대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.2, 297-315. June 2002

기획 수업아이디어

규칙성이 있는 수식을 소재로 한 교수단원 설계 연구

박교식*

I. 서론

이 논문의 목적은 비트만(Wittmann, 1984, 1995)의 관점에서 '규칙성(pattern)이 있는 수식'을 소재로 한 교수단원(教授單元, teaching units)을 설계(design)하는 것이다. 이 논문에서 '규칙성이 있는 수식'이란, 이를테면 다음과 같이 어떤 규칙성을 찾을 수 있는 일련의 수식을 의미한다. 다음 일련의 수식에서 승수는 11로 고정되어 있고, 피승수는 한 자리씩 늘어나고 있으며, 또 곱도 한 자리씩 늘어나고 있다. 이때 피승수에서 늘어나는 자리의 수는 언제나 6이다. 곱에서 가장 큰 자리의 수와 가장 작은 자리의 수는 언제나 7로 고정되어 있다. 그리고 중간에 있는 자리의 수는 모두 3이다.

$67\times 11=737$

$667\times 11=7,337$

$6,667\times 11=73,337$

$66,667\times 11=733,337$

$666,667\times 11=7,333,337$

이 논문의 목적은 바로 이와 같은 일련의 수식을 소재로 하여, 그러한 소재에서 찾을 수 있는 의문에 대한 해결을 추구하는 과정에서 관련된 수학 지식을 심화하고, 아울러 관련된 수학적 사고를 형성할 수 있게 하는 교수단원을 설계하는 것이다.

교수단원은 어떤 일정한 교수 목표를 성취할 수 있도록 체계적으로 설계·조직해 놓은 교수·학습 내용 전체를 의미한다. 교수단원의 설계는 인위적인 대상(artificial objects)을 창의적으로 구성하는 것이고, 그런 점에서 그것은 디자인 과학의 영역에 속한다. 일반적으로 디자인 과학은 어떤 인위적인 대상을 만들어 내는 분야의 과학을 의미한다.(Wittmann, 1995) 디자인 과학에서는 인위적인 대상을 만들어 내기 위한 설계 과정이 반드시 관련된다. 이 인위적인 대상은 설계하는 사람의 재능(ingenium) 즉, 관련 이론에 바탕을 둔 건설적인 기능과 체계적인 평가에 좌우된다. 이와 마찬가지로 교수단원도 설계하는 사람의 능력에 따라 질적으로 다양한 교수단원이 만들어 질 수 있다. 특히, 비트만(1995)에 의하면, 실속 있는 교수 단원은 다음의 특징을 가진다. 첫째, 수학교육의 중요 목적, 내용 및 원리를 나타낸다. 둘째, 수학적 활동을 위한 풍부한 자원을 제공한다. 셋째, 융통성 있을 뿐만 아니라 특별한 교실의 여건에 쉽게 적응할 수 있다. 넷째, 교수·학습의 수학적, 심리학적 및 교육학적 측면을 총체적인 방법으로 포함하며, 따라서 경험적 연구를 위한 넓은 잠재력을 제공한다.

본 논문에서는 비트만의 이러한 관점에 따라 규칙성이 있는 수식을 소재로 한 실속 있는 교수단원을 설계하여, 수학 교수-학습을 위한 유

* 인천교육대학교

용한 하나의 자료로 제시하고자 한다.

II. 승수가 고정된 수식 만들기

1. 수 11을 이용하여 수식 만들기

다음 5개의 식을 보자. 이 5개의 식은 이 논문에서 설계하고자 하는 교수단원의 첫 번째 기본 소재이다. 이 식에서 승수는 11로 고정되어 있고, 피승수는 한 자리씩 커지고 있다. 일의 자리의 수는 항상 7이고 다른 자리의 수는 모두 6이다. 곱에서 가장 큰 자리의 수와 일의 자리의 수는 6이고, 다른 자리의 수는 모두 3이다.

$67\times11=737$

$667\times11=7,337$

$6,667\times11=73,337$

$66,667\times11=733,337$

$666,667\times11=7,333,337$

이 수식에서 자연스럽게 가장 먼저 생겨나는 의문은 '이와 같은 규칙성이 계속해서 성립할까'하는 것이다. 즉, n자리 수 66⋯67(6이 n-1개)에 11을 곱하면 n+1자리 수 73⋯37(3이 n-1개)이 되는가 하는 것이다. 다음과 같이 두 개의 식을 더 만들 수 있으므로, 이 규칙성이 계속해서 성립할 것으로 예측된다. 그러나 이 이후의 식에 대해 규칙성의 성립 여부를 확인하는 것은 쉬운 일이 아니다.

$6,666,667\times11=73,333,337$

$66,666,667\times11=733,333,337$

따라서 여기서 n자리 수 66⋯67(6이 n-1개)에 11을 곱하면 n+1자리 수 73⋯37(3이 n-1개)이 되는지 검토하는 것을 학생들에게 첫 번째 과제로 제시할 수 있다.

n자리 수 66⋯67은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+(6+1)$$

승수 11은 10+1과 같으므로, n자리 수 66⋯67과 11의 곱은 다음과 같다.

$$(6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+6+1)\times(10+1)$$

이 식을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(6\times10^{n}+6\times10^{n-1}+\cdots+6\times10^{2}+60+10)\\&\quad+(6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+6+1)\\&=6\times10^{n}+12\times10^{n-1}+\cdots\\&\quad+12\times10^{2}+12\times10+10+6+1\\&=6\times10^{n}+(10^{n}+2\times10^{n-1})+(10^{n-1}+2\times10^{n-2})\\&\quad+\cdots+(10^{2}+2\times10)+10+(6+1)\\&=(6\times10^{n}+10^{n})+(2\times10^{n-1}+10^{n-1})+\cdots\\&\quad+(2\times10^{2}+10^{2})+(2\times10+10)+(6+1)\\&=7\times10^{n}+3\times10^{n-1}+\cdots+3\times10^{2}+3\times10+7\end{aligned}$$

여기서 식

$$7\times10^{n}+3\times10^{n-1}+\cdots+3\times10^{2}+3\times10+7$$

은 10^n의 자리의 수와 일의 자리의 수가 각각 7이고, 나머지 n-1개 자리의 수는 모두 3인 n+1자리 수 73⋯37을 의미한다. 따라서 위의 규칙성이 계속해서 성립한다는 것을 알 수 있다.

학생들에게 제시할 수 있는 두 번째 과제는 이러한 규칙성을 가진 식을 더 찾아보는 것이다. 이 과제를 해결하기 위해 n자리 수로 일의 자리의 수가 x+1이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 x인 수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+(x+1)$$

이 수와 11의 곱은 다음과 같다.

$$(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+x+1)\times(10+1)$$

이 식을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(10^{n}x+10^{n-1}x+\cdots+10^{2}x+10x+10)\\&\quad+(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+x+1)\\&=x\times10^{n}+2x\times10^{n-1}+\cdots+\end{aligned}$$

$2x\times 10^2+2x\times 10+10+x+1$

여기서 $2x<10$ 즉, $x<5$라고 하면 받아올림이 생기지 않으므로 10^n의 자리의 수는 x가 되어 일의 자리의 수 $x+1$과 같지 않게 되고, 이것은 조건에 맞지 않는다. 따라서 $2x\geq 10$ 즉, $x\geq 5$이어야 한다. 그런데 $x=9$이면 $x+1=10$이 되어 조건에 맞지 않으므로 $x\leq 8$임을 알 수 있다. 이때 위의 식을 계속해서 정리하면 다음과 같다.

$$x\times 10^n+\{10^n+(2x-10)\times 10^{n-1}\}+\{10^{n-1}$$
$$+(2x-10)\times 10^{n-2}\}+\cdots+\{10^2+(2x-10)\times 10\}$$
$$+10+(6+1)$$
$$=(x\times 10^n+10^n)+\{(2x-10)\times 10^{n-1}+10^{n-1}\}+\cdots$$
$$+\{(2x-10)\times 10^2+10^2\}+\{(2x-10)\times 10+10\}+(6+1)$$
$$=(x+1)\times 10^n+(2x-9)\times 10^{n-1}+\cdots$$
$$+(2x-9)\times 10^2+(2x-9)\times 10+(x+1)$$

여기서 식

$$(x+1)\times 10^n+(2x-9)\times 10^{n-1}+\cdots$$
$$+(2x-9)\times 10^2+(2x-9)\times 10+(x+1)$$

은 10^n의 자리의 수와 일의 자리의 수가 각각 $x+1$이고, 나머지 n-1개 자리의 수는 모두 $2x-9$인 $n+1$자리 수를 의미한다. 앞의 첫 번째 과제에서 $x=6$인 경우를 다루었으므로, $x=5$라고 하자. 그러면 $2x-9=1$이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$56\times 11=616$
$556\times 11=6,116$
$5,556\times 11=61,116$
$55,556\times 11=611,116$
$555,556\times 11=6,111,116$
…

$x=7$이라고 하자. 그러면 $2x-9=5$이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$78\times 11=858$
$778\times 11=8,558$
$7,778\times 11=85,558$
$77,778\times 11=855,558$
$777,778\times 11=8,555,558$
…

$x=8$이라고 하자. 그러면 $2x-9=7$이므로 성립함을 알 수 있다.

$89\times 11=979$
$889\times 11=9,779$
$8,889\times 11=97,779$
$88,889\times 11=977,779$
$888,889\times 11=9,777,779$
…

지금까지 일의 자리의 수가 $x+1$이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 x인 n자리 수와 11의 곱이, 10^n의 자리의 수와 일의 자리의 수가 각각 $x+1$이고, 나머지 n-1개 자리의 수는 모두 $2x-9$인 $n+1$자리 수가 되는 경우를 모두 찾았다. 그런데 만약 모든 자리의 수가 x인 n자리 수와 11을 곱해도 위에서 볼 수 있었던 것과 유사한 규칙성을 찾을 수 있을까? 이것이 바로 학생들에게 제시할 수 있는 세 번째 과제이다.

모든 자리의 수가 x인 n자리 수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+x$$

이 수와 11의 곱은 다음과 같다.

$$(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+x)\times(10+1)$$

이 식을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$(10^n x+10^{n-1}x+\cdots+10^2x+10x)$$
$$+(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+x)$$
$$=x\times 10^n+2x\times 10^{n-1}+\cdots+2x\times 10^2+2x\times 10+x$$

여기서 $2x\geq 10$ 즉, $x\geq 5$이면 받아올림이 생겨 10^n의 자리의 수가 $x+1$이 되어 조건에 맞지 않는다. 따라서 $2x\leq 8$ 즉, $x\leq 4$이어야 한다.

여기서 식

$$x\times 10^n+2x\times 10^{n-1}+\cdots+2x\times 10^2+2x\times 10+x$$

은 10^n의 자리의 수와 일의 자리의 수가 각각 x이고, 나머지 n-1개 자리의 수는 모두 $2x$인 n+1자리 수를 의미한다.

x=1이라고 하자. 그러면 $2x$=2이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

11×11=121

111×11=1,221

1,111×11=12,221

11,111×11=122,221

111,111×11=1,222,221

…

x=2라고 하자. 그러면 $2x$=4이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

22×11=242

222×11=2,442

2,222×11=24,442

22,222×11=244,442

222,222×11=2,444,442

…

x=3이라고 하자. 그러면 $2x$=6이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

33×11=363

333×11=3,663

3,333×11=36,663

33,333×11=366,663

333,333×11=3,666,663

…

x=4라고 하자. 그러면 $2x$=8이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

44×11=484

444×11=4,884

4,444×11=48,884

44,444×11=488,884

444,444×11=4,888,884

…

2. 수 9를 이용하여 수식 만들기

다음 5개의 식을 보자. 이 5개의 식은 이 논문에서 설계하고자 하는 교수단원의 두 번째 기본 소재이다. 이 식에서 승수는 9로 고정되어 있고, 피승수는 한 자리씩 커지고 있다. 이 때 일의 자리의 수는 항상 7이고 다른 자리의 수는 모두 6이다. 곱에서 가장 큰 자리의 수는 6, 일의 자리의 수는 3이고, 다른 자리의 수는 모두 0이다.

67×9=603

667×9=6,003

6,667×9=60,003

66,667×9=60,0003

666,667×9=6,000,003

이와 같은 규칙성이 계속해서 성립하는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 네 번째 과제이다. 즉, n자리 수 66…67(6이 n-1개)에 9를 곱하면 n+1자리 수 60…03(3이 n-1개)이 되는가? 다음과 같이 몇 개의 식을 더 만들 수 있으므로, 이 규칙성은 계속해서 성립할 것으로 예측된다.

6,666,667×9=60,000,003

66,666,667×9=600,000,003

실제로 다음과 같이 이 규칙성이 계속해서 성립한다는 것을 알 수 있다. 이를테면 n자리 수 66…67은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$6\times 10^{n-1}+6\times 10^{n-2}+\cdots+6\times 10+(6+1)$$

승수 9는 10-1과 같으므로 결국 n자리 수 66…67과 9의 곱은 다음과 같다.

$$(6\times 10^{n-1}+6\times 10^{n-2}+\cdots+6\times 10+6+1)\times(10-1)$$

이 식을 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$(6\times 10^{n}+6\times 10^{n-1}+\cdots+6\times 10^{2}+60+10)$$
$$-(6\times 10^{n-1}+6\times 10^{n-2}+\cdots+6\times 10+6+1)$$
$$=6\times 10^{n}+10-(6+1)$$

$= 6\times 10^{n}+3$

여기서 식 $6\times 10^{n}+3$은 10^{n}의 자리의 수가 6, 일의 자리의 수가 3이고, 나머지 n-1개 자리의 수는 모두 0인 n+1자리 수 60⋯03을 의미한다. 따라서 위의 규칙성이 계속해서 성립한다는 것을 알 수 있다.

이제 이와 같은 규칙성이 있는 수식을 더 찾아보자. 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 다섯 번째 과제이다. n자리 수로 일의 자리의 수가 $x+1$이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 x인 수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+(x+1)$$

이 수와 9의 곱은 다음과 같다.

$$(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+x+1)\times(10-1)$$
$$=(10^{n}x+10^{n-1}x+\cdots+10^{2}x+10x+10)$$
$$-(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+x+1)$$
$$=x\times 10^{n}+(9-x)$$

여기서 식 $x\times 10^{n}+(9-x)$는 10^{n}의 자리의 수는 x, 일의 자리의 수는 $9-x$이고, 나머지 n-1개 자리의 수는 모두 0인 n+1자리 수를 의미한다. 여기서 x=9이면 $x+1=10$이 되어 조건에 맞지 않으므로 $x\leq 8$임을 알 수 있다.

x=1이라고 하자. 그러면 $9-x$=8이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

12×9=108
112×9=1,008
1,112×9=10,008
11,112×9=100,008
111,112×9=1,000,008
⋯

x=2라고 하자. 그러면 $9-x$=7이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

23×9=207
223×9=2,007
2,223×9=20,007
22,223×9=200,007
222,223×9=2,000,007
⋯

x=3이라고 하자. 그러면 $9-x$=6이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

34×9=306
334×9=3,006
3,334×9=30,006
33,334×9=600,006
333,334×9=6,000,006
⋯

x=4라고 하자. 그러면 $9-x$=5이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

45×9=405
445×9=4,005
4,445×9=40,005
44,445×9=400,005
444,445×9=4,000,005
⋯

x=5라고 하자. 그러면 $9-x$=4이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

56×9=504
556×9=5,004
5,556×9=50,004
55,556×9=500,004
555,556×9=5,000,004
⋯

x=6이라고 하자. 그러면 $9-x$=3이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

67×9=603
667×9=6,003
6,667×9=60,003
66,667×9=600,003
666,667×9=6,000,003
⋯

x=7이라고 하자. 그러면 $9-x$=2이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$78\times9=702$

$778\times9=7{,}002$

$7{,}778\times9=70{,}002$

$77{,}778\times9=700{,}002$

$777{,}778\times9=7{,}000{,}002$

$\cdots$

x=8이라고 하자. 그러면 $9-x=1$이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$89\times9=801$

$889\times9=8{,}001$

$8{,}889\times9=80{,}001$

$88{,}889\times9=800{,}001$

$888{,}889\times9=8{,}000{,}001$

$\cdots$

III. 제곱이 있는 수식 만들기

다음 세 개의 식은 앞에서 본 것보다 다소 복잡하다. 이 세 개의 식은 이 논문에서 설계하고자 하는 교수단원의 세 번째 기본 소재이다. 이 세 식에도 어떤 규칙성이 있다. 즉, 피감수에서는 5가 한 개씩, 감수에서는 4가 한 개씩 늘어나고 있다. 또 차에서는 1이 두 개씩 늘어나고 있다.

$6^2-5^2=11$

$56^2-45^2=1{,}111$

$556^2-445^2=111{,}111$

이 세 개의 식은 $11\times1=11$, $101\times11=1{,}111$ 그리고 $1{,}001\times111=111{,}111$임을 이용하여 만든 것이다. 위의 세 식에서 다음을 쉽게 알 수 있다.

$6^2-5^2=(6+5)\times(6-1)=11$

$56^2-45^2=(56+45)\times(56-45)=1{,}111$

$556^2-445^2=(556+445)\times(556-445)=111{,}111$

일반적으로 이 세 식에서 볼 수 있는 규칙성은 계속해서 성립하는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 여섯 번째 과제이다.

일의 자리의 수가 6이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 5인 n자리 수 55…56과 일의 자리의 수가 5이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 4인 n자리 수 44…45에 대해 다음이 성립한다.

$55\cdots56^2-44\cdots45^2$

$=(55\cdots56+44\cdots45)(55\cdots56-44\cdots45)$

일의 자리의 수가 6이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 5인 n자리 수 55…56을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$5\times10^{n-1}+5\times10^{n-2}+\cdots+5\times10+6$$

같은 방법으로 일의 자리의 수가 5이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 4인 n자리 수 44…45를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$4\times10^{n-1}+4\times10^{n-2}+\cdots+4\times10+5$$

이제 55…56+44…45를 계산하면 다음과 같다.

$(5\times10^{n-1}+5\times10^{n-2}+\cdots+5\times10+6)$

$+(4\times10^{n-1}+4\times10^{n-2}+\cdots+4\times10+5)$

$=(5+4)\times10^{n-1}+(5+4)\times10^{n-2}+\cdots$

$+(5+4)\times10+(6+5)$

$=9\times10^{n-1}+9\times10^{n-2}+\cdots+9\times10+(10+1)$

$=10^n+1$

여기서 식 10^n+1은 10^n의 자리의 수와 일의 자리의 수가 각각 1이고, 나머지 자리의 수는 모두 0인 n+1자리 수 10…01을 의미한다.

또 55…56-44…45를 계산하면 다음과 같다.

$(5\times10^{n-1}+5\times10^{n-2}+\cdots+5\times10+6)$

$-(4\times10^{n-1}+4\times10^{n-2}+\cdots+4\times10+5)$

$=(5-4)\times10^{n-1}+(5-4)\times10^{n-2}+\cdots+(5-4)\times10+(6-5)$

$=10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1$

그런데 식

$$10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1$$

은 모든 자리의 수가 1인 n자리 수 11…1을 의

미하므로, 결국 다음이 성립함을 알 수 있다.

$(10^n+1)\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$

$=(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^{n+1}+10^n)$

$+(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$

$=10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10+1$

여기서 식

$$10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10+1$$

은 모든 자리의 수가 1인 $2n$자리 수 $11\cdots1$을 의미한다. 따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$6^2-5^2=11$

$56^2-45^2=1,111$

$556^2-445^2=111,111$

$5,556^2-4,445^2=11,111,111$

$55,556^2-44,445^2=1,111,111,111$

$\cdots$

이와 같은 규칙성을 가진 식을 더 찾을 수 있는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 일곱 번째 과제이다. 먼저 다음을 이용해서 위와 같은 규칙성을 가진 식을 더 만들어 보자.

$11\times2=22$

$101\times22=2,222$

$1,001\times222=222,222$

$\cdots$

1 이상 8 이하의 임의의 자연수 x, y에 대해 일의 자리의 수가 $x+1$이고, 나머지 다른 자리의 수가 모두 x인 n자리 수를

$$10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+(x+1)$$

로 나타낼 수 있다.($x=9$이면 $x+1=10$이 되어 조건에 맞지 않는다.) 또, 일의 자리의 수가 $y+1$이고, 나머지 다른 모든 자리의 수가 y인 n자리 수를

$$10^{n-1}y+10^{n-2}y+\cdots+10y+(y+1)$$

로 나타낼 수 있다.($y=9$이면 $y+1=10$이 되어 조건에 맞지 않는다.) 따라서 위와 같은 규칙성을 가진 식을 더 만들기 위해

$(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+x+1)^2$

$-(10^{n-1}y+10^{n-2}y+\cdots+10y+y+1)^2$

을 계산한 결과가 모든 자리의 수가 2인 $2n$자리 수 $22\cdots2$가 된다고 가정해 보자. 위의 식을 인수분해하여 정리하면 다음과 같다.

$\{(10^{n-1}x+\cdots+x+1)+(10^{n-1}y+\cdots+y+1)\}$

$\times\{(10^{n-1}x+\cdots+x+1)-(10^{n-1}y+\cdots+y+1)\}$

$=\{10^{n-1}(x+y)+10^{n-2}(x+y)+\cdots+(x+y)+2\}$

$\times\{10^{n-1}(x-y)+10^{n-2}(x-y)\cdots+(x-y)\}$

이 식에서

$10^{n-1}(x+y)+10^{n-2}(x+y)+\cdots+(x+y)+2\}$

$=10\cdots01$ ($n+1$자리 수)

$10^{n-1}(x-y)+10^{n-2}(x-y)\cdots+(x-y)$

$=22\cdots2$ (n자리 수)

이기 위해서는 $x+y=9$, $x-y=2$이어야 한다. 이것을 만족하는 자연수 x, y의 값을 구할 수 없다. 따라서 주어진 식을 이용하여 규칙성을 가진 수식을 더 만들 수 없다.

두 번째로 다음 수식을 이용해 보자.

$11\times3=33$

$101\times33=3,333$

$1,001\times333=333,333$

$\cdots$

위와 같은 방법으로 계속할 때

$10^{n-1}(x+y)+10^{n-2}(x+y)+\cdots+(x+y)+2\}$

$=10\cdots01$ ($n+1$자리 수)

$10^{n-1}(x-y)+10^{n-2}(x-y)\cdots+(x-y)$

$=33\cdots3$ (n자리 수)

이기 위해서는 $x+y=9$, $x-y=3$이어야 한다. 이것을 만족하는 자연수 x, y의 값을 구하면 $x=6$, $y=3$이다. 따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$7^2-4^2=33$

$67^2-34^2=3,333$

$667^2-334^2=333,333$

$6,667^2-3,334^2=33,333,333$

$66,667^2-33,334^2=3,333,333,333$

…

한편, 위에서 얻은 식

$\{10^{n-1}(x+y)+10^{n-2}(x+y)+\cdots+(x+y)+2\}$

$\times\{10^{n-1}(x-y)+10^{n-2}(x-y)\cdots+(x-y)\}$

을 이용하면 이와 유사한 규칙성을 가진 식을 더 만들 수 있다. 즉, 이 식을 계산한 결과가, 4 이상 8 이하의 임의의 자연수 a에 대해, 모든 자리의 수가 수 a인 $2n$자리 수

$$10^{2n-1}a+10^{2n-2}a+\cdots+10a+1$$

가 되기 위해서는

$10^{n-1}(x+y)+10^{n-2}(x+y)+\cdots+(x+y)+2\}$

$=10\cdots01$ ($n+1$자리 수)

$10^{n-1}(x-y)+10^{n-2}(x-y)\cdots+(x-y)$

$=10^{2n-1}a+10^{2n-2}a+\cdots+10a+1$ (n자리 수)

에서 $x+y=9$, $x-y=a$이어야 한다.

$a=4$이면 $x+y=9$, $x-y=4$에서, $x=\frac{13}{2}$, $y=\frac{5}{2}$이다. 이것은 x, y가 자연수라는 조건에 맞지 않는다.

$a=5$이면 $x+y=9$, $x-y=5$이다. 이것을 만족하는 자연수 x, y의 값은 $x=7$, $y=2$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$8^2-3^2=55$

$78^2-23^2=5,555$

$778^2-223^2=555,555$

$7,778^2-2,223^2=55,555,555$

$77,778^2-22,223^2=5,555,555,555$

…

$a=6$이면 $x+y=9$, $x-y=6$이다. 이것을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

$a=7$이면 $x+y=9$, $x-y=7$이다. 이것을 만족하는 자연수 x, y의 값은 $x=8$, $y=1$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$9^2-2^2=77$

$89^2-12^2=7,777$

$889^2-112^2=777,777$

$8,889^2-1,112^2=77,777,777$

$88,889^2-11,112^2=7,777,777,777$

…

$a=8$이면 $x+y=9$, $x-y=8$이다. 이것을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

IV. 연속한 두 수를 이용하여 수식 만들기

계산기를 이용하여 6×7, 66×67, 666×667, 그리고 6,666×6,667을 차례로 계산해 보면 다음과 같은 네 개의 식을 얻을 수 있다. 이 네 개의 식은 이 논문에서 설계하고자 하는 교수단원의 네 번째 기본 소재이다.

$6\times7=42$

$66\times67=4,422$

$666\times667=444,222$

$6,666\times6,667=44,442,222$

대개의 계산기로는 여기까지 계산할 수 있다. 그러나 필산으로 다소 지루한 계산을 계속한다면 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

$66,666\times66,667=4,444,422,222$

$666,666\times666,667=444,444,222,222$

이 6개의 식에는 일정한 규칙성이 있음을 알 수 있다. 즉, 피승수와 승수 모두에서 6이 한 개씩 늘어나고 있고, 곱에서는 4와 2가 각각 한 개씩 늘어나고 있다. 이 규칙성에 따르면 다음도 계속해서 성립할 것으로 예측된다.

$6,666,666\times6,666,667=44,444,442,222,222$

$66,666,666\times66,666,667=4,444,444,422,222,222$

이러한 예측은 참인가? 즉, 일반적으로 모든 자리의 수가 6인 n자리 수 66…6과 일의 자리의 수가 7이고 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 6

인 n자리 수 66…67의 곱을 구하면

$$66\cdots6\times66\cdots67=44\cdots422\cdots2$$

(4와 2가 각각 n개씩인 $2n$자리 수)

이 되는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 여덟 번째 과제이다.

모든 자리의 수가 6인 n자리 수 66…66은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+6$$

같은 방법으로 일의 자리의 수가 7이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 6인 n자리 수 66…67은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+7$$

이 두 수의 곱은 다음과 같다.

$$\{6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+6\}$$
$$\times\{6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+7\}$$
$$=\{6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+6\}$$
$$\times\{(6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+6)+1\}$$
$$=\{6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+6\}^2$$
$$+\{6\times10^{n-1}+6\times10^{n-2}+\cdots+6\times10+6\}$$
$$=\{6\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)\}^2$$
$$+\{6\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)\}$$
$$=36\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)^2$$
$$+6\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$

여기서 식 $10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1$은 첫째 항이 1, 공비가 10, 항의 수가 n인 등비급수이므로 그 합을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{10^n-1}{9}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$36\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)2$$
$$+6\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$=36\times\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)^2+6\times\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)$$
$$=36\times\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2+6\times\left(\frac{10^n-1}{9}\right)$$
$$=\frac{36}{81}\times(10^{2n}-2\cdot10^n+1)+\frac{6}{9}\times(10^n-1)$$
$$=\left(\frac{4}{9}\times10^{2n}\right)-\left(\frac{2}{9}\times10^n\right)-\frac{2}{9}$$
$$=\left(\frac{4}{9}\times10^{2n}\right)-\left(\frac{4}{9}\times10^n\right)+\left(\frac{2}{9}\times10^n\right)-\frac{2}{9}$$
$$=\frac{4}{9}\times10^n\times(10^n-1)-\frac{2}{9}\times(10^n-1)$$
$$=4\times10^n\times\left(\frac{10^n-1}{9}\right)-2\times\left(\frac{10^n-1}{9}\right)$$
$$=4\cdot10^n\cdot\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)-2\cdot\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)$$
$$=4\cdot10^n\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$+2\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$=4\cdot(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^{n+1}+10^n)$$
$$+2\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$

여기서

$$4\cdot(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^{n+1}+10^n)$$
$$=4\times10^{2n-1}+4\times10^{2n-2}+\cdots+4\times10^{n+1}+4\times10^n$$

이다. 이것은 4, 0이 각각 n개씩인 $2n$자리 수 44…400…0을 의미한다. 또

$$2\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$=2\times10^{n-1}+2\times10^{n-2}+\cdots+2\times10+2$$

이다. 이것은 모든 자리의 수가 2인 n자리 수 22…2를 의미한다. 결국 66…6×66…67의 계산 결과는 4, 2가 각각 n개씩인 $2n$자리 수 44…422…2가 된다. 따라서 앞의 예측이 참임을 알 수 있다.

이와 유사한 규칙성을 가진 수식을 더 찾을 수 있는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 아홉 번째 과제이다. 1 이상 8 이하인 임의의 자연수 a에 대해 모든 자리의 수가 모두 a인 n자리 수

$$10^{n-1}a+10^{n-2}a+\cdots+10a+a$$

$=a \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$

와 일의 자리의 수가 $a+1$이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 a인 n자리 수

$$10^{n-1}a+10^{n-2}a+\cdots+10a+(a+1)$$
$$=(10^{n-1}a+10^{n-2}a+\cdots+10a+a)+1$$
$$=a \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)+1$$

의 곱을 다음과 같이 구할 수 있다.(a=9이면 $a+1$=10이 되어 조건에 맞지 않는다.)

$$(10^{n-1}a+10^{n-2}a+\cdots+10a+a)$$
$$\times\{10^{n-1}a+10^{n-2}a+\cdots+10a+(a+1)\}$$
$$=\{a \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)\}$$
$$\times\{a \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)+1\}$$
$$=a^2 \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)^2$$
$$+a \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$=a^2 \cdot \left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)^2+a \cdot \left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)$$
$$=a^2 \cdot \left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2+a \cdot \left(\frac{10^n-1}{9}\right)$$
$$=\frac{a^2}{81} \cdot (10^{2n}-2 \cdot 10^n+1)+\frac{a}{9} \cdot (10^n-1)$$
$$=\frac{a^2}{81} \cdot 10^{2n}-\frac{2a^2}{81} \cdot 10^n+\frac{a^2}{81}$$
$$+\frac{a}{9} \cdot 10^n-\frac{a}{9}$$
$$=\frac{a^2}{81} \cdot 10^{2n}-\frac{a}{81} \cdot (2a-9) \cdot 10^n+\frac{a}{81} \cdot (a-9)$$

이 식의 값이 자연수가 되어야 한다. 즉, a^2의 값이 9의 배수이어야 하므로 a=3 또는 a=6이어야 한다. 그런데 a=6인 경우는 위의 여덟 번째 과제에서 이미 다루었다. 따라서 a=3이라고 하자. 그러면 위의 식에서 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{9}{81} \cdot 10^{2n}-\frac{3}{81} \cdot (6-9) \cdot 10^n+\frac{3}{81} \cdot (3-9)$$
$$=\frac{1}{9} \cdot 10^{2n}+\frac{1}{9} \cdot 10^n-\frac{2}{9}$$
$$=\frac{1}{9} \cdot 10^{2n}-\frac{1}{9} \cdot 10^n+\frac{2}{9} \cdot 10^n-\frac{2}{9}$$
$$=\frac{1}{9} \cdot 10^n \cdot (10^n-1)+\frac{2}{9} \cdot (10^n-1)$$
$$=10^n \cdot \left(\frac{10^n-1}{9}\right)-2 \cdot \left(\frac{10^n-1}{9}\right)$$
$$=10^n \cdot \left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)-2 \cdot \left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)$$
$$=10^n \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$+2 \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$=(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^{n+1}+10^n)$$
$$+2 \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$

여기서 식 $10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^{n+1}+10^n$은 1, 0이 각각 n개씩인 $2n$자리 수 11…100…0을 의미한다. 또

$$2 \cdot (10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$=2\times 10^{n-1}+2\times 10^{n-2}+\cdots+2\times10+2$$

이다. 이것은 모든 자리의 수가 2인 n자리 수 22…2를 의미한다. 결국 33…3×33…34의 계산 결과는 1, 2가 각각 n개씩인 $2n$자리 수 11…22 2…2가 된다. 따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

3×4=12
33×34=1,122
333×334=111,222
3,333×3,334=11,112,222
33,333×33,334=1,111,122,222
…

V. 대칭적인 수식 만들기

다음 네 개의 식을 보자. 이 네 개의 식은 이 논문에서 설계하고자 하는 교수단원의 다섯 번째 기본 소재이다. 이 네 개의 식에서 볼 수

있는 규칙성이 계속해서 성립하는가?

$1 \times 64 = 16 \times 4$

$1 \times 664 = 166 \times 4$

$1 \times 6{,}664 = 1{,}666 \times 4$

$1 \times 66{,}664 = 16{,}666 \times 4$

즉, 일반적으로 일의 자리의 수가 4이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 4인 n자리 수 66…64와 10^{n-1}의 자리의 수가 1이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 6인 n자리 수 166…6에 대해

$$1 \times 66\cdots64 = 166\cdots6 \times 4$$

가 성립하는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 열 번째 과제이다.

일의 자리의 수가 4이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 4인 n자리 수 66…64는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$6 \times 10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + \cdots + 6 \times 10 + 4$$

여기에 1을 곱해도 그 결과는 변하지 않는다. 즉, 다음과 같다.

$1 \times (6 \times 10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + \cdots + 6 \times 10 + 4)$

$= 6 \times 10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + \cdots + 6 \times 10 + 4$

$= (4 \times 10^{n-1} + 2 \times 10^{n-1}) + (4 \times 10^{n-2} + 2 \times 10^{n-2})$

$+ \cdots + (4 \times 10 + 2 \times 10) + 4$

$= 4 \times 10^{n-1} + (2 \times 10^{n-1} + 4 \times 10^{n-2})$

$+ (2 \times 10^{n-2} + 4 \times 10^{n-3}) + \cdots + (2 \times 10 + 4)$

$= 4 \times 10^{n-1} + (20 \times 10^{n-2} + 4 \times 10^{n-2})$

$+ (20 \times 10^{n-3} + 4 \times 10^{n-3}) + \cdots + (2 \times 10 + 4)$

$= 4 \times 10^{n-1} + 24 \times 10^{n-2} + 24 \times 10^{n-3} + \cdots + 24$

$= (10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + 6 \times 10^{n-3} + \cdots + 6 \times 10 + 6) \times 4$

여기서 $10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + 6 \times 10^{n-3} + \cdots + 6 \times 10 + 6$은 10^{n-1}의 자리의 수가 1이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 6인 n자리 수 166…6을 의미한다. 따라서 이 규칙성이 계속해서 성립함을 알 수 있다.

이와 유사한 규칙성을 갖는 수식을 더 찾을 수는 없을까? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 열 한 번째 과제이다. 이를 위해 2 이상 9 이하인 임의의 자연수 x, y에 대해

$10^{n-1}x + 10^{n-2}x + \cdots + 10x + y$

$= (10^{n-1} + 10^{n-2}x + \cdots + 10x + x)y$

가 성립한다고 하자.(x=1이면 당연히 성립한다.) 이 식을 정리하면 다음과 같다.

$10^{n-1}x + 10^{n-2}x + \cdots + 10x + y$

$= 10^{n-1}y + 10^{n-2}xy + \cdots + 10xy + xy$

이 식은 다음과 같다.

$10^{n-1}x + 10^{n-2}x + \cdots + 10x$

$-(10^{n-2}x + \cdots + 10x + x)y = 10^{n-1}y - y$

위에서

$10^{n-1}x + 10^{n-2}x + \cdots + 10x$

$-(10^{n-2}x + \cdots + 10x + x)y$

$= 10 \times (10^{n-2}x + \cdots + 10x + x)$

$-(10^{n-2}x + \cdots + 10x + x)y$

$= (10^{n-2}x + \cdots + 10x + x)(10 - y)$

$= x(10^{n-2} + \cdots + 10 + 1)(10 - y)$

이고,

$10^{n-1}y - y$

$= (9 \times 10^{n-2} + \cdots + 9 \times 10 + 9)y$

$= 9 \times (10^{n-2} + \cdots + 10 + 1)y$

이므로, 결국

$x(10^{n-2} + \cdots + 10 + 1)(10 - y)$

$= 9 \times (10^{n-2} + \cdots + 10 + 1)y$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 y를 구하면 다음과 같다.

$$y = \frac{10x}{9 + x}$$

이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값을 찾으면 된다. x=2, 3, 4, 5, 7, 8이면 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. x=6이

면 $y=\frac{60}{15}=4$이다. 이것은 열 번째 과제에서 이미 취급했다.

$x=9$이면 $y=\frac{90}{18}=5$이다. 따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$1\times95=19\times5$

$1\times995=199\times5$

$1\times9,995=1,999\times5$

$1\times99,995=19,999\times5$

…

한편, 다음과 같이 위에서 본 것과 유사한 수식을 더 만들어 볼 수 있다. 이를테면 다음 네 개의 식을 보자. 이 네 개의 식은 이 논문에서 설계하고자 하는 교수단원의 여섯 번째 기본 소재이다.

$2\times65=26\times5$

$2\times665=266\times5$

$2\times6,665=2,666\times5$

$2\times66,665=26,666\times5$

이 네 개의 식에서 볼 수 있는 규칙성이 일반적으로 성립하는가? 즉, 일의 자리의 수가 5이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 6인 n자리 수 66…65와 10^{n-1}의 자리의 수가 2이고, 나머지 n-1개 자리의 수가 모두 n자리 수 26 6…6에 대해

$$2\times66\cdots65=266\cdots6\times5$$

가 성립하는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 열 두 번째 과제이다.

위의 식은 1 이상 9 이하인 임의의 자연수 x, y에 대해

$2\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+y)$

$=(2\times10^{n-1}+10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

가 성립한다고 할 때, 다음과 같이 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값을 구하여 만든 것이다. (단 x와 y는 각각 2가 아니다. $x=2$, $y=2$인 경우는 당연히 성립한다.)

이제 이 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$2\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x)+2y$

$=2\times10^{n-1}y+10^{n-2}xy+\cdots+10xy+xy$

이 식은 다음과 같다.

$2\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x)$

$-(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

$=2\times(10^{n-1}-1)y$

위에서

$2\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x)$

$-(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

$=20\times(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)$

$-(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

$=(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)(20-y)$

$=x(10^{n-2}+\cdots+10+1)(20-y)$

이고,

$2\times(10^{n-1}-1)$

$=2\times(9\cdot10^{n-2}+\cdots+9\cdot10+9)y$

$=18\times(10^{n-2}+\cdots+10+1)y$

이므로, 결국

$x(10^{n-2}+\cdots+10+1)(20-y)$

$=18\times(10^{n-2}+\cdots+10+1)y$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 y를 구하면 다음과 같다.

$$y=\frac{20x}{18+x}$$

이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값을 찾으면 된다. $x=1$, 3, 4, 5이면 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. $x=6$이면 $y=\frac{120}{24}=5$이다. 이것은 위에서 여섯 번째 기본 소재로 제시한 것이다. $x=7$, 8, 9이면 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. 따라서 위에서 예시한 것이 유일하다.

이제 위의 경우를 더 확장해서 생각해 볼 수 있는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 열세 번째 과제이다. 즉, 3 이상 9 이하인 임의의 자연수 a와, 1 이상 9 이하인 임의의 자연수 x, y에 대해 등식

$a\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+y)$

$=(a\times 10^{n-1}+10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

가 성립한다고 하자. 이것은 바로 위에서 보았던 식

$2\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x+y)$

$=(2\times+10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

에서 2를 a로 바꾼 것이다. 이때 $a=x=y$이면 당연히 성립하므로 x, y는 a와 같지 않다고 가정한다. 위의 식을 간단히 정리하면 다음과 같다.

$a\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x)+ay$

$=a\times 10^{n-1}y+10^{n-2}xy+\cdots+10xy+xy$

이 식은 다음과 같다.

$a\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x)$

$-(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

$=a\times(10^{n-1}-1)y$

위에서

$a\times(10^{n-1}x+10^{n-2}x+\cdots+10x)$

$-(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

$=10a\times(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)$

$-(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)y$

$=(10^{n-2}x+\cdots+10x+x)(10a-y)$

$=x(10^{n-2}+\cdots+10+1)(10a-y)$

이고,

$a\times(10^{n-1}-1)y$

$=a\times(9\cdot 10^{n-2}+\cdots+9\cdot 10+9)y$

$=9a\times(10^{n-2}+\cdots+10+1)y$

이므로, 결국

$x(10^{n-2}+\cdots+10+1)(10a-y)$

$=9a\times(10^{n-2}+\cdots+10+1)y$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 y를 구하면 다음과 같다.

$$y=\frac{10ax}{9a+x}$$

이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값을 찾으면 된다.

$a=3$이면 $y=\frac{30x}{27+x}$이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값은 존재하지 않는다.

$a=4$이면 $y=\frac{40x}{36+x}$이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값은 $x=9$, $y=8$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$4\times98=49\times8$

$4\times998=499\times8$

$4\times9,998=4,999\times8$

$4\times99,998=49,999\times8$

$\cdots$

$a=5$이면 $y=\frac{50x}{45+x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. $a=6$이면 $y=\frac{60x}{54+x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. $a=7$이면 $y=\frac{70x}{63+x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. $a=8$이면 $y=\frac{80x}{72+x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. $a=9$이면 $y=\frac{90x}{81+x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

VI. 수가 교대로 반복되는 수식 만들기

이제 조금 더 복잡한 형태의 식을 만들 수 있다. 이를테면 다음 네 개의 식을 보자. 이 네 개의 식은 이 논문에서 설계하고자 하는 교수 단원의 일곱 번째 기본 소재이다. 이 네 개의 식에서 볼 수 있는 규칙성이 계속해서 성립하는가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 열네 번째 과제이다.

$6\times545=654\times5$

$6\times54,545=65,454\times5$

$6\times5,454,545=6,545,454\times5$

$6\times545,454,545=654,545,454\times5$

실제로 이 규칙성은 계속해서 성립한다. 즉 5, 4가 교대로 반복되어 일의 자리의 수가 5가 되는 $2n+1$자리 수 $5454\cdots45$와 10^{2n}의 자리의 수가 6이고 10^{2n-1}의 자리부터 5, 4가 교대로 반복되는 $2n+1$자리 수 $65454\cdots54$에 대해

$$6\times5454\cdots45=65454\cdots54\times5$$

가 성립한다.

사실 이러한 식을 시행착오로, 또는 우연히 발견했다고 보기는 어렵다. 그보다는 다음과 같이 적절한 절차를 거쳐 만들어 냈다고 보아야 할 것이다. 일반적으로 1 이상 9 이하인 임의의 자연수 a, x, $y(a\neq x,\ a\neq y$이다. $x=y$인 경우는 앞에서 이미 취급했다. 따라서 여기서는 $x\neq y$인 것으로 가정한다.)에 대해 내림차순으로 x, y가 교대로 반복되어 일의 자리의 수가 x로 끝나는 $2n+1$자리 수

$$10^{2n}x+10^{2n-1}y+10^{2n-2}x+\cdots+10^{2}x+10y+x$$

와 10^{2n}의 자리의 수가 a이고 10^{2n-1}의 자리부터 내림차순으로 x, y가 교대로 반복되는 $2n+1$자리 수

$$10^{2n}a+10^{2n-1}x+10^{2n-2}y+\cdots+10^{2}y+10x+y$$

가 있어, 다음의 등식이 성립한다고 하자.

$a(10^{2n}x+10^{2n-1}y+10^{2n-2}x+\cdots$

$+10^{2}x+10y+x)$

$=(10^{2n}a+10^{2n-1}x+10^{2n-2}y+\cdots$

$+10^{2}y+10x+y)x$

이 식에서

$a(10^{2n}x+10^{2n-1}y+10^{2n-2}x+\cdots+10^{2}x+10y+x)$

$=(10^{2n}ax+10^{2n-2}ax+\cdots+10^{2}ax+ax)$

$+(10^{2n-1}ay+10^{2n-3}ay+\cdots+10ay)$

$=(10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^{2}+1)ax$

$+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)ay$

이다. 또

$(10^{2n}a+10^{2n-1}x+10^{2n-2}y+\cdots+10^{2}y+10x+y)x$

$=10^{2n}ax+10^{2n-1}x^2+10^{2n-2}xy+\cdots$

$+10^{2}xy+10x^2+xy$

$=10^{2n}ax+(10^{2n-1}x^2+10^{2n-3}x^2+\cdots+10x^2)$

$+(10^{2n-2}xy+\cdots+10^{2}xy+xy)$

$=10^{2n}ax+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)x^2$

$+(10^{2n-2}+\cdots+10^{2}+1)xy$

이므로, 결국 다음이 성립한다.

$(10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^{2}+1)ax$

$+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)ay$

$=10^{2n}ax+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)x^2$

$+(10^{2n-2}+\cdots+10^{2}+1)xy$

이것을 더 정리하면 다음과 같다.

$(10^{2n-2}+\cdots+10^{2}+1)ax$

$+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)ay$

$=(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)x^2$

$+(10^{2n-2}+\cdots+10^{2}+1)xy$

이 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)ay$

$-(10^{2n-2}+\cdots+10^{2}+1)xy$

$=(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)x^2$

$-(10^{2n-2}+\cdots+10^2+1)ax$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$10\times(10^{2n-2}+\cdots+10^2+1)ay$

$-(10^{2n-2}+\cdots+10^2+1)xy$

$=10\times(10^{2n-2}+\cdots+10^2+1)x^2$

$-(10^{2n-2}+\cdots+10^2+1)ax$

이 식의 양변을 $10^{2n-2}+\cdots+10^2+1$로 나누면 다음 식이 얻어진다.

$$10ay-xy=10x^2-ax$$

$$y(10a-x)=x(10x-a)$$

결국 다음 식을 얻을 수 있다.

$$y=\frac{x(10x-a)}{10a-x}$$

$a=1$이면 $y=\frac{x(10x-1)}{10-x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. $a=2$이면 $y=\frac{x(10x-2)}{20-x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. 같은 방법으로 $a=3, 4, 5$일 때 각각 $y=\frac{x(10x-3)}{30-x}$, $y=\frac{x(10x-4)}{40-x}$, $y=\frac{x(10x-5)}{50-x}$이고, 이것을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

$a=6$이면 $y=\frac{x(10x-6)}{60-x}$이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값은 $x=5$, $y=4$이다. 이것은 이미 앞에서 일곱 번째 기본 소재로 제시한 것이다.

$a=7$이면 $y=\frac{x(10x-7)}{70-x}$이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값은 $x=4$, $y=2$이다. 따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$7\times424=742\times4$

$7\times42{,}424=74{,}242\times4$

$7\times4{,}242{,}424=7{,}424{,}242\times4$

$7\times424{,}242{,}424=742{,}424{,}242\times4$

…

$a=8$이면 $y=\frac{x(10x-8)}{80-x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. $a=9$이면 $y=\frac{x(10x-9)}{90-x}$이고, 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

만약 내림차순으로 x, y가 교대로 반복되어 일의 자리의 수가 b로 끝나는 $2n+1$자리의 수

$10^{2n}x+10^{2n-1}y+10^{2n-2}x+\cdots+10^2x+10y+b$

와 10^{2n}의 자리의 수가 a이고 10^{2n-1}의 자리부터 내림차순으로 x, y가 교대로 반복되는 $2n+1$자리 수

$10^{2n}a+10^{2n-1}x+10^{2n-2}y+\cdots+10^2y+10x+y$

가 있어, 다음의 등식이 성립한다고 하자.

$a(10^{2n}x+10^{2n-1}y+10^{2n-2}x+\cdots+10^2x+10y+b)$

$=(10^{2n}a+10^{2n-1}x+10^{2n-2}y+\cdots$

$+10^2y+10x+y)b$

이 등식은 앞에서 본 두 경우를 일반화하기 위한 것이다. 이와 같은 일반화가 가능한가? 이것이 학생들에게 제시할 수 있는 열 다섯 번째 과제이다. 여기서 a, b, x, y는 1 이상 9 이하인 자연수이다. 또 $x\neq y$인 것으로 가정한다. 이 식에서

$a(10^{2n}x+10^{2n-1}y+10^{2n-2}x+\cdots+10^2x+10y+b)$

$=(10^{2n}ax+10^{2n-2}ax+\cdots+10^2ax)$

$+(10^{2n-1}ay+10^{2n-3}ay+\cdots+10ay)+ab$

$=(10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^2)ax$

$+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)ay+ab$

이다. 또

$(10^{2n}a+10^{2n-1}x+10^{2n-2}y+\cdots+10^2y+10x+y)b$

$=10^{2n}ab+10^{2n-1}bx+10^{2n-2}by+10^{2n-4}by+\cdots$

$+10^2by+10bx+by$

$=10^{2n}ab+(10^{2n-1}bx+10^{2n-3}bx+\cdots+10bx)$

$$+(10^{2n-2}by+10^{2n-4}by+\cdots+10^{2}by+by)$$
$$=10^{2n}ab+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)bx$$
$$+(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)by$$

따라서 결국 다음이 성립한다.

$$(10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^{2})ax$$
$$+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)ay+ab$$
$$=10^{2n}ab+(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)bx$$
$$+(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)by$$

이 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)ay$$
$$-(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)by$$
$$=(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)bx$$
$$-(10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^{2})ax+10^{2n}ab-ab$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$10\times(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)ay$$
$$-(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)by$$
$$=(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)bx$$
$$-(10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^{2})ax+10^{2n}ab-ab$$

여기서

$$10\times(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)ay$$
$$-(10^{2n-2}+\cdots+10^{2}+1)by$$
$$=(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)(10a-b)y$$

이다. 또,

$$10^{2n}ab-ab$$
$$=(9\times10^{2n-1}+9\times10^{2n-2}+\cdots$$
$$+9\times10^{2}+9\times10+9)ab$$

이다. 이 식을 변형하면 다음과 같다.

$$9\times10^{2n-1}+9\times10^{2n-2}+9\times10^{2n-3}+9\times10^{2n-4}+$$
$$\cdots+9\times10^{2}+9\times10+9$$

이것은 다시 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$(90\times10^{2n-2}+9\times10^{2n-2})+(90\times10^{2n-4}+9\times10^{2n-4})+\cdots+(90\times10^{2}+9\times10^{2})+(90+9)$$
$$=99\times10^{2n-2}+99\times10^{2n-4}+\cdots+99\times10^{2}+99$$
$$=99\times(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)$$

따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$(9\times10^{2n-1}+9\times10^{2n-2}+10^{2n-3}+9\times10^{2n-4}+$$
$$\cdots+9\times10^{2}+9\times10+9)$$
$$=99\times(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)$$

또, 다음이 성립한다.

$$(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)bx$$
$$-(10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^{2})ax$$
$$=(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)bx$$
$$-10\times(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)ax$$
$$=x(10^{2n-1}+10^{2n-3}+\cdots+10)(b-10a)$$
$$=10x(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)(b-10a)$$

따라서 결국 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)(10a-b)y$$
$$=10x(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)(b-10a)$$
$$+99\times(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1)ab$$

이 식의 양변을 $10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^{2}+1$로 나누면 다음 식이 얻어진다.

$$(10a-b)y=10x(b-10a)+99ab$$

이 식에서 y를 구하면 다음과 같다.

$$y=\frac{99ab}{10a-b}-10x$$

이 식에서 $10a-b$는 11의 배수이어야 한다. 또 자연수 x, y는 서로 다르며 각각 1 이상 9 이하의 자연수이어야 한다.

$a=1$일 때 $10a-b$가 11의 배수가 되게 하는 b의 값이 존재하지 않는다. $a=2$일 때 $10a-b$가 11의 배수가 되려면 $b=9$이어야 한다. 이때 $y=\frac{1782}{11}-10x=162-10x$이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다. $a=3$일 때 $10a-b$가 11의 배수가 되려면 $b=8$이어야 한다. 이때 $y=\frac{2376}{22}-10x=108-10x$이다. 이 식을 만족

하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

a=4일 때 $10a$-b가 11의 배수가 되려면 b=7이어야 한다. 이때

$$y=\frac{2772}{33}-10x=84-10x$$

이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값은 x=8, y=4이다. 따라서 다음이 성립한다.

4×847=484×7

4×84,847=48,484×7

4×8,484,847=4,848,484×7

4×848,484,847=484,848,484×7

…

a=5일 때 $10a$-b가 11의 배수가 되려면 b=6이어야 한다. 이때 $y=\frac{2970}{44}-10x$이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

a=6일 때 $10a$-b가 11의 배수가 되려면 b=5이어야 한다. 이때

$$y=\frac{2970}{55}-10x=54-10x$$

이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값은 x=5, y=4이다. 이것은 앞에서 이미 취급하였다.

a=7일 때 $10a$-b가 11의 배수가 되려면 b=4이어야 한다. 이때

$$y=\frac{2772}{66}-10x=42-10x$$

이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값은 x=4, y=2이다. 이것도 앞에서 이미 취급하였다.

a=8일 때 $10a$-b가 11의 배수가 되려면 b=3이어야 한다. 이때 $y=\frac{2376}{77}-10x$이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

a=9일 때 $10a$-b가 11의 배수가 되려면 b=2이어야 한다. 이때 $y=\frac{1782}{88}-10x$이다. 이 식을 만족하는 자연수 x, y의 값이 존재하지 않는다.

VII. 결론

이 논문에서는 규칙성이 있는 수식을 소재로 한 교수단원을 설계하고 있다. 특히 7 종류의 서로 다른 수식을 기본 소재로 하고, 그것을 바탕으로 한 15개의 과제를 제시하고 있다. 이 15개의 과제는 기본 소재로부터 발전적으로 만들어 낸 것으로 중학교 3학년 이상의 학생을 대상으로 한다. 그러나 중학교 3학년 학생이 이 15개의 과제를 모두 해결할 수 있는 것은 아니다. 이 논문에서는 15개의 과제에 대한 풀이 과정을 모두 제시하고 있다. 때때로 학생들은 이 논문에서와는 다른 방법으로 해결할 수도 있을 것이다. 학생들이 적절한 풀이를 찾지 못할 때, 이 논문에서 제시하는 방법에 이르도록 안내할 수 있을 것이다.

이 15개의 과제는 학생들이 규칙성을 찾고, 그 규칙성이 일반적으로 성립하는지 나름대로 증명하게 함으로써, 규칙성의 인지와 그 메커니즘의 이해라는 목적 달성에 기여할 수 있다. 또한 이 과정에서 학생들은 대수적 식의 의미와 그 조작 및 급수 개념을 심화하고, 아울러 유추적 사고, 연역적 사고 등과 같은 수학적 사고를 형성할 수 있다. 이런 점에서 이 교수단원은 나름대로 수학교육의 중요 목적, 내용 및 원리를 나타낸다고 볼 수 있다. 다음으로 15개의 과제는 그 자체로 학생들의 수학적 활동을 위한 풍부한 자원이 된다. 교사는 이 15개의 과제를 융통성 있게 활용하여 소기의 목적을 달성할 수 있다. 특히 각 과제의 수준이 다르므로, 학생들의 개인적인 능력을 충분히 고려할 수 있다. 이 과정에서 교사는 수학 교수·학습의 수학적, 심리학적 및 교육학적 측면을 총체적인 방법으로 파악할 수 있으므로,

경험적 연구를 위한 잠재력을 제공할 수 있다. 이런 점에서 볼 때 이 논문에서 제시한 교수단원은 나름대로 실속 있는 교수단원이라 할 수 있다.

이 논문에서는 이 교수단원을 직접 학생들을 대상으로 적용하지는 않았다. 대신 그것을 후속 연구로 제안하고자 한다. 비트만(1995)은 실속 있는 교수단원의 설계와 함께, 그것을 초점으로 한 임상적 교수 실험(臨床的 敎授實驗, clinical teaching experiments)의 중요성을 강조하고 있다. 임상적 교수실험은 개발된 교수단원을 직접 학생들을 대상으로 적용하면서, 교수·학습 과정, 학습의 개인적 사회적 결과, 학생들의 생산적 사고, 학생들의 어려움 등을 밝혀 나가는 연구 방법이다. 임상적 교수실험에서는 교수단원이 실험을 위한 도구일 뿐만 아니라 연구의 대상이기도 하다. 임상적 교수 실험을 통해 교수단원을 평가할 수 있고, 또 교수·학습이 더 효율적이 되도록 그 교수단원을 개정할 수 있다. 임상적 면담과 마찬가지로 임상적 교수실험도 반복될 수 있고, 따라서 변경될 수 있다. 임상적 교수 실험에서 얻어진 결과를 통해 교수·학습의 기본 규칙성을 확인할 수 있고, 어떤 교수단원을 가르치는 것에 관해 사실에 입각한 특정한 지식을 끌어낼 수 있다. 이러한 임상적 교수실험에서는 그 성격상 질적인 연구 방법이 효율적이다. 그러나 교수·학습의 복잡성 때문에, 임상적 교수·실험에서 얻어진 소재나 이론이라 하더라도, 그것이 어떤 단원을 지도하기 위한 완전한 정보를 주는 것은 아니다.

이 논문에서 개발한 교수단원을 직접 학생들을 대상으로 적용하는 교실에서의 임상적 교수 실험을 통해, 이 교수단원을 지도하기 위한 정보 및 반복되는 어떤 특별한 현상을 어느 정도라도 확인할 수 있기를, 아울러 이 교수단원이 더 나은 교수단원으로 점차적으로 개정될 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

Bolt, B. (1987). The amazing mathematical amusement arcade. Cambridge: Cambridge University Press.

Dudeney, H. E. (1970). Amusements in mathematics. New York: Dover Publications, Inc.

Eiss, H. E. (1988). Dictionary of mathematical games, puzzles, and amusement. New York: Greenwood Press.

Kordemsky, B. A. (1972). The Moscow puzzles: 359 mathematical recreations. M. Gardner (ed.) New York: Dover Publications, Inc.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. Educational Studies in Mathematics 15(1): 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. Educational Studies in Mathematics 29(4): 355-374.

田村三郎(1992). 數學 パズルランド。東京: 講談社.

A Design of Teaching Unit on Series of Number Sentences with Patterns.

Park, Kyo sik (Inchon National University of Education)

In this paper, a teaching unit on series of number sentences with patterns is designed according to Wittmann's perspectives. In this paper, series of number sentences with patterns means number sentences in which some patterns are contained. especially, seven kinds of number sentences with patterns are offered as basic materials, and fifteen tasks based on these basic materials are offered. These tasks are for ninth grade students and higher grade students.

These tasks help students to recognize patterns, and to understand mechanism underlying in those patterns by looking for patterns and proving whether these patterns are generally hold. As working on these tasks, students can reinforce meaning of algebraic expression, its manipulation, and concept of number series. Students also can reinforce mathematical thinking such as analogical thinking, deductive thinking, etc. In this point, this teaching unit reveal important objectives, contents, and principles of mathematics education. This teaching unit can also be rich sources for student's activities. Especially, for each task's level is different, each student's personal ability is considered fully. Since teachers can know mathematical facet, psychological facet, and didactical facet holistically, this teaching unit can offer broad possibilities for experimental studies. So, this teaching unit can be said to be substantial.

In this paper, this teaching unit is not applied in classroom directly. Actually such applying in classroom is suggested as follow-up studies. By appling this teaching unit in various classroom, some effective informations for teaching this teaching unit and some particular phenomenons in those teaching processes can be identified, and this teaching unit can be revised to be better one.