 ~ 1689)는 그의 저서 Logistica Universalis(1687)에서 음수에 대한 Prestet의 설명을 강하게 비판하였다. 그는 음수를 '거짓'인 양으로 규정하였고 그것을 그의 저서 Logistica Universalis 에서는 사용하지 않았으나 그럼에도 그는 실용대수에서 그것을 사용할 수는 있음을 인정함으로써 음수를 부정하는 데서 한 발 물러서 있었다. Leibniz(1646 ~ 1716)는 음수가 엉터리 결론과 오개념에 이르게 하지만 그것은 계산에 유용하게 이용될 수 있다고 옹호하고 있다(Gullberg, 1997). Leibniz는 수학의 본질에 대하여 "보편적 수학은 말하자면 상상의 논리이다" 그리고 "정확하게 결정할 수 있는 상상의 영역 안에서 모든 것을"다루어야만 한다고 말하고 있다(Bourbaki, 1999, p.19) .

현실적으로 0(無)보다 작은 수는 존재할 수 없다는 이유에서 음수를 인정할 수 없었던 것이다. 이것은 허수(Imaginary number)의 출현을 어떻게 받아들일 것인가와도 맥을 같이 하고 있는 중대한 문제이다. 불가능한 수 혹은 거짓된 수, 상상의 수로서의 음수와 허수는 그 자체로서 유용성이 있음이 밝혀졌고, 그것이 세상에서 인정이 되든 안되든 계산 대상으로서 수학자에 의하여 사용되기 시작하였다. 18세기 수학의 급속한 발전과 함께 19세기 초 Peacock(1791 ~ 1858)이 제기한 형식불역의 원리와 Hankel(1839 ~ 1873)의 "Theorie der complexen

Zahlen-system"에서 수의 형식화의 시작으로 급기야 음수에 대한 존재성을 부인할 수 없게 되었다(Hefendehl, 1991). Hankel은 음수를 실제적인 것을 나타내는 개념이 아니라 형식적인 구조를 이루는 것으로 보았고 비로소 음수개념을 량의 개념과 관련짓지 않고 순전히 형식적인 개념으로 간주할 수 있게 되었다(우정호, 1999). 음수의 역사적 기원은 방정식 풀이의 일반성을 확보하려는 형식적인 필요성이다. 일차방정식 $ax+b=0$의 해가 모든 경우에 존재한다고 하기 위해서는 새로운 수가 필요하게 된 것이다. 음수는 Diophantus의 시대로부터 1500년의 세월이 지난 19세기에 이르러서야 비로소 형식적인 존재로 인식하게 된 것이다.

Peacock의 논문에 영향을 받은 Augustus De Morgan(1806~1871)는 음수의 대수적 형식화를 더욱 발전시켰고 William Rowan Hamilton(1805~1865)은 대수에서 음수와 허수의 존재와 그 연산에 대한 정당화를 시도하였다. 그는 자연수의 순서쌍의 개념과 비슷한 개념으로 정수를 정당화하였고 실수와 복소수에 대한 연산의 법칙을 세웠다.(Katz, 1992).

2. 음수개념의 수학적 접근

2.1 기수의 동치류에 의한 정수의 형식화

자연수의 구조는 Peano의 공리체계로 형식화될 수 있다. 또한 자연수는 집합의 기수(cardinal number)로 설명할 수 있는데 이는 집합의 원소의 개수의 의미를 형식화한 것이다. 예를 들면 3은 집합 {a, b, c}의 기수이다. 기수와 그 연산에 의한 자연수의 설명은 자연수 연산의 대수법칙[1]을 모두 만족한다. 기수의 합은 서로소인 합집합의 기수이고 기수의 곱은 곱집합의 기수이다.

기수에 의한 자연수 개념의 정의는 정수로 확장될 수 있는데, Levi(1961)는 정수를 다음과 같이 기수의 순서쌍의 동치류로 정의하고 있다.

기수의 순서쌍 (a, b)에 대하여 I(a, b)를 다음을 만족하는 기수의 순서쌍(u, v)의 집합이라고 하자.

$$a+v=b+u.$$

이때 각 집합 I(a, b)를 정수라고 부른다.

이것은 $N \times N$집합을 동치류로 분할한 정의이다. 여기서 정수의 덧셈과 곱셈 연산은 다음과 같이 정의된다.

덧셈의 정의: 두 정수 I(a, b), I(c, d)의 합은 I(a+c, b+d)이고 이것을 다음과 같이 표시한다.

$$I(a, b) + I(c, d)=I(a+c, b+d).$$

덧셈에 대한 이러한 정의는 정수의 덧셈의 교환법칙과 결합법칙을 만족함을 쉽게 보일 수 있다.

곱셈의 정의: 두 정수 I(a, b), I(c, d) 곱은 I(ac+bd, ad+bc)이고 이것을 다음과 같이 표시한다.

$$I(a, b) \times I(c, d)=I(ac+bd, ad+bc).$$

곱셈에 대한 이러한 정의는 마찬가지로 곱셈의 교환 법칙과 결합법칙을 만족함을 쉽게 증명할 수 있고 분배법칙 역시 입증할 수 있다.

정수의 덧셈과 곱셈의 정의는 그 부분집합으로 본 자연수 I(a, 0)에서도 마찬가지로 적용이 된다. 기수 a에 대하여 정수 I(a, 0)가 대응하며 기수의 집합과 정수의 부분집합은 동형이 됨을

1) 자연수 연산의 대수법칙이란 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 그리고 분배법칙을 말한다.

알 수가 있다. 즉,

$$I(a, 0) + I(b, 0) = I(a+b, 0+0) = I(a+b, 0)$$

그리고

$$I(a, 0) \times I(b, 0) = I(ab + 0, a \times 0 + b \times 0) = I(ab, 0)$$

이것은 자연수로부터 정수를 구현할 수 있음을 말하며, 정수는 자연수의 대수구조를 유지하면서 확장된 수 체계임을 보여주고 있는 것이다.

정수에 대한 위의 정의를 통하여 우리는 정수의 덧셈에 대한 항등원, 0의 성질, 그리고 곱셈의 항등원을 규정할 수 있다. 즉, 임의의 정수 $I(a,b)$에 대하여

$I(0,0)+I(a,b)=I(a,b)+I(0,0)=I(a,b)$ …(1)

$I(0,0)\times I(a,b)=I(a,b)\times I(0,0)=I(0,0)$ …(2)

$I(a,b)\times I(1,0)=I(1,0)\times I(a,b)=I(a,b)$ …(3)

또한 각각의 정수에 대한 덧셈의 역원을 가지는 것을 보일 수 있고, 자연수의 역원을 '음의 정수'로 정의할 수 있다. 양의 정수 A에 대한 '음의 정수'를 -A라고 표시하면,

$A+(-A)=0$…(4)

임을 알 수가 있고 이것으로부터,

$-(-A)=A$ …(5)

임을 또한 알 수가 있다.

다음에는 음의 정수의 곱에 대하여 살펴보자. $I(0,0)=0$, $I(1,0)=1$, $I(0,1)=-1$로 놓으면 $(-1)\times A=-A$임을 보일 수 있다. 즉, $1+(-1)=0$ (덧셈의 역원(4)) 이고 $0\times A=0$ (0의 성질(2))이므로

$(1+(-1))\times A=0$

$1\times A + (-1)\times A=0$

$A+(-1)\times A=0$ $\quad$ ($1\times A=A$이므로)

따라서, 덧셈에 대한 역원에 의하여

$(-1)\times A=-A$ …(6)

이다.

$(-A)\times B=A\times(-B)=-(A\times B)$ …(7)

임은 다음과 같이 보일 수 있다.

$(-A)\times B=((-1)\times A)\times B$ …((6)에 의하여)

$=(-1)\times(A\times B)$ …(곱셈의 결합법칙)

$=-(A\times B)$ …((6)에 의하여).

$(-A)\times(-B)=AB$ 는 다음과 같이 보일 수 있다.

$(-A)\times(-B)=A\times(-(-B))$ …((7)에 의하여)

$=A\times B$ …((5)에 의하여).

$-(A+B)=(-A)+(-B)$는 다음과 같이 보일 수 있다.

$-(A+B)=(-1)\times(A+B)$ …((6)에 의하여)

$=(-1)\times A + (-1)\times B$ …(분배법칙)

정수의 뺄셈과 나눗셈은 다음과 같이 정의할 수 있다. 우선 뺄셈은 덧셈의 역원으로 정의할 수 있다.

뺄셈의 정의: 정수 B의 덧셈에 대한 역원을 -B라고 하면

$$A-B=A+(-B)$$

이다.

정수의 나눗셈에 대한 정의는 곱셈에 대한 역원의 개념으로 설명할 수 있는데 정수는 나눗셈에 대해 닫힌 집합이 아니다. 이것은 유리수로의 확장을 필요로 하는데 유리수에 대한 정의는 정수의 확장으로 설명할 수 있다.

유리수의 정의: 집합 T를 순서쌍 (a, b)의 집합이라고 하자. 여기서 a는 정수이고 b는 0이 아닌 정수이다. T의 원소 (a, b)에 대하여 R(a, b)는 av=bu를 만족하는 T의 모든 원소 (u, v)의 집합이다. T의 부분집합 R(a, b)를 유리수라고 한다.

유리수의 덧셈과 곱셈은 다음과 같이 정의된다.

덧셈의 정의: 두 유리수 R(a, b), R(c, d)의 합은 R(ad+bc, bd)이고 다음과 같이 쓴다.

$R(a, b)+R(c, d)= R(ad+bc, bd)$.

곱셈의 정의: 두 유리수 R(a, b), R(c, d)의 곱

은 R(ac, bd) 이고 다음과 같이 쓴다.

$R(a, b) \times R(c, d) = R(ac, bd)$.

덧셈과 곱셈에 대한 위의 정의는 $b=d=1$일 경우, 정수의 덧셈, 곱셈과 동형을 이룬다. 즉,

$R(a, 1)+R(b, 1)=R(a+b, 1)$,

$R(a, 1) \times R(b, 1)=R(ab, 1)$.

유리수의 곱셈에 대한 항등원은 R(1, 1)이고 임의의 유리수 R(a, b), $a \neq 0$에 대하여 곱셈에 대한 역원이 존재한다. 즉 R(a, b)의 곱셈에 대한 역원은 R(b, a)이다. 곧,

$R(a, b) \times R(b, a)=R(ab, ab)=R(1, 1)$.

유리수 A에 대한 역원을 A^{-1}라고 표현하면, 나눗셈은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$A \div B= A \times B^{-1}$.

음수개념에 대한 위와 같은 순수한 형식적 대수적 접근은 음수의 존재성에 대한 의문을 갖게 하지 않는다. 단지 인공적으로 만들어진 산술법칙을 만족하는 모순 없는 형식적인 새로운 수학적 대상으로서의 의미를 갖게 되는 것이다.

그러나 이러한 음수의 형식성 자체가 음수를 정당화하는 것은 아니다. 그것은 현실과 맺고 있는 관계 즉 현상으로부터 확장되어 온 개념이며 형식화가 음수를 정당화하는 것이 아니라 음수의 역사적 발달과정에서 추상화를 필요로 하였고 그 추상화된 내용은 다시 대상이 되어 새로운 개념을 만들어내게 되는 것이다. 수학에서 정의나 공리는 임의로 만들 수 있다. 그러나 그것의 정당화는 제한을 받게 되는데 그것이 현상과 어떤 관계를 갖는가와 어떤 수단으로써 사용되는가가 중요한 판단기준이 된다. 따라서 공리에 의한 이론의 전개에 있어서 그 공리를 어떻게 만드는가는 추상화된 논리에서 시작되는 것이 아니라 구체적인 맥락에서 시작되는 것이다.

음수개념에 대한 이해는 형식화에 의해서 인식되는 것이 아니라 형식화된 과정[2]과 그 결과에 의하여 최종적으로 이해되는 것이다.

다음으로 군(group), 환(ring), 정역 그리고 체(field)로의 형식화를 통하여 음수의 개념을 이해해 볼 것이다.

2.2 군과 환 , 정역(integral domain)을 통한 정수의 형식화와 순서체에 의한 음수의 이해

앞에서 다룬 순서쌍의 집합으로의 정수의 형식화와는 달리, 정수는 공리적 방법에 의하여 추상적, 구조적 방법으로 다룰 수가 있다. 음수를 수학적으로 완전하게 이해하기 위해서는 대수적 구조를 이해해야 한다. 그러기 위해서는 먼저 정수가 대수적으로 어떤 구조를 갖고 있는가에 대하여 군과 환 그리고 정역을 통하여 살펴보아야 한다.

군<G, *>이란 연산*에 닫힌 다음 공리를 만족하는 집합G이다:

G1: 임의의 a, b, $c \in G$에 대하여, $(a*b)*c=a*(b*c)$. (*에 대한 결합법칙).

G2: 모든 $x \in G$에 대하여 $e*x=x*e=e$인 $e \in G$가 존재한다. (*에 대한 항등원).

G3: 각각의 $a \in G$에 대하여 $a*y=y*a=e$인 $y \in G$가 존재한다. (*에 대한 역원).

자연수는 덧셈이나 곱셈에 대해 군을 이루고 있지 않다3). 정수를 자연수, 0, 그리고 자연수의 덧셈에 대한 역원들로 정의할 경우 정수는 덧셈에 대하여 군을 이루게 된다. 이때 자연수의 덧셈에 대한 역원이 음수가 된다. 여기서 음수의 형식적 정의가 출현하게 되고 이런 의

2) 여기서 과정이란 역사적, 발생적 과정을 포괄하는 것이다.

미에서 음수는 추상화된 대상이 된다. 그러나 군에 의한 음수 연산의 설명은 완전하지 않다. 군은 교환법칙이 필수조건이 아니고4) 하나의 연산으로만 설명이 되기 때문에 기본 산술 체계를 설명할 수 없다. 덧셈, 곱셈의 두 연산과 덧셈에 대한 교환법칙을 고려한 것이 환(ring)이다.

환<R, +, · >은 다음의 공리를 만족하는 집합 R 위에서 정의된, 일반적으로 두 연산 +와 · 로 이루어진 집합 R이다:

R1: <R, +>는 아벨군이다.

R2: 곱셈은 결합법칙이 성립한다.

R3: 모든 a, b, c∈R에 대하여 좌분배법칙, a · (b + c) = a · b + a · c 과 우분배법칙 (a + b) · c = a · c + b · c 이 성립한다.

환에 대한 위의 정의는 일반적인 것인데 좀 더 특별한 경우로 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하는 환을 '가환환 (commutative ring)', 곱셈에 대한 항등원을 가지는 환을 '단위원을 가진 환(ring with unity)'이라고 한다. 단위원을 가진 가환환의 경우에 정수에 대한 덧셈과 곱셈의 규칙을 유도할 수 있다. 즉, 군의 성질(R1)에 의하여 음의 정수를 만들고 음의 정수에 대한 덧셈과 곱셈의 규칙을 만들 수 있다. 예를 들면, (-a) + (-b) =- (a+b) 임을 보일 수 있다.

a+b+(-a)+(-b)

=(a+(-a))+(b+(-b)) (교환 법칙, 결합법칙)

=0.

따라서 (-a) + (-b)는 a+ b의 덧셈에 대한 역원이므로 (-a)+(-b)=-(a+b)이다. 또 a(-b)=(-a)b=-(ab)임을 다음과 보일 수 있다. -ab는 ab의 덧셈에 대한 역원이고, a(-b) + ab = a(-b +b) = a · 0=0 5) 이므로 a(-b)는 ab의 덧셈에 대한 역원이며, (-a)b + ab = (-a +a)b = 0 · b=0 이므로 (-a)b는 ab의 덧셈에 대한 역원이다. 따라서, a(-b)=(-a)b=-(ab)이다. 또, (-a)(-b)=ab임을 다음과 같이 보일 수 있다. (-a)(-b)=-(a(-b)=-(-(ab))임을 앞의 증명에서 알 수가 있고 -(-(ab))는 -(ab)의 역원인데 또 -(ab)의 역원이 ab이므로 -(-ab))=ab이다.

그러나 일반적으로 환은 곱에서 소거법칙이 성립하지 않기 때문에 정수를 이해하기 위해서는 좀 더 정교한 구조가 필요하다. 정수는 덧셈에 대한 아벨군이며 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하고 단위원이 존재하며 영인자(zero divisor)를 갖지 않는다. 이러한 성질이 유도되려면 정역(integral domain)이 되어야 한다. 정역은 0이 아닌 단위원 1을 가지고 있고 영인자가 없는 가환환(commutative ring)이다. 정수는 정역(integral domain)을 이룬다. 그리고 유리수, 실수, 복소수가 모두 정역(integral domain)을 이룬다.

그러나 정역(integral domain)에 의한 음수의 이해는 정수에 제한되어 있다. 즉 나눗셈에 대해서는 정수가 닫혀 있지 않기 때문에 음수의 개념이 완전하게 구성된 것이 아니다. 따라서 체(field)에 의한 설명이 필요하게 되고 순서체(ordered field)에 의하여 완전하게 실수체계를 설명할 수 있기 때문에 음수에 대한 형식화가 완성되게 된다.

체 F는 0이 아닌 모든 원소에 대하여 곱셈에 대한 역원이 존재하는 단위원을 가진 가환환을 말한다. 즉 체 F는 다음의 공리를 만족하게 된다.

A1: a, b, c ∈F에 대하여, (a+b)+c=a+(b+c)이다.

A2: a, b ∈F에 대하여, a+b=b+a이다.

3) 자연수는 0을 포함한다고 할 경우 자연수는 덧셈과 곱셈연산 각각에 대하여 공리 G1과 G2를 만족하지만 G3를 만족하지 않는다. 이 경우에 자연수를 준군(semi-group)이라 부르기도 한다.

4) 군에서 교환법칙이 성립하는 것을 아벨군(abelian group)이라고 한다.

5) a · 0 + a · 0= a(0+0) =a · 0 이므로 a · 0=0이고, 0 · a=0도 마찬가지로 보일 수 있다.

A3: 임의의 F의 원소 a에 대하여, a+0=a인 0 ∈F가 존재한다.

A4: 임의의 F의 원소 a에 대하여, a+(-a) = 0 인 어떤 -a∈F가 존재한다.

M1: a, b, c ∈F에 대하여, (a×b)×c=a×(b×c) 이다.

M2: a, b ∈F에 대하여, a×b=b×a이다.

M3: 임의의 F의 원소 a에 대하여, a×1=a인 0과 다른 어떤 1∈F가 존재한다.

M4: 임의의 F의 원소 a≠z에 대하여, a× a^{-1}= u인 어떤 a^{-1}∈F가 존재한다.

D: a, b, c ∈F에 대하여, a×(b+c)=a×b+a×c 이고 (b+c)×a=b×a+c×a이다.

C: a, b, c ∈F, c≠z에 대하여, c×a=c×b 혹은 a×c= b×c 이면 a= b이다(소거법).

체의 공리에 다음 공리 2개를 추가하면 순서체가 된다.

다음을 만족하는 F의 부분집합 P가 존재한다.

O1: a≠0이면 a 와 -a 중에 오직 하나는 P에 속해있다.

O2: a, b ∈P이면 a+b ∈P이고 a×b∈P이다.

위의 순서체의 공리 O1, O2에 의하여 두 수의 크기를 비교할 수 있다. 그러기 위하여 다음과 같은 간단한 정의를 하나 추가하면 된다. 어떤 체 F에서 임의의 두 수 a, b에 대하여 a-b는 순서체의 공리 O1에 의하여 즉, 삼분법(trichotomy)에 의하여 (a-b) ∈ P, a-b = 0, (b-a) ∈ P중에 하나이다. 각각의 경우에 대하여 a>b, a=b, a<b라고 정의하면 순서를 결정할 수 있다. 따라서 실수는 순서체를 이루기 때문에 임의의 두 실수의 크기를 비교할 수 있다. 그리고 뺄셈과 나눗셈을 덧셈과 곱셈에 대한 역원으로 정의할 수 있기 때문에 음수개념을 확립할 수 있게 된다.

형식화에 의한 수 체계의 구성은 형식주의자인 Hilbert에 의해서 주창되었으며 Bernays, Ackermann, von Neumann등에 의하여 발전되어 왔다(Eves & Newsom, 1960, p.290). 그러나 형식화에 의한 공리체계의 구성은 1931년 Kurt Gödel에 의하여 그 완전성의 입증에 실패하게 된다. Gödel은 충분히 풍부한 연역적 체계일지라도 그 체계에 속한 방법들로 그 체계의 무모순성을 입증할 수 없음을 밝히고 있다(Eves & Newsom, 1960, p.291).

따라서 음수는 이러한 공리적 체계를 만족하는 실체로 존재하는 것이라고 설명할 수 있다. 즉 음수는 순서체라는 공리적 체계에서 그 정당성을 부여받고 인식될 수 있는 대상인 것이다. 음수는 순서체를 통한 공리화에 의하여 완전히 개념화가 될 수 있으며 이러한 구조를 이해해야만 그 본질을 이해할 수 있다. 이러한 구조는 대수의 내재적 특징에 의해서 나타나는 것이며, 그런 내재적 특징이 유의미하고 무모순적인 실체로서 정당화되는 것은 현실의 문맥에 의해서 충분히 설명이 되고, 여러 분야에서 유용하게 사용이 되기 때문이다[6].

Ⅲ. 음수연산 지도의 형식적 접근

본 장에서는 이상과 같은 음수에 대한 역사적인 측면, 수학적인 측면의 분석을 통하여 그 본질에 입각한 교수방법으로써 음수를 형식적으로 접근하는 방안을 탐색할 것이다.

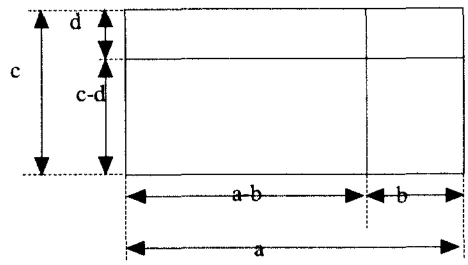
첫째, 음수는 형식적 특성을 가진 수임을 논의하면서 양적 측면과의 관련성을 극복하고 새로운 대수적인 수로 다루는 문제에 대하여 살

6) Hefendehl(1991)는 음수도입에 의한 유의미성에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다.
- 기하의 좌표화는 음수의 도입으로 완벽해지고 강한 신뢰성을 얻었다.
- 벡터개념의 도입은 해석기하를 단순화한다.
- 물리학에서 음전압, 음의 속도, 음의 힘

펴볼 것이다. 둘째, 음수의 형식적 특성에 의거하여 형식적 접근을 구체적인 예시를 통하여 살펴볼 것이다. 셋째, 음수의 내재적 본성과 현실적 문맥과의 관련성의 중요성에 대하여 논의할 것이다.

1. 형식적인 특성을 가진 수로서의 음수

기수로서의 자연수가 처음 추상화될 때 불연속량은 수 개념의 추상화를 위한 구체적 근거를 제시해 주었다. 그렇기 때문에 처음에 사용된 수는 대수적인 수로서보다는 현상계의 대상과 불가분의 관계를 가지고 있었고 물리적 세계의 문맥에서만 의미가 있었다. 오랜 역사적 발달과정에서 음수를 구체적인 대상으로 정당화하려는 시도는 음수에 대한 공격의 근거가 되었다. $(-b)\times(-d)=bd$임을 보이기 위해 도형의 면적을 이용한 다음과 같은 시도는 무모한 것이다.



그림에서 $(a-b)(c-d)= ac -ad -bc +bd$ 이므로 $a=0$, $c=0$이면 $(-b)\times(-d)=bd$ 임을 얻는다. 그러나 이것은 이 식이 $a>b$, $c>d$ 인 상황에서만 타당하다는 점을 완전히 무시한 것이다(Klein, 1939b).

음수는 양적인 측면에서는 의미를 갖지 못했다. 왜냐하면 작은 수에서 큰 수를 뺀다는 것은 불가능하며 단지 0에 불과하기 때문이다. 이것은 수를 대수적인 대상으로서 보지 않고 구체적인 대상의 동형으로 보았을 때의 문제점이다. 음수를 대수적인 수로 보게 한 시초는 방정식이었다. $x+2=0$ 이 되는 x의 값은 자연수에는 존재하지 않는다. 그런데 $2-2=0$이므로 $x=-2$이라고 쓸 수 있다. 그러나 초기에 -2는 2를 빼는 조작이지 대상이나 수라는 개념이 될 수 없었다. 방정식 풀이에서 등장한 음수는 1500년 동안 대상이 아닌 과정 또는 조작으로써 수학자들에 의하여 거부되거나 암묵적으로 사용되어 왔었다. 이차방정식과 3차 방정식에서 또 다른 새로운 존재를 접하게 된다. 허수의 등장은 음수에 대한 수학자들의 이해를 촉진시켰고 급기야 수의 확장을 대수적 구조에 의하여 설명할 수 있으며 그것은 실제적 현상과의 관련성에서 충분히 자유롭다는 것을 알게 되었다. 그러한 첫 시도는 Peacock의 '형식불역의 원리' 이고 이것은 Hankel에 의해서 더욱 발전하였다. 산술의 기본구조를 만족하면서 수 체계를 형식적으로 확장할 수 있다는 생각이 그것이다. 그러면 앞에서 살펴보았듯이 음의 정수를 정의하고 음수의 연산을 설명할 수 있는 것이다.

19세기의 대수적 구조에 대한 연구는 군, 환, 정역, 체의 개념으로 발전하였고, 수 체계를 완전하게 설명해주는 대수적 구조이론이 등장하였다. 정수의 존재성은 범자연수의 순서쌍으로 설명이 될 수 있으며 정수는 정역의 구조로 설명이 될 수 있다. 정역의 구조에서는 곱셈의 역원이 정의되지 않기 때문에 음수의 연산을 설명하기 위해서는 체의 공리가 만족되어야 하며 그것이 유리수체이다. 순서체에 의한 실수의 설명은 수가 하나의 대수적 의미로 일관되게 기술될 수 있음을 보이고 있는 것이다.

문제는 그런 대수적인 수 자체의 의미와 그것과 현실과의 관계이다. Freudenthal(1991)은 음수와 허수 그리고 그 연산이 수세기 동안 양수

가 그래왔듯이 수학자에게 실재7)로서 다루어지게 되었음을 언급하고 있다. 그것은 음수가 대수적인 수로서 실재함을 말하는 것이다.

2. 음수연산 지도의 형식적 접근

음수는 그 지도에 있어서 비형식적 접근의 위험성과 구체적 접근의 한계를 명백히 드러내고 있음에도 불구하고 초등학교 수학의 특성과 발달심리학적 측면에서 그 형식적 특성이 드러내어 제시되지 못하고 있다. 이것은 허수가 형식적 방법에 의하여 지도되고 있는 것과 비교할 때 매우 대조적인 경우이다.

그런데 Kirshner(2001)의 대수의 구조성에 입각한 교육, Vergnaud (1983)의 복잡한 개념 지도에 대한 제안, Stacy와 MacGregor(2001)의 대수적 접근은 대수지도에 있어서 새로운 지도방안을 제안하고 있으며, 이것은 음수가 갖고 있는 형식적 구조적 측면을 드러내어 지도할 수 있는 가능성과 방안을 함의하고 있다. Freudenthal은 처음부터 음수를 방정식의 해로 형식적으로 도입하고 음수의 연산을 대수적인 형식불역의 원리를 이용하여 형식적으로 도입할 것을 주장하였다(1983). 이러한 관점에서의 음수의 지도는 아동에게 형식적 관점에서 수학의 개념을 지도한다는 점에서 중요한 역할을 한다. 음수는 발생적으로 방정식의 해를 구하기 위한 필요에 의해서 발전하였다.

여기에서는 음수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 대한 형식적 대수적 특성을 고려한 교수학적 접근방안을 탐색할 것이다. 먼저 음수는 방정식의 해를 구하는 과정에서 나타났기 때문에 발생적 측면을 반영하여 음수를 다음과 같이 정의한다.

◉ [예시1] □+2=0이 되는 □의 값은 -2이다. -2와 같은 수를 음의 정수라고 한다.

이러한 도입은 방정식에서 음수가 정의될 수 있음을 보여주고 몇 가지 예를 제시함으로써 학생들에게 익숙하게 접근할 수 있다. 이것은 미국의 <Mathematics Framework for California Public School, 1999>가 음수의 지도를 위해 제시하고 있고, SMP의 교재에서도 나타나 있다. 다음에는 이것을 일반화하여 설명한 것이다.

◉ [예시2] $x+a=0$이 되는 x의 값을 $-a$라고 하고 그 값은 유일하다. 이때 $-a$를 a의 반대수8)라고 한다. 또는 $-a$를 a의 덧셈에 대한 역원이라고 한다.

문자는 제 7차 교육과정 7-(가)의 <정수와 유리수>단원 직후인 <방정식>단원에서 도입이 되어 다루어지고 있고, 초등학교 수학에서 □ 속에 값 찾기에 대한 지도가 있었으며 7-(가)의 <집합>단원에서 문자가 소개되고 있기 때문에 음수지도에 있어서 문자의 도입은 어려움이 없을 것이고 학생들에게 음수의 출현을 설명하는데 적합하다. 이러한 설명은 예를 통하여 더욱 분명해진다. 조영미(2001)는 정의 기능을 기술기능, 약정 기능, 판별기능, 분석기능, 논증기능, 개선기능이 있음을 언급하면서 위의 정의는 포괄적이며 모순 없는 개념으로의 전환이라는 의미에서 개선기능을 갖고 있다고 말하고 있다.

◉ [예시3] 예를 들면, □+3=0인 □의 값은 -3이다. 그리고 □+(-2)=0의 □값은 -(-2)이다. 그런데 위에서 (-2)+2=2+(-2)=0이므로 □의 값은 2이기도 하다. 따라서 -(-2)=2이다.

이것은 음수를 설명하기 위해 구체적 모델을

---

7) 여기서 실재란 시공간 세계에 한정된 것이 아니라 정신적 대상, 정신적 활동을 포함하는 확장된 실재를 말한다(Freudenthal, 1991, p. 17).

8) 김남희(2001)는 +a와 -a의 변수지도에서 -a를 '마이너스 a'라고 읽는 것의 문제점을 지적하고 미국의 교과서 <Addison-Wesley Mathematics Grade 6>를 인용하여 반대(opposite)라는 용어를 사용하는 것이 적합하다고 제안하고 있다.

이용하여 아동의 인지구조에 쉽게 동화시키려는 무리한 시도보다는 오히려 Piaget(1970)가 제시한 논리-수학적개념의 반영적 추상화에 가깝다. 자연수의 '반대수'로서 음의 정수가 도입이 되면 자연수의 확장으로 정수를 자연스럽게 정의할 수 있다.

◉ [예시4] 자연수, 0, 음의 정수들의 집합을 정수라 한다. 이러한 정수들은 자연수와 마찬가지로 덧셈에 대한 교환, 결합법칙을 만족하고 곱셈에 대한 교환, 결합법칙을 만족하며 분배법칙을 만족한다.

여기서 교환, 결합, 분배법칙은 이미 초등학교 수학에서 다루어졌고 이것들의 적용은 앞에서 살펴본 연산에 대한 5가지 기본 법칙을 그대로 적용한다는 점에서 형식불역의 원리이며, 근본적으로는 정수가 정역(integral domain)의 구조를 갖고 있다는 것을 말하는 것이다. 그러한 정수는 존재하며 동형성에 입각하여 유일하다는 것을 2장의 음수의 본질에 대한 논의에서 언급하였다. 문제는 기수의 순서쌍으로서의 정수의 정의를 중학교 1학년에서 그대로 도입할 수 없다는 것이다. 그러한 교수학적 한계로 인하여 임의적이고 협약적이며 시각적인 모델들이 사용되고 있는 것이기도 할 것이다. 그 대안으로써 먼저 [예시4]와 같은 지도방안을 제시한 것이며 이것에 의하여 음수의 덧셈, 곱셈 방법을 이끌어 낼 수 있다. 다음에는 음수의 덧셈에 있어서 기수의 순서쌍을 표상할 수 있는 셈돌 모델의 일종인 RME의 기호모델을 활동으로 제시함으로써 [예시1], [예시2], [예시3]의 내용을 확인하도록 할 수 있다.

음수의 덧셈연산의 경우에 음수 더하기 음수는 교환법칙 또는 결합법칙을 사용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

(-3) +(-5)는 얼마인가?

(-3) +(-5)=□

(-3) +(-5) +5+3=-3+((-5)+5)+3=(-3)+3=0

즉 □+8=0 이다.

정의에 의하여

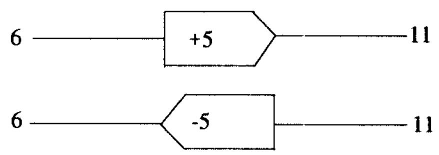
따라서 □=-8

곧, (-3)+(-5)=-8

정수의 덧셈은 그 값이 0이 되는 정수를 찾아서 방정식을 만들어 정수의 정의를 이용하여 합을 구할 수 있다. 덧셈에 대한 몇 가지 연습은 정수의 덧셈에 대한 규칙을 자연스럽게 유도할 수 있다. 이러한 형식적 방법은 기호모델을 사용하여 시각적으로 그 과정을 학생들에게 보여주거나 기호모델을 사용하여 학생들에게 활동을 하도록 제공할 수 있다.

일반적으로 자연수에서 뺄셈은 덧셈의 역과정으로 설명이 된다. 5-3=□는 □+3=5이 되는 □를 찾는 것이다. SMP에서는 역과정을 다음과 같이 제시하고 있다.

6 더하기 5는 11이라는 것은 11에서 5를 빼면 6이 되는 것으로 다음과 같이 흐름도로 나타낼 수 있다.



그런데 5-3=2이고 5+(-3)=2이므로 5-3=5+(-3)이다. 또한 6-(-5)=11이고 6+5=11이므로 6-(-5)=6+5이다. 이것은 뺄셈을 덧셈으로 바꾸어서 계산할 수 있음을 보이는 것이다. 따라서 정수의 뺄셈은 다음과 같이 정리할 수 있다.

◉ [예시5] 정수의 뺄셈에서는 다음 예와 같이 빼고자 하는 수의 반대수를 더한다. 2-3=2+(-3) 그러면 뺄셈은 덧셈으로 바꾸어서 다음과 같이 계산할 수 있다.

① 3- (-2) =3 +(-(-2))
=3 +2
=5

② (-4) -5 =(-4) +(-5)
=-9

③ (-2)-(-7) = (-2) +(-(-7))

=(-2) + 7

=5

정수의 덧셈에 대한 충분한 이해는 뺄셈을 덧셈의 역연산으로 정의함으로써 쉽게 학습하게 할 수 있으며, 이것은 자연수의 뺄셈에 대해서도 음수를 이용하여 덧셈으로 계산할 수 있음을 보여주는 것으로 뺄셈의 일반화인 것이다.

곱셈을 동수누가로 해석하는 것은 일부만 가능하기 때문에 한계가 있다. 따라서 음수의 곱셈은 [예시4]와 □×0=0×□=0이라는 성질을 이용하여 다음과 같이 설명할 수 있다.

2×(-3)은 얼마인가?

2×(-3)=□라고 하자.

2×(3+(-3))=0

2×3 +2×(-3)=0

6 + □=0

따라서 □=-6

곧, 2×(-3)=-6

곱셈에 대한 몇 가지 연습으로 곱셈에 대한 규칙을 유도할 수 있다. 즉

(양수)×(양수)=(양수) (양수)×(음수)=(음수)

(음수)×(양수)=(양수) (음수)×(음수)=(양수)

정수의 나눗셈은 정수의 영역에서 닫혀있지 않기 때문에 정수단원에서 지도하기에 어려운 점이 있다. 이것은 유리수 단원에서 나눗셈을 설명하거나 정수 단원에서 그 결과가 정수가 되는 경우로 제한하여 설명을 하고 그 과정에서 알고리즘적인 분수를 이용하여 설명하는 방법이 있다. 여기에서는 후자의 경우에 대하여 형식적 접근을 살펴보기로 한다.

분수에는 전체의 등분할된 부분이나 비율 등을 나타내는 '직관적인 분수'와 나눗셈의 몫이나 방정식의 해를 나타내는 '알고리즘적 분수'가 있다(Freudenthal, 1973). 예를 들면 $\frac{-2}{-5}$는 직관적인 모델이 없기 때문에 (-2)÷(-5)의 몫이거나 방정식 $-5x+2=0$의 해인 '알고리즘적 분수'이다. 알고리즘적 분수는 정수에서 나눗셈과 일차방정식이 풀이를 자유롭게 하기 위한 필요성 때문에 발생된 것이다. 음수의 나눗셈은 알고리즘적 분수와 [예시1], [예시2]를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

◉ [예시6] 음수의 나눗셈은 분수로 바꾸고 그것을 곱으로 나타내어 다음과 같이 계산한다.

$6\div(-3)=6\times\frac{1}{(-3)}$ =□라고 하자.

$6\times(\frac{1}{(3)}+\frac{1}{(-3)})=0$

$6\times\frac{1}{3}+\quad 6\times\frac{1}{(-3)}=0$

2 + □ = 0

따라서 □ = -2

곧 6÷(-3)=-2

위에서 제시한 여섯 가지 예시와 각 연산의 예는 형식불역의 원리에 따라 정수의 대수적 구조를 연산의 기본성질과 항등원, 역원의 성질을 가정하고 이용한 음수 연산 지도의 형식적 접근 방법이다. 초등학교에서 쉽게 접했던 연산의 기본성질을 이용하여 음수의 설명함으로써 학생들이 음수의 형식적 특성을 이해할 수 있으며 물리적 모델에 의한 일관성이 결여된 임의적·협약적 취약성을 극복할 수 있다. 이러한 방법은 단순한 구체물에 의한 알고리즘적인 교육이 아니고 복잡한 개념을 인위적으로 전달한 것도 아닌, 발생적 측면과 음수의 형식적 특성을 반영한 것이다.

그러나 단순히 형식적 접근만으로 음수지도를 하는 것은 바람직하지 않다. 구체적 모델의 적절한 사용뿐만 아니라 다양한 문맥에서 음수의 개념이 해석되어야 하고 연산이 적용되어야 한다. 다음절에서 그것에 대하여 구체적으로 살펴볼 것이다.

3. 대수적 구조와 현실적 문맥

Arzarello, Bazzini와 Chiappini(2001)는 사고의 대수적 과정을 분석하면서 Frege의 의미론적 삼각형을 이용한 하나의 지시체에 대한 표현의 변화 그리고, 하나의 표현에 대한 의미의 변화등에 대하여 흥미롭게 기술하고 있다. 이것은 대수가 갖고 있는 의미론적 측면을 살펴봄으로써 학생들의 인지구조에 어떻게 그것이 조정되어 가는지를 밝혀줄 수 있는 모형이다. 단순한 기호의 나열은 학생들에게 무의미한 기호의 집합체에 불과하며 대수의 내재적 특성과 외연적 측면 모두에서 그 가치를 잃는 것이다.

다음의 예를 살펴보자.

[1] 한 무리의 원숭이의 $\frac{1}{5}$에서 3마리를 빼서 제곱한 수가 동굴에 들어갔다. 그리고 원숭이 한 마리가 나뭇가지에 오르는 것이 보였다. 얼마나 많은 원숭이들이 있는지 말해보아라.(Gallardo, 2001)

이것을 대수방정식으로 쓰면 $\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x$이고 이것을 풀면, x=5 또는 50이다. 그러나 5는 문제의 문맥에서 적합하지 않으므로 정답은 50이다. $\frac{x}{5}-3$에서 x=5를 대입하면 -2이다. 대수식에서 이것은 문제가 되지 않지만 문제의 내용에서 원숭이 1마리에서 세 마리를 뺄 수 있느냐는 문제가 발생한다. 음수가 인정되기 이전에는 이것이 당연히 부정되었지만, 음수가 형식적인 수라는 의미에서 그것은 현실적 문맥 속에서 다시 재해석되어야 하는 과제를 포함하게 된다.

Freudenthal(1991)은 수학적으로 풍부한 문맥에서 구조화된 내용을 지도해야 함을 강조하고 있다. 수학외적인 문맥을 포함하는 풍부한 구조의 문맥을 학생들이 접하게 됨으로써 그들이 일반적인 구조를 발견하거나 수학화하는 능력을 기를 수 있는 것이다.

다음은 음수에 대한 현실적 문맥을 고려한 문제들이다.

[2] 온도가 0° 이다. 그 온도가 10° 떨어지고 다시 7° 올랐다. 온도는 지금 몇 도인가?

[3] 시험에서 각 문제마다 문제를 맞추면 5점, 틀리면 -2점, 답을 쓰지 않으면 0점을 부여한다. 한 학생이 14개의 문제를 맞추었고, 4개를 틀렸으며, 2개 문제에 대한 답을 쓰지 않았다. 그 학생의 점수는 몇 점인가?

문제 [2]에서 학생들은 양수와 음수를 사용하여 계산할 수가 있게 된다. 기온이 오르는 것을 양의 부호로 기온이 떨어지는 것을 음의 부호로 해석할 수 있어야 한다. 문제 [3]에서는 맞춘 점수가 5×14=70(점)이고 틀린 점수가 (-2)×4=-8(점), 답을 쓰지 않은 점수가 0×2=0(점)이라는 것을 알게 되고 여기서 -8점은 빼기로 해석될 수 있다. 즉 70-8. 그러나 또한 양수와 음수의 합으로 해석될 수 있다. 즉 70+(-8). 또한 0의 곱과 0의 항등원의 성질을 이해해야 한다. 즉 70+(-8)+0.

의미론적 측면에서 음수는 다양한 현실적 문맥에서 해석되어야 하고 현실적 문맥은 다시 대수적 측면으로 기호화되어 다루어 질 수 있어야 한다. 그리고 그 결과들을 다시 현실적 문맥에 맞는 조건으로 재해석되어야 한다.

따라서 형식과 구체적 의미 가운데 어느 한쪽에 치우친 음수의 지도는 음수개념의 형성과 그 의미를 잃는 것이다.

Ⅳ. 결론

Diophantus의 방정식론에서 나타난 '거짓인 수'로서의 음수가 계산과 방정식 풀이에 계속 사용되어왔으면서도 19세기 중엽까지 정당한 수로서 수용되지 못한 것은 실세계에 대응하는 일관된 실제적 모델이 없었기 때문이며 그것을 정당화할 형식적 방법이 없었기 때문이다. 오랜 역사적 암흑의 시대로부터 벗어나 음수가 수용되기 시작한 것은 17세기의 Descartes에 의한 해석기하의 개발로부터이며, 19세기에 들어와 Peacock, Hankel, De Morgan, 그리고 Hamilton에 의한 추상대수의 발달에 의하여 완전히 수용이 되었으며, Cantor가 말한 일관성에 의한 수학적 개념의 형식적 자유성에 의해서 음수는 구체적 대상으로부터 자유로워졌다.

그러나 수학자에 의해 수용된 음수의 개념과 아동이 구성하는 음수의 개념은 같을 수가 없으며 같은 의미로 전달될 수도 없다. 그러한 의미에서 Freudenthal은 수학적인 개념을 우선하여 교육하여야 한다는 주장에 대하여 반교수학적 전도라고 비판하고 있다. 현대적인 수학적 개념에 대한 강조는 1960년대에 구조와 논리적 엄밀성을 강조하는 현대 추상수학의 정신을 반영한 '새 수학(the New Math)'에서 시도되었지만 수학의 발생적 측면을 소홀히 하였고 수학의 창조 과정을 도외시하여 실패하게 되었다(우정호, 2000).

Bruner의 EIS이론과 Dienes의 다양한 구체물을 이용한 수학적 아이디어나 개념의 구성은 활동의 반성이 수학적 사고수준 상승의 중요한 요소가 된다는 반영적 추상화의 측면이 고려되지 않으며 바닥수준에 머물러 있게 되는 한계가 있다. 구체물에 의한 개념의 획득에 대하여 Freudenthal은 다음과 같이 말하고 있다.

> 구체적 구현에 의한 개념획득과 반대로 나는 현상학에 근거하여 심상의 구성을 설정하였다. 첫 번째 접근에서 구체화는 일시적으로 중요하다. 케이크를 나누는 것은 학습자가 분수를 알고리즘적으로 숙달하면 곧 잊혀질 것이다. 이 접근과 반대로 정신적으로 분수를 구성하도록 돕는 재료는 영원하고 확실한 가치가 있다 (Freudenthal, 1983, p.33).

그는 교수현상학적 분석을 통하여 학교수학을 개선해야 함을 강조하였고 그러한 연구는 이미 네덜란드에서 Freudenthal의 수학교육연구소를 중심으로 상당한 성과를 거두고 있다.

본 연구는 개념적 지도나 구체물에 의한 지도가 위에서 언급하였듯이 교수학적 한계와 본질에 대한 왜곡의 문제가 있으므로 이를 극복하기 위하여 음수에 대한 교수현상학적 분석을 바탕으로 현재 지도되고 있는 음수지도의 문제점을 살펴보고 그 대안을 제시하고자 한 것이다.

이상의 고찰로부터 음수에 대한 지도는 단지 음수를 어떻게 지도할 것인가, 즉 정수는 무엇이고 학생들에게 음수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 단지 어떻게 능숙하게 계산하게 할 것인가의 문제가 아니라는 것을 알 수 있다. 음수는 학생들이 처음 접하게 되는 형식적인 특성을 갖고 있는 수이고, 그들에게 형식적 수학적 대상을 처음으로 교수한다는 점에서 본 연구는 중학교 1학년에서 가르쳐지고 있는 음수지도내용의 문제점과 개선방향에 대하여 탐색하였다.

이러한 분석이 학생들에게 유의미하게 지도되기 위해서는 교사의 역할이 중요하다. 교사는 '교육 내용의 구현체(유한구, 2001)'이기 때문에 교사들이 음수에 대한 본질을 올바르게 이해할 때 학생들이 그 의미를 구성하도록 바르게 안내할 수 있을 것이다. 수학적 개념이나 아이디어 혹은 구조가 텍스트로 전환이 될 때, 일반적으로 그 본질이 잘 드러나지 않은 채 구체적인 형태로 재현된다. 따라서 교사가 그 본

질을 잘 알고 개념적 틀을 이해할 때 기계적 지식 전달이 아닌 반성의 기회를 학생들에게 제공할 수 있을 것이다.

음수의 지도는 대수지도와 관련하여 중요한 의미를 갖고 있기 때문에 음수지도를 적절하게 하기 위한 연구가 계속 이루어져야 할 것이다. 이상에서 제시한 음수지도의 형식적 접근과 문맥에 의한 접근을 반영한 교재를 구성하여 학생들에게 지도했을 때, 기존의 음수지도 방법과 비교하여 음수에 대한 개념과 연산의 이해가 어떻게 다른가를 분석하는 것이 대수지도의 연구에 있어서 하나의 전환점이 될 것이다.

참 고 문 헌

김남희(2001). 제 7차 교육과정 [7-가] 단계의 변수 개념 지도에 관한 교수학적 논의. 수학교육학연구, 11(1). 67-88.

신항균(2000). 수학 7-가. 형설 출판사.

우정호(1999). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부.

우정호(2000). 수학학습-지도원리와 방법. 서울대학교출판부.

유한구(2001). 교과와 교사: 7차 교육과정의 교사관. 대한수학교육학회 추계 수학교육학연구발표대회논문집. 1-20.

조영미(2001). 학교수학에서 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

조태근 외(2000). 수학 7-가. 금성출판사.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G.(2001). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. In Sutherland et al.(Eds), *Perspectives on School Algebra*.(pp.61-82). Dordrecht. : Kluwer Academic Publishers.

Bourbaki, N.(1999). *Elements of the History of Mathematics.* Berlin, Heidelberg: Springer -Verlag

Burton, D. M. (1991). *The History of Mathematics.* Wm. C. Brown Publishers.

California Department of Education(1999). *Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten Through Grade Twelve.* California Department of Education.

Eves, H. & Newsom, C. V. (1960). *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* New York : Rinehart & Company, Inc.

Freudenthal. H.(1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H.(1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H.(1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers.

Gallardo, A.(2001). Historical-Epistemological Analysis in Mathematics education : Two Works in Didactics of Algebra. In Sutherland et al.(Eds.), *Perspectives on School Algebra*(pp.121～139). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Gullberg, J.(1997). *Mathematics: from the Birth of Numbers.* New York : W. W. Norton & Company, Inc.

Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative Number: Obstacles in their Evolution from

Intuitive to Intellectual Constructs. *For the Learning of Mathematics* 11(1). 26-32.
Katz, V. J. (1992). *The History of Mathematics.* HarperCollins College.
Kaufmann, J. E. & Lowry, W. C.(1971). *The Many Facets of Mathematics.* Boston : Prindle, Weber & Schmidt, Inc.
Kirshner, D.(2001). The Structural Algebra Option Revisited. In Sutherland et al.(Eds.), *Perspectives on School Algebra*(pp.83-98). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
Klein, F.(1939a). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry.* Dover Publications, Inc.
Klein, F.(1939b). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis.* New York : Dover Publications, Inc.
Kline, M.(1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* New York : Oxford University Press
Levi, H. (1961). *Elements of Algebra.* New York : Chelsea Publishing Company.
Mancosu, P.(1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* Oxford, New York : Oxford University Press.
Piaget, J.(1970). *Genetic Epistemology.* New York, London : Columbia University Press.
Sfard, A(1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior* 14, 15-39.
SMP(1987). *School Mathematics New Book 2, Part 1.* Cambridge University Press.
Stacey, K., & MacGregor, M.(2001). Curriculum Reform and Approaches to Algebra In Sutherland et al.(Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp.141-154). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
Vergnaud, G.(1983). Multiplicative Structures. In Lesh, R. & Landau, M.(Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp.127-174). New York, London : Academic Press, Inc.

A Study on the Nature of the Negative Numbers and the Teaching of Them by Formative Approach

Choi, Byung Chul (SNU Middle School)
Woo, Jeong Ho (Seoul National University)

In school mathematics, the negative numbers have been instructed using the intuitive models such as the number line model, the counting model, and inductive-extrapolation on the additionand multiplication and using inverse operation on the subtraction and division. Theseinstructions on the negative numbers did not present their formal nature and caused the difficulty for students to understand their operations because of the incomplete function of

the intuitive models.

In this study, we tried to improve such problems of the instructions of the negative numbers on the basis of the didactical phenomenological analysis. First of all, we analysed the nature of the negative numbers and the cognitive obstructions through the examination about the historic process of them. Second, we examined how the nature of the negative numbers were analysed and described in mathematics. Third, we explored the improving directions for them on the ground of the didactical phenomenological analysis.

In school mathematics, the rules of operations using the intuitive models of the negative numbers have been instructed rather than approaching toward the nature of them.

The negative numbers have been developed from the necessity to find the general solution of equations. The study tries to approach the operations instructions of the negative numbers formatively to overcome the problems of those that are using the intuitive models and to reflect the formative properties of the negative numbers. Furthermore, we examine the way of the instruction of the negative numbers in real context so that the algebraic feature and the real context should be interactive.