

## 탱그램과 모자이크퍼즐의 활용에 관한 연구

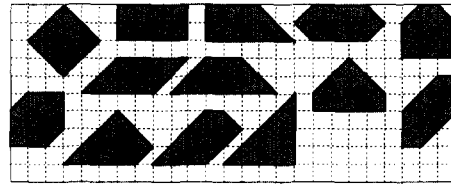
안주형\* 송상현\*\*

### 1. 서론

7차 수학과 교육과정에 따른 교과서는 3-가, 4-나, 5-가, 5-나, 그리고 7-나 단계에서 도형판 또는 칠교판이라는 이름으로 탱그램(tangram)을 소개하고 있다. 7차 교육과정에 따르면 3-가 단계에서는 직각을 가진 삼각형과 사각형만 다루기 시작하다가 4-나 단계에 이르면 다각형을 포함한 대부분의 평면도형을 이해하도록 하면서 구체적 조작물을 사용하여 여러 가지 모양을 만들어 보도록 요구한다. 5-가 단계에서는 몇 개의 기본도형(직사각형, 평행사변형, 삼각형)의 넓이를 다루고 5-나 단계에서는 대칭의 개념과 각종 다각형의 넓이를 취급한다. 이러한 7차 교육과정의 도형 영역과 측정 영역에서 도형 개념을 바탕으로 한 공간감각과 넓이 지도를 위해 탱그램을 광범위하게 도입하고 있다. 그러나 정삼각형과 예각 및 둔각삼각형을 다루는 4-가 단계에서는 탱그램 대신 점판<sup>1)</sup>이라 부르는 지오보드(geoboard)를 사용한다. 각 단계의 내용 계열과 그에 따른 활동을 고려해 볼 때 조각퍼즐이라는 동일한 종류의 조작활동을 통해 갖가지 개념들을 일관성 있게 통합시킬 필요가 있음에도 삼각형을 다루는 4-가 단계에서 탱그램을 사용하지 못하는 이유는 탱그램으로

는 정삼각형과 둔각삼각형을 만들지 못하기 때문이다.

실제로 탱그램의 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 모양의 볼록 다각형은 [그림 1]과 같이 13개뿐이라는 것은 Fu Tsiang



[그림 1] 탱그램으로 만든 볼록 다각형

Wang과 Chuan-Chih Hsiung이 1942년 The American Monthly에 "A Theorem on Tangram"이라는 글에서 밝혀놓았는데(Gardner, M, 1988, p. 198; 박교식, 2002, p. 98), 7조각 모두가 아닌 일부 조각만으로도 정삼각형이나 둔각 삼각형은 만들 수가 없다. 그리고 탱그램 조각으로 만들 수 있는 크기가 다른 4종의 서로 다른 해법으로 만들 수 있는 12개 모양이 모두 직각이 등변삼각형뿐이다. 따라서 제대로 된 삼각형의 탐구를 위해서는 정삼각형과 둔각삼각형까지도 만들 수 있는 탱그램과 유사한 조각퍼즐을 연구해 볼 필요가 생긴다.

박교식(2002)은 정사각형을 기본형으로 하는 32개의 유사 탱그램을 소개하고 있다. 그러나

\* 인천동수초등학교  
\*\* 인천교육대학교  
1) 엄밀히 말하면 교과서에 제시한 그림은 점종이(dot paper)이다.

이들 중 어떤 유사 탱그램으로도 정삼각형은 만들지 못함을 알 수 있는 데 그 이유는 정사각형을 기본형으로 하여 각 변의 2등분점 또는 3등분점을 연결하여 잘라 만든 조각들의 각은 60도의 약수가 되지 않기 때문이다. 그리고 겨우 3종(육교판 중 4번째와 6번째, 십사교판)만 둔각삼각형을 만들 수 있음을 확인할 수 있다. 따라서 정삼각형과 둔각삼각형을 만들 수 있는 새로운 조각퍼즐을 개발하려는 시도가 필요하다. 이에 대해 Welchman(1999)은 P. van Hiele이 소개한 일곱 조각 모자이크퍼즐과 기존의 탱그램 퍼즐을 가지고 학생들에게 여러 가지 삼각형들 사이의 관계를 탐구하도록 하는 연구를 제안한 바 있다. 그는 이 일곱 조각 모자이크 퍼즐을 이용하면 4종류의 정삼각형, 3종류의 직각삼각형, 그리고 5종류의 둔각삼각형을 만들 수 있음을 보여주고 있다. 그의 결론은 퍼즐을 가지고 노는 것이 학생들의 고차원적인 사고 기능을 향상시켜 유클리드 기하학의 많은 원리를 발견할 수 있는 기회를 주고 더불어 큰 재미를 준다는 것이다.

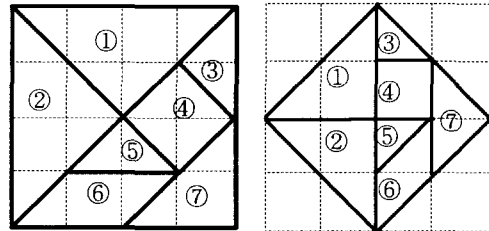
본 논문에서는 탱그램과 일곱 조각 모자이크 퍼즐 교구를 함께 사용하면 우리나라 초등학교 평면도형 학습에서 의미있게 활용할 수 있을 것이라 생각하여 탱그램과 일곱 조각 모자이크 퍼즐을 활용한 초등학교 수학과 수업을 분석해 보면서 Welchman의 제언을 구현하기 위한 구체적인 활용방안을 모색하고자 한다.

## II. 탱그램과 모자이크 퍼즐 교구 및 활동판 제작

퍼즐 교구를 활용한 수업을 할 때, 기존에 상품화되어있는 교구를 구입하여 사용할 수도 있겠지만 직접 만들어 보는 것은 더 많은 수학

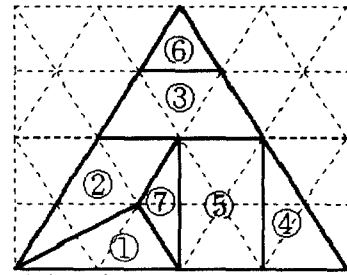
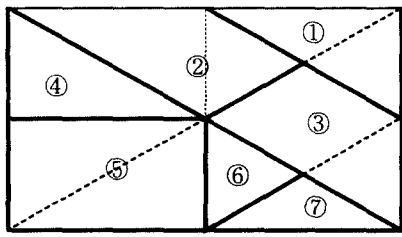
적 유용성을 가져온다. 학생들은 교구의 그림을 보고 직접 베끼는 것만으로도 각 조각들이 서로 어떤 부위에서 잘려 나온 것이며 각 조각들을 붙이면 또 어떤 모양이 되는지를 탐구하는 활동의 기초가 될 뿐만 아니라 각 조각들의 변의 길이 또는 넓이가 서로 어떤 관계로 이루어졌는지를 직관적으로 이해할 수 있는 기회를 갖게된다.

탱그램은 정사각형을 기본형으로 하며, 일곱 조각 모자이크 퍼즐은 정삼각형을 기본형으로 한다. 교구들의 크기는 특별히 정해져 있는 것은 아니나 그것을 사용하는 학습에 따라서는 길이 및 넓이 탐구 또는 분수의 지도와 같은 목적에 따라 다르게 정할 수 있다.



[그림 2] 탱그램(칠교판)의 구성

탱그램을 제작할 때 보통 [그림 2]와 같이 가로, 세로가 4칸씩인 정사각형을 외곽선으로 하여 각 변의 길이나 대각선을 2등분 또는 4등분되는 점을 연결하여 만든다. 그러면 7조각 각각의 꼭지각들은 모두  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ 로서 모두  $45^\circ$ 의 배수들뿐이다. 이 때 전체 정사각형의 한 변의 길이를 4의 배수인 자연수로 정할 때 7조각 중의 정사각형 ④의 한 변의 길이는 무리수가 되므로 초등학교에서 넓이 공식을 사용할 때는 부적절할 수가 있다. 그러나 [그림 2]의 오른쪽 그림과 같이 정사각형 격자판에서 마름모꼴로 탱그램의 기본형을 만들면 탱그램 7조각 중 작은 정사각형 ④의 넓이가 격자판의 1단위의 크기와 같아진다. 물론 가장 작은 삼



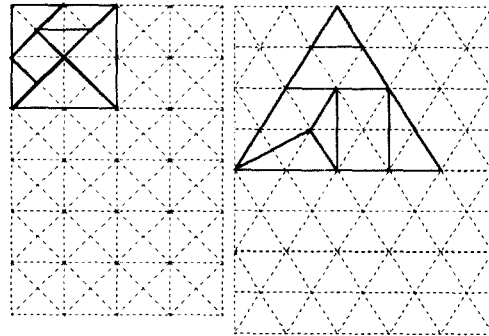
[그림 3] 모자이크 퍼즐 조각의 구성

각형 ③과 ⑤의 넓이는 1/2단위가 되지만 1단위 크기의 삼각형을 제외한 6개 조각의 넓이를 구하는 공식과도 쉽게 연결될 수 있으며 탱그램 조각으로 만든 여러 가지의 블록 다각형들의 넓이를 탐구하는데 유용한 면도 있다.

실제로 탱그램을 제작할 때 격자 정사각형의 한 변의 길이는 10cm보다 약수가 많은 수치인 8cm 또는 12cm를 사용하는 것이 더 나을 수 있다. 그러나 일곱조각 모자이크 퍼즐은 정삼각형을 기본형으로 하므로 [그림 3]의 왼쪽 그림과 같이 전체 직사각형의 세로의 길이에 대한 가로 길이의 비가  $1 : \sqrt{3}$ 을 유지해야 한다. [그림 3]의 오른쪽과 같이 정삼각형 격자판을 이용하여 그릴 수도 있다. 모자이크퍼즐들의 각 조각들의 꼭지각들은  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ 로서 모두  $30^\circ$ 의 배수들이다.

만약 탱그램과 모자이크 퍼즐 조각들을 혼합하여 사용하려면 탱그램 조각과 모자이크 퍼즐 조각을 구분할 수 있도록 각각 다른 색으로 만들면 좋다. 그리고 심화 활동으로 도형을 만들 때 어떤 조각이 뒤집어 끼워졌는지를 알아보려면 앞면과 뒷면의 색깔을 달리 할 수도 있다.

이제 탱그램과 모자이크퍼즐을 사용하는 학생들의 활동을 돕기 위해 [그림 4]와 같이 탱그램과 모자이크퍼즐에서 각각 가장 작은 이동변 삼각형과 정삼각형조각의 넓이를 각각 1단위로 하는 활동판을 만들 수 있다. 이 활동판들의 크기는 학생들이 퍼즐 조각들을 그 활동판에



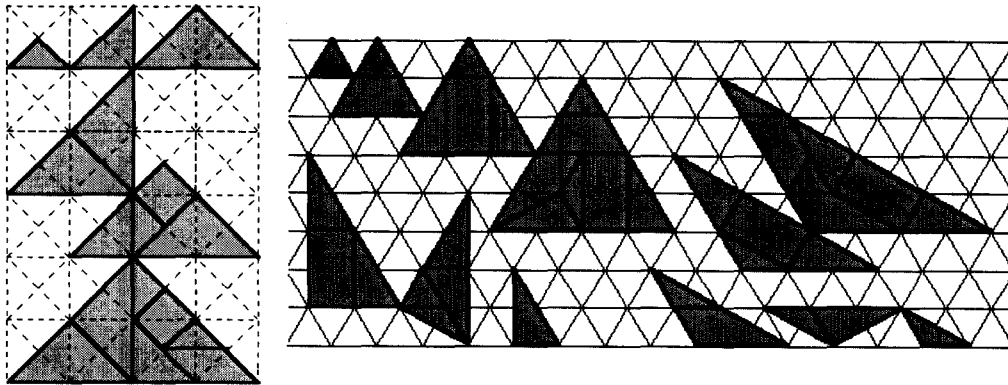
[그림 4] 탱그램과 모자이크퍼즐의 활동판들

직접 올려놓으면서 모양을 맞출 수 있도록 조각의 크기와 맞추어야 한다. 이 두 활동판을 사용하여 만들 수 있는 삼각형들은 각각 [그림 5]와 같다.

### III. 수업의 설계

#### 1. 사전 연구 및 연구 대상자의 선정

탱그램과 모자이크 퍼즐을 활용한 수업을 분석하기 위해 1999년 11월부터 2000년 8월까지 3차에 걸친 사전 연구를 실시하였다. 처음에는 3학년 학생들을 대상으로 수업하면서 전체 학생들의 반응과 개별 학생들의 산출물에 초점을 맞추어 조작 교구를 제시할 때 유의해야 할 점들을 살펴보았다. 그 결과 색종이를 직접 잘라 풀로 붙이는 방식은 관련되는 다른 활동을 할



[그림 5] 탕그램과 모자이크 퍼즐을 사용하여 만든 여러 가지 삼각형들

때 재활용의 어려움이 있으므로 만든 도형에 들어있는 각 조각들의 윤곽을 그리게 하여야 하며, 조각을 뒤집은 것을 구분할 수 있도록 조각의 양면은 색깔을 달리하는 것이 좋을 것을 확인하였다. 아울러 교구는 학생들의 호기심과 활동을 유발할 수 있는 시각과 촉각, 청각 등의 감각뿐만 아니라 입체감도 고려하여야 학생들이 활동에 집중할 수 있다는 교구의 교육적 의미도 확인할 수 있었다. 그리고 실제 조각 크기의 모양을 붙이는 활동판보다 때에 따라서는 축소된 활동판에 모양을 옮겨 그리는 것도 보다 발전적인 사고를 유발하는데 도움이 될 수도 있음을 확인하였다.

한편 전체 학생들을 대상으로는 학생들의 의사소통 내용 및 수학적 사고 활동을 파악할 수 없으므로 수업은 전체 학생들을 대상으로 하더라도 그 중 몇몇의 학생들의 사고과정에만 집중할 필요를 느꼈다. 그리고 모든 가능한 답들을 찾아낸 후 각 답들의 유사점과 차이점에 대해 토의하면서 자신의 의사를 분명히 표현하도록 해야만 수학적 사고과정을 분석하는데 도움이 될 것으로 보였다.

학생들은 탕그램보다 모자이크퍼즐을 다루는 활동을 더 어려워했다. 3학년 학생들은 삼각형

찾기, 직사각형 찾기, 정사각형 찾기까지는 흥미롭게 조작 학습 활동을 하였으나 면적탐구부터는 어려움을 느껴 더 이상 수업을 진행할 수가 없었다. 그러나 보다 의미있는 내용의 분석을 위해서는 대상을 4학년으로 하되, 소수의 학생으로만 제한하기로 결정했다. 이에 따라 수업은 인천시 D초등학교 4학년 ○반의 남학생 2명과, 여학생 2명을 수업의 대상으로 삼았다. 이들 중 1명만 수학을 좋아한다고 말했으며 다른 학생들은 수학에 특별한 관심은 없지만 3월에 실시한 진단평가 성적은 모두 중·상에 속한다.

## 2. 탕그램과 모자이크퍼즐을 활용한 수업 내용

Welchman 연구의 제언을 바탕으로 <표 1>과 같이 7차시 분의 수업을 하기로 정하였다. 탕그램과 모자이크퍼즐 활용에 관한 연구를 위하여 <표 2>의 활동카드 제작 구성 표와 그 구성 표에 의거하여 활동카드를 만들었다. 활동카드는 활동카드 제작 구성 표에 따라 A4 용지 한 장에 들어갈 수 있도록 제작하였으며, 총 12장으로 이루어져 있다.

<표 1> 탱그램과 모자이크퍼즐을 활용한 수업 내용

| 번호 | 활동 영역   | 탱그램과 모자이크퍼즐 활용 수업 내용  |
|----|---------|---|
| 1  | 삼각형 찾기  | 탱그램과 모자이크퍼즐 조각들이 어떻게 모여 삼각형이 되었는지 찾아보고 조각들의 윤곽이 나타나도록 그려보는 활동을 통하여 삼각형들의 크기, 삼각형을 만드는데 사용한 조각, 삼각형의 성질, 공간감각 등을 알아보기.             |
| 2  | 직사각형 찾기 | 모자이크퍼즐 조각들은 직사각형의 모양으로 나타난다. 탱그램과 모자이크퍼즐 조각들이 어떻게 모여 직사각형이 되었는지 찾아보고 조각들의 윤곽이 나타나도록 그려보는 활동을 통하여 직사각형의 성질과 닮음의 관계를 학습하는 과정을 알아보기. |
| 3  | 정사각형 찾기 | 탱그램 조각들은 정사각형 모양으로 표현된다. 탱그램과 모자이크퍼즐 조각들이 어떻게 모여 정사각형이 되었는지 찾아보고 조각들의 윤곽이 나타나도록 그려보는 활동을 통하여 정사각형의 크기, 정사각형의 성질을 학습하는 과정을 알아보기.   |
| 4  | 면적 탐구   | 탱그램은 정사각형의 절반인 가장 작은 직각이등변삼각형을 1단위로 하고, 모자이크퍼즐은 정삼각형을 1단위로 하는 임의의 단위 측정 활동을 통하여 도형의 변의 길이와 면적과의 관계를 학습하는 과정을 알아보기.                |
| 5  | 각도 탐구   | 탱그램과 모자이크퍼즐로 만든 삼각형은 몇 가지의 서로 다른 각을 나타내고 있으며 각도들 사이에는 관계를 학습하는 과정을 알아보기.  |
| 6  | 길이 탐구   | 탱그램과 모자이크퍼즐의 조각은 몇 개의 서로 다른 변의 길이를 가지고 있으며, 이 길이들 사이의 관계를 학습하는 과정을 알아보기.  |
| 7  | 다각형 탐구  | 탱그램과 모자이크퍼즐의 각 조각들의 길이를 맞춰 한 변의 옆에 다른 조각들을 갖다 붙이면 사각형, 오각형, 육각형, ... 등의 다각형을 찾아보는 활동을 통하여 다각형에 관한 학습 과정을 알아보기.                    |

<표 2> 활동 카드 제작 구성 표

| 활동카드 번호 | 활동카드 명           | 활동카드 번호 | 활동카드 명           |
|---------|------------------|---------|------------------|
| 1       | 탱그램의 탐구          | 7       | 탱그램으로 정사각형 만들기   |
| 2       | 모자이크퍼즐의 탐구       | 8       | 모자이크퍼즐로 정사각형 만들기 |
| 3       | 탱그램으로 삼각형 만들기    | 9       | 면적 탐구            |
| 4       | 모자이크퍼즐로 삼각형 만들기  | 10      | 각도의 탐구           |
| 5       | 탱그램으로 직사각형 만들기   | 11      | 길이의 탐구           |
| 6       | 모자이크퍼즐로 직사각형 만들기 | 12      | 다각형들의 탐구         |

◆ 활동카드의 예

**활동카드 탱그램으로 삼각형 만들기**

1. 탱그램의 조각들을 1가지 또는 그 이상 사용하여 만들 수 있는 모든 삼각형을 찾아 보아라.
2. 탱그램 조각들이 어떻게 모여 삼각형이 되었는지 찾아낸 삼각형들을 크기의 조각들의 윤곽이 나타나도록 모두 그려 보아라.
3. 무엇이 두 개의 삼각형을 서로 다르게 만들까? 삼각형들의 크기는? 삼각형을 만드는데 사용한 조각들은? 활동판 위에서의 위치는?
4. 삼각형이 오른쪽 방향으로 90도 정도 돌려져 있다는 차이점 때문에 다른 삼각형이라고 말할 수 있는가?

**활동카드 모자이크퍼즐로**

1. 모자이크퍼즐로 삼각형을 만든다면 탱그램으로 만든 삼각형의 수보다 많을 것 같은지 예상하여 보아라.
2. 모자이크퍼즐 조각들을 1가지 이상 사용하여 만들 수 있는 삼각형을 만들어 보아라.
3. 모자이크퍼즐 조각들이 어떻게 모여 삼각형이 되었는지 그려보아라. (각 조각의 윤곽이 나타나도록 모두 그려 보아라.)
4. 두 개의 삼각형을 서로 다르게 만드는 것은 무엇일까? (삼각형의 크기, 삼각형을 만드는데 사용한 조각의 수, 종이 위의 위치에 대하여 도의하여 써보시오.)
5. 다른 삼각형들을 모두 찾아 내라고 한다면 그것을 어떻게 알 수 있는지 알기 쉽게 설명해 보아라.

<표 3> 도형에서의 수학적 사고

| 도형에서의 수학적 사고   |  |
|--|--|
| 사물의 모양이나 크기를 비교할 때 목적에 비추어 추상화하려는가?  | 사물의 모양이나 위치 관계 등을 파악할 때 목적에 비추어 추상화하려는가?                                   |
| 상태 등을 관찰할 때 연결 상태를 같을 때에는 목적에 따라 도형을 추상화하려고 하는가?                           | 연결 상태가 같을 때에는 목적에 따라 같은 도형을 볼 수 있다는 것을 이용하려고 하는가?                          |
| 도형의 성질이나 상호 관계를 분명히 하는 데, 도형의 구성 요소에 착안하려고 하는가?                            | 변, 각, 꼭지점, 면 등의 내용에 착안하는가?<br>어떤 요소로 모양 또는 크기 등이 결정되는가에 착안하는가?             |
| 도형의 성질이나 상호 관계를 분명히 하기 위해, 기본 관계인 평행, 수직, 대소, 상등 또는 합동, 닮음 등에 주목하려고 하는가?   | 어떤 도형으로 분해되는가, 어떤 도형으로 구성되어 있는가 등에 착안하는가?                                  |
| 도형은 위치를 옮겨도 모양, 크기는 변하지 않는다는 것을 이용하려고 하는가?                                 | 평행이동, 대칭이동, 회전이동 등의 기본적인 이동을 이용하려고 하는가?                                    |
| 수량의 크기를 도형의 위치나 크기 등을 이용하여 나타내려고 하거나, 반대로 도형이나 공간의 성질을 수량을 이용하여 생각하려고 하는가? | 수량의 크기를 도형의 위치나 크기 등을 이용하여 나타내려고 하거나, 반대로 도형이나 공간의 성질을 수량을 이용하여 생각하려고 하는가? |
| 어떤 도형을 관찰함에 있어 이를 포함하는 도형이나 공간의 관찰을 통하여 하려고 하는가?                           | 어떤 도형을 관찰함에 있어 이를 포함하는 도형이나 공간의 관찰을 통하여 하려고 하는가?                           |
| 개형이나 대강의 위치 관계 등을 파악하여 개괄적인 구상을 한다거나 확인하려 하는가?                             | 개형이나 대강의 위치 관계 등을 파악하여 개괄적인 구상을 한다거나 확인하려 하는가?                             |

### 3. 수업 분석의 방법 및 분석의 기준

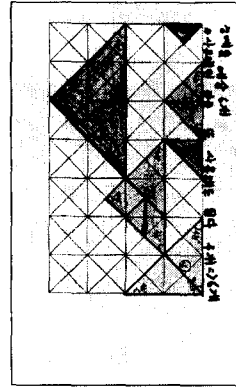
탱그램과 모자이크퍼즐을 활용한 실제 수업에서 초등학교 학생들의 수학적 사고와 본 교구의 유용성 및 현장에서의 구체적 활용 방법을 알아보기 위하여 片桐重男이 밝힌 도형에서의 수학적인 생각(이용률 외 공역, 1992)과 Reys(1975)의 교구에 대한 일반적인 이론 및 제 7차 교육과정 수학과 평면도형의 학습 목표 달성을 분석의 기준으로 하여 각각 <표 3>과 <표 4>와 같은 리스트를 만들었다. 또한 실제 학습 과정을 분석하기 위해, 학생의 대화를 채록하거나 이 채록의 정확성을 위하여 녹화 및 녹음을 하고 명확하지 않거나 불분명한 경우는 인터뷰 및 각 활동판과 활동카드의 내용을 분석하였다.

<표 4> 탱그램과 모자이크퍼즐 교구의 유용성 분석 기준

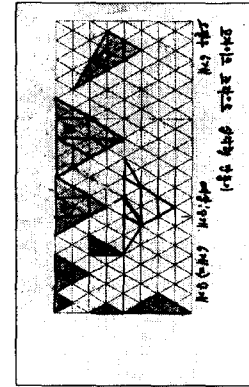
| 번호 | 탱그램과 모자이크퍼즐 교구의 유용성 분석 기준             |  |
|----|---------------------------------------|--|
| 1  | 탐색된 생각이나 수학적 개념을 사실적으로 구체적 표현을 제공하는가? | 도구는 수학원리를 구체적으로 표현해주기 때문에 무엇보다도 도구가 수학적으로 적절할 것이 중요하다.           |
| 2  | 수학적 개념을 명백하게 하는가?                     | 개념은 어떤 도구에 깊게 새겨져 있어서 몇 명의 학생들은 도구를 가지고 그들의 경험으로부터 타당한 생각을 표출한다. |
| 3  | 동기를 유발시키는가?                           | 단순하고 재미있는 도구는 학생의 상상력과 관심을 적절하게 자극하기 때문이다.                       |
| 4  | 가능한 다목적인가?                            | 도구는 개념 형성의 수준 차이에 대해서 뿐만 아니라 여러 학년에서 사용하는 수준에 대해 적절해야 한다.        |
| 5  | 추상화의 기초를 제공하는가?                       | 도구가 정확한 개념을 구체적으로 표현하는 요구의 중요성을 배경으로 한다.                         |
| 6  | 개인적 조작을 제공하는가?                        | 조작은 시각, 청각, 촉각, 미각 등을 포함한 여러 감각을 이용하므로 도구는 가능한 많은 감각을 이용해야 한다.   |

## IV. 수업 분석

### 1. 삼각형의 탐구



[그림 6] 학생의 삼각형 탱그램 활동판




[그림 7] 학생의 삼각형 모자이크 활동판

삼각형 탐구에서 변, 각, 꼭지점에 착안하여 모양과 크기가 다른 삼각형을 찾아보도록 하였다. 모자이크퍼즐로 만든 삼각형에는 예각삼각형(정삼각형), 직각삼각형, 둔각삼각형이 모두 나타난다. 이 중에서 학생들은 둔각삼각형 찾기를 어려워하였다. 여러 가지 삼각형을 변, 꼭지점, 각 등의 구성요소에 관해 비교·관찰하게 하여 두 변의 길이가 같은 삼각형은 이등변삼각형, 세 변의 길이가 같은 삼각형은 정삼각형, 직각이 하나 있는 삼각형은 직각삼각형, 세 각이 모두 예각인 삼각형은 예각삼각형, 한 각이 둔각인 삼각형은 둔각삼각형이라는 것을 변과 각으로 구분 지어 보게 하는 것도 중요하다. 삼각형은 다각형의 가장 기본적인 평면도형으로 다각형의 성질을 배우는데 기초가 된다.

탱그램과 모자이크퍼즐 조각을 사용하여 처음 탐구하는 시간이라 학생들은 퍼즐 조각의 조작 방법을 먼저 자세히 파악하려고 하였다. “한번 사용했던 조각들을 다음에 또 사용해도 되나?”, “활동판의 선에 꼭 맞아야 하는가?” 등 퍼즐 조각의 조작 방법을 확인하면서 모자이크퍼즐로 삼각형의 모양을 찾을 때에는 탱그램에서의 경험을 토대로 어렵하고 예상하며 이를

문제해결에 이용하려고 하였다. 문제의 뜻을 정확히 이해한다거나 해결 방법 및 조작을 개괄적으로 파악하려는 생각, 그리고 결과를 미리 예상해 보려는 생각은 탐구활동에서 매우 기본이 되는 수학적 생각이다.

각각의 퍼즐 조각들은 밀기, 돌리기, 뒤집기를 하여도 위치는 바뀌나 모양은 같다는 공간 감각을 가지고 삼각형을 만들어 나갔다. 처음에는 퍼즐 조각을 뒤집으면 안된다고 생각하는 학생도 있었다. 도형판을 이용하여 여러 가지 모양을 만들어 보는 활동에서 그들은 공간 감각을 익히고 조각의 개수가 달라도 외곽선으로 그려진 변의 길이가 같으면 같은 도형이라는 것을 인식해 나갔다. 도형의 위치를 옮겨도 그 모양이나 크기가 불변이라는 사실을 이용하려는 조각의 생각은 이 활동에서 자주 사용되었다.

어떤 학생은 [그림 7]에서 모자이크퍼즐로 삼각형과 비슷한 모양의 오목다각형 을 만들어 놓고 이것도 삼각형이 될 수 있는지를 다른 친구에게 물었다. 동료 학생들은 이 모양은 꼭지점이 5개이므로 삼각형이 아니라는 사실을 구체적으로 표현하였다. 이처럼 애매한 것에 대해 상호 의사소통을 통해 삼각형의 개념을 새롭게 확인하였다. 또한 탱그램을 사용할 때보다 더 많고 다양한 삼각형들을 찾아내었다.


삼각형의 구성요소는 이 구성요소를 이해함으로써 다른 평면도형의 구성 요소를 이해하는데 도움을 주기 때문에 중요하다. 완벽한 모양의 삼각형만 만들 것이 아니라 오해를 불러올 수 있는 비슷한 모양까지도 만들 수 있도록 구성이 가능한 모자이크퍼즐은 탱그램에서 찾아보기 힘든 사례들을 많이 제공해 준다. 특히 활동판을 사용하면 다양한 종류의 보다 많은 삼각형들을 쉽게 만들 수 있어서 모자이크퍼즐

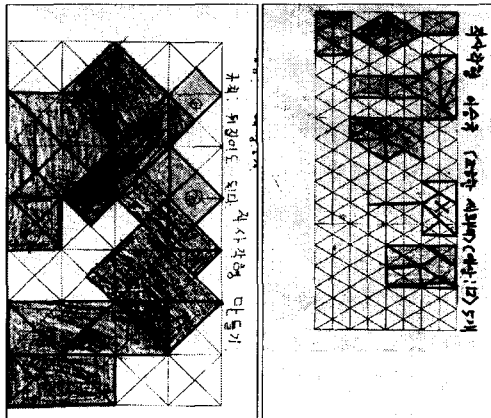
은 직각이등변삼각형 1종만 만들 수 있는 탱그램보다는 삼각형 탐구에 더 적합한 교구로 여겨진다.

학생들은 활동판에 있는 단위 칸의 수를 변화시키면서 삼각형의 크기와 각의 크기에 따른 삼각형의 모양에 주목하여 모든 삼각형을 찾으려고 애썼다. 학생들 각자가 모두 모든 삼각형들을 찾지는 못했지만 각각의 학생들이 찾아놓은 삼각형들을 모아보면 12종의 모든 삼각형이 나타난다.

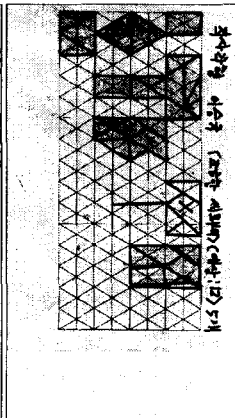
각 퍼즐 조각들의 이동, 합성 등의 조작 그 자체의 의미를 이해함으로써 삼각형을 보는 안목이 더 한층 다양해지고 이를 바탕으로 기본적인 법칙을 찾는데 이는 조작 그 자체와 관련된 기본적인 법칙을 찾으려는 생각으로 교사의 주의 깊게 살펴보아야 한다. 탱그램을 조작하여 삼각형을 만드는 기존 수업에 모자이크퍼즐을 함께 활용하면 삼각형의 성질, 크기, 모양, 합동, 닮음과 같은 수학적 개념을 발견하는데 보다 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

## 2. 직사각형과 정사각형의 탐구

탱그램과 모자이크퍼즐 조각들이 각각 어떻게 모여 직사각형 또는 정사각형이 되는지를 찾아보고 조각들의 윤곽이 나타나도록 그려보는 활동을 통하여 직사각형의 성질과 닮음의 초보적인 관계를 학습하였다. 각각의 퍼즐을 직접 조작하는 활동을 통하여 직사각형의 개념과 성질에 대한 이해가 가능함을 확인하였다. 이 활동에서 학생들은 '정사각형도 직사각형에 포함된다.'는 사실을 확인하였고, 직사각형이 아닌 반례  모양, [그림 9])를 보고 직사각형의 성질인 변, 각, 꼭지점의 수가 각각 4개이며 직각이 4개라는 것에 착안하여 그것은 직사각형이 아니라는 것을 설명했다. 구체물의 모양



[그림 8] 학생1의 직사각형 탱그램 활동판



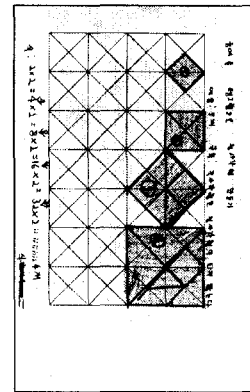
[그림 9] 학생4의 직사각형 모자이크퍼즐 활동판

을 통하여 직사각형을 추상화한 것이다.

모자이크퍼즐 활동판의 밑그림이 정삼각형 모양으로 이루어져 있으므로 처음에는 모자이크퍼즐로 직사각형 만들기가 생각보다 쉽지 않았다. 그러나 조각들을 몇 개씩 놓아가면서 그 부분들로 직각을 만들고 나서는 직사각형을 찾는 시간이 단축되었다. 이러한 조작활동을 통하여 직사각형을 추상화하고 다른 사각형과의 관계를 발견하게 되며 문제를 개괄적으로 파악하려는 생각을 하게 되었다.

탱그램과 모자이크퍼즐을 함께 병행한 직사각형 탐구 활동은 직사각형의 구성 요소에 대한 이해를 가능하게 하며 특히, 활동판을 사용하면 직사각형의 직각이 수평 방향으로 놓여있지 않으면 직사각형으로 생각하지 않는 미숙한 공간 개념을 보완해 줄 수 있다. 활동판의 밑그림이나 조각들을 몇 개씩 놓아가면서 만들어지는 여러 가지 방향의 직각을 확인하면서 직사각형을 찾는 경험을 보다 다양하게 할 수 있다. 이러한 직사각형 만들기 수업은 변의 길이 또는 면적탐구와 연결하여 직사각형의 넓이 관계를 학습하는데도 유용하게 활용될 수 있을 것으로 본다.

한편, 탱그램으로 4종류의 정사각형을 찾았는데, [그림 10]의 탱그램 활동판을 보면 일정한 규칙으로 정사각형을 찾으면서 단위 삼각형의 수가 16개일 때가 가장 크므로 이보다 큰 정사각형을 만들 수 없어서 4개가 전부라고 말했다. 도형의 개념을 심화할 때 다른 개념과의 관계를 알아보거나 개념을 확장할 때 증명문제를 해결하거나 이동 또는 전개에 관한 성질을 파악할 때 모든 경우의 수를 고려해 보기 위해 나름대로의 체계적인 기준을 세워 기본적인 성질을 이용하려는 생각은 중요한 생각이다. 학생들은 모자이크퍼즐로 만들 수 있는 정사각형을 처음에는 2~3개 정도는 될 것이라고 예상하였으나 이미 만들어 놓은 직사각형들의 각 변의 길이를 서로 대어보면서 직관에 의해 만들 수 없을 것이라고 말했다. 이것은 정삼각형의 한 변의 길이와 그 높이가 서로 다르다는 것을 직관적으로만 인식할 수 있기 때문이다. 활동판은 이 두 길이가 다름을 직관적으로 이해하는데 도움을 주고 있다.



[그림 10] 학생3의 정사각형 탱그램 활동판

### 3. 면적탐구

면적 탐구에서 활동판의 가치는 더욱 돋보인다. 탱그램으로 만든 삼각형들의 면적은 가장 작은 삼각형 조각을 1단위로 하고, 모자이크퍼즐로 만든 삼각형들의 면적은 정삼각형을 1단위로 하여 임의단위를 통한 측정 활동을 하였다. 7차 교육과정에서는 도형의 넓이를 5·가 단



계에서 처음 취급하지만, 실험을 할 당시의 4학년 학생들은 6차 교육과정에 따라 학습하고 있었기 때문에 면적이 무엇인지 알고 있었다. 그런데 대부분 직사각형의 공식으로 이미 외우고 있었지 그 공식이 단위 면적의 개수를 확장하여 만든 것인 줄은 이해하지 못했다.

교 사: 단위 삼각형(가장 작은 삼각형)을 기준으로 탱그램으로 만든 삼각형의 면적을 알아보아라. 변의 길이가 1일 때 작은 삼각형(단위 삼각형)은 몇 개인가?

모 두: 1개입니다.

교 사: 변의 길이가 단위 삼각형의 2배일 때 작은 삼각형의 수는?

학생 4: 4개입니다.

학생 3: 아 알았다.

학생 2: 변이 길이 1과 1을 곱하면 삼각형이 수가 나와요.

학생 3: 4배면 4곱하기 4, 5배면 5곱하기 5이예요.

학생 4: 아! 알았다. 선생님 삼각형의 수는 (한 변의 길이) × (한 변의 길이)예요.

학생 3: 변의 길이가 5이면 삼각형 수는 25개일 것 같아요.

활동판 위에 탱그램과 모자이크퍼즐 조각을 놓아 만든 각종 삼각형에 대해 단위 삼각형의 개수로 면적을 탐구하는 활동을 통해 변의 길이가 1배, 2배 증가함에 따라 단위 삼각형의 개수는  $n \times n$ 으로 증가하는 규칙을 찾아냈다. 뿐만 아니라 모든 조각들의 면적은 1단위 도형과의 관계에서 쉽게 구할 수 있으므로 조각 퍼즐을 사용하여 활동판 위에 만든 여러 가지 도형들의 면적도 직관적으로 금방 알아낼 수 있었다. 이를 바탕으로 면적은 변의 길이와 관계가 있음을 느끼게 되었고 면적을 구하기 위해서는 그것보다 쉬운 변의 길이(여기서는 변의 개수)를 살펴보아야 함을 인식하게 되었다.

따라서 본 면적탐구는 5-가 단계에서 직사각

<표 5> 삼각형의 변의 길이와 면적과의 관계 규칙

| 대상   | 활동 결과   |
|------|---|
| 학생 1 | (다른 친구의 의견을 열심히 듣고)<br>변의 길이 $\times$ 변의 길이   |
| 학생 2 | 탱그램 변의 길이 1과 1을 곱한다 그럼 삼각형<br>예) 변의 길이 2 $2 \times 2 = 4$ $3 \times 3 = 9$  |
| 학생 3 | 예) 4배면 $4 \times 4$<br>5배면 $5 \times 5$   |
| 학생 4 | 모자이크! 탱그램! 변의 길이 1과 1을 곱하면 삼각형이 수<br>가 나와요!<br>예) 변의 길이 2 $2 \times 2 = 4$ $3 \times 3 = 9$<br>변의 길이 5이면 삼각형 수는 25개일 것<br>같아요!<br>이렇게 구했어요! |

형, 정사각형, 삼각형의 넓이를 알아보는 기본 개념형성에 도움을 줄 수 있으며 아울러 5학년 학생들이 가장 어려워하는 내용 중에 하나인 복합도형의 면적을 구하는 문제는 원래도형을 이미 알고 있는 기본도형으로 분리하여 각각의 넓이를 구한다는 사실을 이해시키는 데에도 이러한 활동판을 사용한 면적탐구 활동이 유용하게 기여할 것으로 보인다. 활동판을 사용한 탱그램과 모자이크퍼즐은 여러 학년에 걸친 다목적용임에 틀림없다.

활동을 통해 사각형, 삼각형 등과 같은 도형의 넓이를 구하는 공식은 그 변의 길이와 함수 관계에 있으며 측정하기 쉬운 길이를 측정한다는 간접 측정의 필요성을 스스로 알게 하는 것이 바람직하다. 학년이 올라갈수록 구체적인 활동에만 머물지 않고 학생들에게 식에 대한 생각을 하게 하여야 한다. 사상 또는 관계를 식으로 나타내거나 식이 나타내는 생각, 증명의 과정을 약속에 따라 바르게 표현하려는 생각을 하도록 하는 것은 중요하다.

#### 4. 각도의 탐구

학생들은 일상 생활에서 각을 접할 기회가 많이 있음에도 불구하고 각에 대해 잘 인식하지 못하였다. 각이 무엇인지 말로 설명하지 못하고 “이거요”라고만 대답했다. 그러나 활동판에 놓인 단위 삼각형을 이용하면 각도기를 사용하지 않고도 각의 크기를 알 수 있다는 것을 알았다.

교 사: 각이 무엇일까?

학생 4: 이거요.

학생 3: 이거요

교 사: 각이 크다, 작다는 어떻게 알 수 있을까?

학생 4: 각도기로 재봐요.

학생 3: 눈으로 보면 알아요.

교 사: 각도기로 재는 방법, 눈으로 보는 방법의 다른 방법은 없을까?

학생 3: 활동판에 쓰이는 삼각형이요.

교 사: 각도에서 발견한 것을 말해 보세요.

학생 4: 90°와 45°만으로 되어 있다.

학생 1: 모두 직각삼각형이다.

교 사: 또 찾아낸 사실은?

학생 3: 삼각형의 크기에 관계없이 각의 크기는 모두 같다.

(중략)

학생 3: 작은 것 하나로 큰 것들의 각을 비교할 수 있어요.

학생 4: 세 각의 합은 45, 45, 90도니까 180도예요.

탱그램 조각으로 만든 삼각형은 몇 개의 서로 다른 각을 나타내는지를 알아본 결과 2개의 서로 다른 각(90°와 45°)으로 되어있고, 탱그램으로 만든 삼각형의 각은 삼각형의 크기와 관계없이 그 크기가 다 같으며, 각도를 이미 알고 있는 각을 다른 각에 대어 보면서 큰 각도의 크기를 비교해 보려고 했다. 삼각형은 모

두 똑같은 모양의 직각이등변삼각형이고 세 각을 합하면 180°임을 알아내었다.








각을 찾아보는 활동은 처음에는 삼각자를 갖다 놓고 본뜨는 방식으로 각을 이해시키지만 다음에는 구체물 속에 포함된 각의 관계를 통해 찾아보도록 하는 것이 좋다.

모자이크퍼즐 조각으로 각도를 탐구하게 할 때 각 조각들에 나타나는 각도 모두 구하는 활동은 의미있는 문제이다. 삼각형의 세 내각의 합이 180°라는 사실과 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다는 성질을 이용하여 ⑦번 둔각 삼각형의 밑각이 30°라는 사실을 얻을 수 있다. 따라서 ③번 직각삼각형은 각각 30°와 60°이고 [그림 3]에서 ②번 조각의 큰 둔각은 직선인 180°로부터 30°를 빼서 150°의 각도가 생긴다는 것은 알 수 있다. 물론 이것을 논리적으로 생각하지 않고 직관적으로만 생각해도 하면 ②번 조각의 큰 둔각은 90°와 60°의 합으로 계산할 수도 있다. 그러나 [그림 3]의 왼쪽 그림보다는 그 오른쪽 그림이나 [그림 5]의 활동판 위에 놓은 조각들의 모양을 통해 훨씬 더 직관적으로 각도를 파악할 수 있다. 이처럼 활동판은 각도를 탐구하는 데에도 유용하게 사용될 수 있다. 뿐만 아니라 닳은 삼각형을 만들고 2배, 3배, ... 등의 확대도를 그리는 활동으로 연장할 수도 있으리라 생각된다.

#### 6. 길이의 탐구

탱그램 조각들은 몇 개의 서로 다른 변의 길이를 가지는지 조사하게 하였다. 교사는 변의 길이를 단순화 및 기호화하도록 요구하였으나 학생들은 단지 각각의 모양에 재미있는 이름을 붙이는 데에 더 신경을 썼다. 학생들은 교사의 안내가 없으면 자기 나름대로 생각하는 경향이

있다.

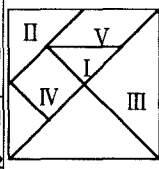
- 교 사:  모양을 보이며) 제일 작은 삼각형 조각의 이름은 무엇으로 하면 좋을까?
- 학생 3: 꼬맹이
- 학생 4: 1번
- 교 사:  모양을 보이며) 그러면 조금 큰 삼각형은?
- 학생 3: 엄마!
- 교 사:  모양을 보이며) 이 조각의 이름은 무엇이라고 하면 좋을까?
- 학생 3: 평행사변형 (\*평행사변형의 이름을 안다.)
- 교 사:  모양을 보이며) 이 조각의 이름은 무엇이라고 하면 좋을까?
- 학생 3: 직각이등변삼각형
- 교 사:    모양을 보이며) 이 조각들의 모양은 직각이등변삼각형 1, 2, 3이라고 하면 어떨까?
- 학생 1: 야! 이름이 재미있다.
- 학생 2: 1번, 2번 번호를 써야 되죠?
- 학생 4: 2번까지 했다.
- 학생 2: 그럴 필요가 없다. 그냥 재미있는 걸로 해야지.

학생들은 도형의 위치를 옮겨도 그 모양이나 크기가 불변이라는 사실을 이용하여 각 조각들의 변의 길이를 일일이 대어보았다. 그러다가 활동판 위에 놓인 칸의 수를 세어보면서 더 쉽게 비교할 수 있었다. <표 6>은 학생들이 활동판을 활용하여 찾아낸 길이들 사이의 관계이다.

이처럼 활동판은 학습을 안내하는 좋은 도구가 된다. 특히, 활동판을 사용한 길이의 탐구는 도형의 구성요소 중 조각들과 변 사이의 관계를 알아보게 함으로써 변의 길이에 따른 삼각형의 개념형성에 도움이 될 것으로 기대된다.




### 7. 다각형의 탐구

<표 6> 탱그램 조각들과 변의 길이와의 관계 활동 결과

| 학생   | 활동 결과   |
|------|---|
| 학생 1 | <ul style="list-style-type: none"> <li>직각이등변삼각형의 밑변과 꼭 맞는 변은 평행사변형이다.</li> <li>직각이등변삼각형 밑변의 2배는 직각이등변삼각형 III이다.</li> <li>직각이등변삼각형 I의 빗변과 꼭 맞는 변은 평행사변형과 정사각형이다.</li> <li>직각이등변삼각형 I 빗변의 2배는 직각이등변삼각형 III이다.</li> </ul>   |
| 학생 2 | <ul style="list-style-type: none"> <li>직각이등변삼각형 I의 한 변과 정사각형의 한 변의 길이가 같다.</li> <li>직각이등변삼각형 I의 한 변과 직각이등변삼각형 II의 한 변의 길이가 같다.</li> <li>직각이등변삼각형 I의 한 변의 길이가 직각이등변삼각형 III의 2배이다.</li> <li>정사각형과 평행사변형의 한 변의 길이가 같다.</li> <li>직각이등변삼각형 II와 직각이등변삼각형 III의 한 변의 길이가 같다.</li> </ul>   |
| 학생 3 | <ul style="list-style-type: none"> <li>평행사변형과 직각이등변삼각형 I의 2개를 다 합치면 직각이등변삼각형 III이 똑같이 나온다. 그러니까 합치면 길이가 같은 탱그램 조각이 나온다.</li> <li>밑변이 같거나 몇 배가 되는 것</li> <li>빗변이 같거나 몇 배가 되는 것</li> <li>직접 대보면 길이가 같은 것이 나온다.</li> </ul>   |
| 학생 4 | <ul style="list-style-type: none"> <li>직각이등변 삼각형 I의 밑변과 같은 변은 평행사변형, 직각이등변삼각형 II에 있다.</li> <li>직각이등변삼각형 I의 빗변은 정사각형, 평행사변형의 변의 길이와 같다.</li> <li>직각이등변삼각형 II의 빗변과 평행사변형에 있다.</li> <li>직각이등변삼각형 I의 밑변의 2배가 되는 변은 직각이등변삼각형 III의 밑변이다.</li> <li>직각이등변삼각형 II의 밑변은 직각이등변삼각형 III의 빗변과 같다.</li> <li>평행사변형 윗변의 2배되는 변은 직각삼각형 III의 밑변과 같다.</li> <li>직각이등변삼각형 I의 빗변의 2배는 직각이등변삼각형 III의 빗변의 길이와 같다.</li> <li>직각이등변삼각형 III의 빗변은 정사각형의 2배와 같다.</li> </ul> |

다각형에서 변의 개수가 가장 작은 것은 삼각형이다. 길이를 맞춰 한 변의 옆에 다른 조각들을 갖다 붙이면서 변의 개수를 점점 늘려갈 수 있다. 학생들은 5각형 이상을 찾으려면 1개의 조각만으로는 안되니까 2개의 조각부터 시작하여야 함을 알아낸다. 그러면서 두 조각을 꼭지점끼리만 붙어도 다각형인가라는 질문에 다각형이 된다고 생각하는 학생들이 있었다. 그러나 두 변이 (한 점에서) 직선으로 이어지는 경우에도 그러한가라는 교사의 질문은 각은 평각(180°)보다 작아야 한다는 생각이 깔려있고 학생들도 두 변이 직선으로 이어지면 새로운

각이 생기지 않으므로 다각형이 아니라고 말한 것 같다.

- 학생 3:  처럼 꼭지점만 붙어도 되나요?  
 교 사: 꼭지점끼리만 붙은 것도 다각형이라고 할 수 있을까?  
 학생 3: 다각형이 된다.  
 학생 4: 된다.  
 교 사: 두 변이 직선으로 이어지는데도 다각형이라고 할 수 있을까?  
 학생 2: 아니오.  
 교 사: 그럼, 꼭지점만 붙여 만든 것은 다각형이라고 하지 말자.  
 (중략)  
 학생 2: 신기한 모양 만들기 대회 같다.  
 학생 4: 변이 5개다.  
 교 사: “변이 5개다.”를 다른 말로 표현해 보아라.  
 학생 4: 오각형이다.  
 교 사: 승환이는 벌써 3개를 발견했구나!  
 학생 2: 찾은 게 다 오각형이네.  
 학생 3: 나는 칠각형이 나왔다.  
 학생 4: 나는 7조각을 다 사용하여 구각형을 만들었다.  
 학생 2: 나는 6개를 만들었다.  
 교 사: 나비 모양 8각형을 만들었구나.  
 학생 2: 만든 것에 다른 조각을 붙이기만 하면 다각형인데 뭐!  
 교 사: 하트, 나비, 우주선... 재미있는 모양으로 찾았구나!  
 학생 4: 나는 엡그레이드 시켰다.  
 학생 3:  나는 하트를 만들었다.  
 학생 2: 나는 7개 만들었다.  
 학생 1: 아싸!  나는 ‘S’자를 만들었다.  
 학생 4: 나는 전철과 고속도로를 만들었다.  
 학생 1: 로켓도 만들었다.  
 학생 4: 9번째 당첨이다. 배 모양으로 만들었다.  
 학생 4: 12번째로 여우 얼굴을 만들었다.

다각형 만들기 활동은 학생들이 매우 재미있

어 했다. 다각형에 이름을 붙일 때 동물 이름이나 하트, 우주선, 전철, 고속도로 등 다양한 이름을 붙이는 재미를 느꼈던 것이다. 정규교육과정에서는 오목다각형을 취급하지 않고 있지만 교과서나 교사가 그것을 제한하기 전까지 학생들은 오목다각형도 다각형의 일종으로 여기며 오목다각형에 대한 거부감이 없음을 보여준다.



[그림 11] 학생2의 다각형 모자이크퍼즐 활동판

## V. 결론

탱그램과 모자이크퍼즐을 활용한 수업에서 片桐重男이 강조하는 초등학교 평면도형 수업에서의 수학적 사고(이용률 외 공역, 1992)가 다양하게 나타나는 것을 확인할 수 있었다. 각각의 사고과정과 내용들은 본문의 수업분석에 밝혀 두었다.

탱그램과 모자이크퍼즐은 분명 각각으로도 평면도형 학습에 유용하게 사용될 수 있는 별개의 조작교구이다. 하지만 이 두 교구를 함께 사용하면서 각종 도형과 길이, 면적, 각도, 다각형 등 초등학교 3-가 단계부터 5-나 단계까지의 도형학습에 계통성을 살릴 수 있고 내용면에서도 유용하게 활용할 수 있는 가능성을 확인하였다. 특히, 이 교구들을 각각의 활동판과 병행하여 사용할 때 학생들은 이 교구들을 사용한 활동 결과를 제대로 표현하고 직관적인 이해를 통한 수학적 개념 형성에 도움을 받을

수 있음도 보았다. 구체적 조작물을 사용함으로써 학생들은 평면도형 학습활동에 활동적으로 참여하였고, 상호 의사소통을 통하여 자신의 아이디어를 말이나 글로 표현해 봄으로써 개념과 원리를 더욱 깊이 이해하고 있음을 확인하였다. 그리고 교사는 활동판 위에 기록하거나 표시한 학생들의 학습 결과물을 좀 더 세밀히 관찰할 수 있는 자료를 얻을 수 있게 된다.

이는 지오보드라는 조작교구를 사용하면서 점중이를 병행하는 것과 같은 원리이며, 또한 정사각 지오보드만으로는 정삼각형을 그릴 수 없기 때문에 정삼각 지오보드를 보완적으로 필요로 하는 것과 같은 의미로 해석할 수 있다.

## 참 고 문 헌

강문봉 외 공저 (2001). 초등수학교육의 이해. 경문사  
 강완 외 (1999). 초등 수학 학습지도의 이해. 양서원.  
 교육부 (1998). 제7차 수학과 교육과정. 대한교과서주식회사.  
 교육부 (2000a). 수학 3-가. 대한교과서주식회사.  
 교육부 (2000b). 수학 4-가. 대한교과서주식회사.  
 교육인적자원부 (2000a). 수학 3-나. 대한교과서주식회사.  
 교육인적자원부 (2000b). 수학 4-나. 대한교과서

주식회사.  
 김남희 (2000). 탱그램 활용을 통한 수학적 생각의 구체화. 대한수학교육학회지 학교수학. 2(2), 563-587.  
 김정하 (2000). Dienes의 수학 학습 원리의 구체화 방안 연구. 인천교육대학교 대학원 석사학위논문.  
 박교식 (2002). 유사 탱그램과 그 수학교육적 시사점. 대한수학교육학회지 학교수학. 4(1), 97-109.  
 이용률 (1998). 수학 지도의 기초·기본. 경문사.  
 이용률 외 공역(1992). 수학적인 생각의 구체화. 경문사.  
 이인환, 류기천, 이석희 (1999). 수학교육과 탱그램 활동. 한국수학교육학회지 시리즈 F. 수학교육학술지 제3집, 139-168.  
 Reys, R. E. (1975). Considerations for teachers using manipulative materials. Smith & Backman(Eds). *Teacher-made Aids for Elementary School Mathematics. Readings from the Arithmetic Teacher*, 5-12.  
 Bernstein, A. L. (1975). Use of manipulative devices in teaching mathematics. Smith & Backman(Eds). *Teacher-made Aids for Elementary School Mathematics. Readings from the Arithmetic Teacher*, 13-16.  
 Welchman, R (1999). Are You Puzzled?. *Teaching Children Mathematics*. 5(7), 412-415.

# An Analysis Research of Mathematics Classes utilizing Tangrams and Mosaic Puzzles

An, Ju-Hyoung(Inchon Dongsu Elementary School)

Song, Sang-hun(Inchon National University of Education)

In this study we tried to find the method of using the tangrams and the mosaic puzzles together for learning the elementary geometry in the Korean primary schools. The tangram and the mosaic puzzle activity-panels were developed and the activity-cards for them also were designed. The criteria to be used for the analyses of contents of the activity-cards were developed. We surveyed and analyzed the students' responses.

A previous research had insisted that solely using the tangrams were not useful in learning about an obtuse-angled triangle in the elementary geometry (Welchman, 1999), but the combinative uses of the tangrams and the mosaic puzzles were found to extend the limits of the previous study in investigating the figures of the plain diagrams.

Actually, the tangrams and the mosaic

puzzles helped the students to learn the concepts of several elements of the plain diagrams such as 'angles', 'sides', and 'angular points', with students' operational comparison of the diagrams developed with them. They also provided useful clues in learning the relationship between the 'length' and the 'area' of the plain diagrams.

The students participated in the class with much activities, using the operational learning materials. They also comprehended the concepts and the principles of the elementary geometry more thoroughly, expressing their ideas in spoken or written languages through interactive communication.

In conclusion, the tangram and mosaic puzzles can be used for learning the elementary geometry of the primary school level as motivative learning materials, helping students enhance diverse mathematical thinking and discover mathematical principles.