

## Fin이 부착된 원관내를 통과하는 층류 유동해석

정 호 열\*, 정 재 택\*

전남대학교 기계공학과, \*전남대학교 자동차공학부

### Analysis of Laminar Flow Through Internally Finned Tube

Ho-Eyoul Jeong<sup>†</sup>, Jae-Tack Jeong<sup>\*</sup>

Department of Mechanical Engineering, Chonnam National University, Gwang-Ju 500-757, Korea

<sup>\*</sup>School of Automotive Engineering, Chonnam National University, Gwang-Ju 500-757, Korea

(Received September 4, 2001; revision received February 21, 2002)

**ABSTRACT:** There have been many studies for the flow through internally finned tube, since the heat exchangers with fin device derive much attention in heat transfer enhancement. In this study, analysis of laminar flow through the circular tube with longitudinal fins are investigated. The height and the number of fins are arbitrary. The flow field is assumed to be laminar and conformal mapping is used to obtain analytic solution. From the analytic solution, equi-velocity lines are shown, and the flow rate through the finned tube is calculated for various fin heights and numbers of fins. Darcy friction factor for this finned tube and shear stress distributions on the wall and fin are also considered.

**Key words:** Heat exchangers(열교환기), Circular tube(원관), Conformal mapping(등각사상), Effective diameter(유효직경), Darcy friction factor(마찰계수), Fin(핀)

#### 기 호 설 명

- $a$  : 원점에서 핀까지의 무차원 거리
- $D$  : 원관의 직경,  $2R_0$
- $D_{eff}$  : 유효직경
- $D_h$  : 수력직경,  $4A/P$
- $f$  : 판마찰계수
- $N$  : 핀의 개수
- $P$  : 압력
- $Q$  : 유량
- $Re_h$  : Reynolds 수,  $\rho \overline{WD}_h / \mu$
- $R_0$  : 원관의 반경

$W_0$  : 축방향의 대표속도,  $W_0 \equiv -\frac{R_0^2}{\mu} \frac{dP}{dZ}$

#### 그리스 문자

- $\alpha$  : 핀의 사이각,  $2\pi/N$
- $\mu$  : 점성계수
- $\rho$  : 밀도
- $\zeta$  : 사상함수
- $\tau$  : 전단응력

#### 상첨자

- : 단면 평균 속도

<sup>†</sup> Corresponding author

Tel.: +82-62-530-0205; fax: +82-62-530-1689

E-mail address: jhy9295@hanmail.net

#### 1. 서 론

열전달에 관한 연구는 에너지 절약 및 환경보존

문제와 관련하여 열교환기, 보일러, 가열기, 공기 조화기기 전자부품냉각, 폐열회수 등 광범위한 분야에서 응용되고 있으며 열전달 현상이 수반되는 각종 기계장치에서는 고성능화, 고집적화, 에너지 절약을 위하여 열전달 촉진에 대한 기술이 절대적으로 요구되고 있다. 핀-관형 열교환기를 설계하는데 있어서 열전달계수 및 압력강하를 필수적으로 알아야 하나, 핀의 형상 및 핀의 간격, 길이 등 형상변수에 따라서도 달라진다. 일반적으로 열전달을 촉진시키기 위하여 슬릿, 루버, 웨이브 등의 다양한 핀 형상이 이용되고 있으며, 특히 원관에 핀이 부착된 경우의 열전달 촉진에 관한 연구는 이미 오래 전부터 수행되어 왔다.

Masliyah et al.<sup>(1)</sup>은 유한요소법을 사용하여 열전달을 촉진시키는 핀의 형상이 삼각형이며 최적화된 핀의 개수가 있다고 하였으며, Soliman et al.<sup>(2)</sup>은 핀의 두께가 매우 얇다고 이상화하여 속도장에 대해서 급수전개를 통해 이론적으로 접근하였다. Prakash et al.<sup>(3)</sup>은 입구영역에서 핀의 파라미터를 변화시키면서 압력강하와 열전달계수 등을 수치적분으로 계산하였으며 Barozzi et al.,<sup>(4)</sup> Kelkar et al.,<sup>(5)</sup> Kettner et al.<sup>(6)</sup>은 관내에 대류와 전도가 복합적으로 나타난 경우에 유한요소법, 유한체적법, 유한차분법 등의 수치계산방법을 이용하였다. 현재에는 이상유동 및 다양한 형태의 열전달 촉진관에 대한 연구개발이 진행되고 있다. 실제 핀-관형 열교환기와 산업공정용 원통다관형 열교환기, 판-관형 및 판형 열교환기 등에 있어서 내부 핀의 형상이 상당히 복잡하므로 층류인 경우에도 유동장이나 열전달에 대한 수학적 해석이 곤란하여 실험 및 수치해석으로 얻은 상관식을 이용하고 있다. 그런데 수치해석의 경우 핀 끝과 같은 첨점 부근에서는 오차가 커지는 단점이 있다. 반면, 이론해를 구할 수 있다면 어

느 곳에서나 많은 계산 없이 원하는 정밀도의 해를 얻을 수 있으며 국부적인 해의 형태도 알 수 있다는 장점이 있으므로 수치해와 이론해는 상호보완적인 가치를 가지고 있다.

본 연구에서는 핀-관형 열교환기와 관련하여 Fig. 1과 같이 원관 내벽에 핀(fin)이 축 방향으로 여러 개 부착된 원관내를 흐르는 완전발달, 층류유동에 대하여 conformal mapping을 이용한 수학적 방법으로 이론해석을 수행하고자 한다. 본 연구의 결과로부터 내부에 핀이 부착된 원관 내부의 속도분포, 전단응력분포, 압력강하 및 손실수두 등의 특성을 고찰함으로써 열전달 설계기술의 축적과 내측 핀관의 기초설계자료에 응용할 수 있다.

2. 내측 핀관의 해석모델

본 연구에서는 원관의 길이 방향으로 임의의 개수  $N$ 개의 내부 핀(fin)이 부착되며, 핀의 길이는 원관 벽에서부터 원관 중심까지 다양하게 변화한다. 또한 원관내의 유동장을 이론적으로 해석하기 위하여 Fig. 1에서 핀의 두께가 매우 얇다고 가정하였으며, 관내의 유동은 완전발달된 정상상태, 층류, 비압축성 유동으로 간주한다. 유동장의 대칭성에 의하여 빗금친 영역의 핀과 핀 사이의 유동장만을 고려해도 충분하며, 운동량방정식으로부터 속도분포를 계산하기 위하여 유동장을 단위원 내부로 등각사상하고 복소함수 이론을 이용하여 속도장을 구하였다. 결과 비교를 위해 핀의 개수와 핀의 길이를 다양하게 변화시키면서 속도장, 유량, 전단응력 등을 계산하였다.

3. 수학적 전개

원관내의 정상상태, 비압축성, 층류유동에 대하여 원통좌표계  $(R, \theta, Z)$ 를 취하면,  $Z$  방향의 속도  $W(R, \theta)$ 에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dZ} \quad (1)$$

식(1)을 무차원화하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = -1 \quad (2)$$

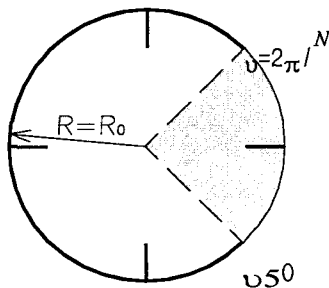


Fig. 1 Modeling finned tube.

여기서, 무차원 변수  $r, w$ 는 다음과 같다.

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad w = \frac{W}{W_0}, \quad \left( W_0 \equiv -\frac{R_0^2}{\mu} \frac{dP}{dZ} \right)$$

유동의  $\theta$ 에 대한 주기성을 고려하면 Fig. 1과 같이  $0 \leq \theta \leq 2\pi/N$ 인 영역만 고려하면 충분하다 ( $N$ 은 fin의 개수). 식(2)의  $w(r, \theta)$ 에 대한 Poisson 방정식을 Laplace 방정식으로 바꾸어 주기 위하여

$$w = (1 - r^2)/4 + w_1(r, \theta) \quad (3)$$

로 놓으면

$$\nabla^2 w_1 = 0 \quad (4)$$

를 만족한다.  $w$ 에 대한 no-slip 경계조건을 적용하면 벽과 핀 표면상에서의  $w_1$ 의 조건은 다음과 같다.

$$w_1(1, \theta) = 0 \quad (5a)$$

$$w_1(r, \pi/N) = (r^2 - 1)/4 \quad (5b)$$

따라서,  $w_1(r, \theta)$ 는 조화 함수이므로 등각사상 (conformal mapping)의 방법을 사용한다.<sup>(7)</sup>

$z$  평면 ( $z = re^{i\theta}$ )에서 고려하는 유동 영역 ( $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi/N$ )을  $\zeta$  평면 ( $\zeta = \rho e^{i\beta}$ )의 단위원 내부로 사상시키는 사상함수(mapping function)는 다음과 같다.

$$\zeta = f(z) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad (6)$$

여기서,  $\lambda = \frac{1}{b+1}(z^N + z^{-N} + b - 1), b = \frac{(a^N + a^{-N})}{2}$

이고,  $a$ 는 원점에서 핀까지의 무차원 거리,  $(\lambda + 1)$ 과  $(\lambda - 1)$ 의 편각은  $-\pi$ 와  $\pi$  사이의 값이다.

Fig. 2에서 보듯이 mapping function에 의해 원호  $B'C'D'$ 는 핀의 표면에 사상되고 원호  $A'B'$ 와  $D'E'$ 는 원관의 표면에 사상된다. 특히  $B \rightarrow B'$ 이나  $D \rightarrow D'$ 에 해당하는  $\alpha_1$ 은  $\alpha_1 = \cos^{-1} \frac{b-3}{b+1}$

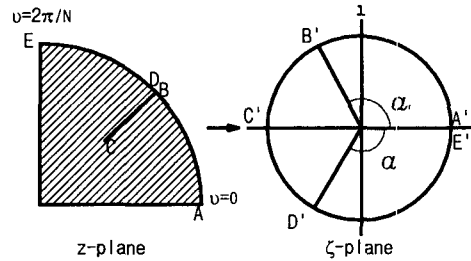


Fig. 2 Conformal mapping.

으로 구해진다. 사상함수(6)에 의하여 고려하는 유동영역  $z$ 에 따른  $\zeta$ 값이 단위원 내에서 구해질 수 있다. 즉, 식(6)에서  $z = x + iy = re^{i\theta}, \zeta = \rho e^{i\beta}$ 로 두면  $\rho = \rho(r, \theta), \beta = \beta(r, \theta)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\rho = \exp[Re(\ln \zeta)], \quad \beta = Im(\ln \zeta) \quad (7)$$

여기서,  $Re, Im$ 은 각각 복소수의 실수부와 허수부를 의미한다.  $W_1(\rho, \beta) = w_1(r(\rho, \beta), \theta(\rho, \beta))$ 로 두면 mapping이 conformal하므로  $z$ 평면의 고려영역 내에서  $\nabla_{(r, \theta)}^2 w_1 = 0$ 은  $\zeta$ 평면의 단위원 영역 내에서  $\nabla_{(\rho, \beta)}^2 W_1 = 0$ 이 된다.  $W_1$ 의 경계조건을 구하기 위하여 식(5)의 관계식을 고려하면 Fig. 2에서 보듯이  $\zeta$ 평면에서의 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_1(1, \beta) = \begin{cases} (r^2 - 1)/4 & \alpha_1 \leq \beta \leq 2\pi - \alpha_1 \\ 0 & 2\pi - \alpha_1 \leq \beta \leq 2\pi \\ 0 & 0 \leq \beta \leq \alpha_1 \end{cases} \quad (8)$$

$\zeta$ 평면의 단위 원주상에서  $W_1$ 값이 모두 주어졌으므로 단위원 내부에서의  $W_1$ 값은 Poisson's Integral 공식<sup>(8)</sup>을 이용하면 다음과 같다.

$$W_1(\rho, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{W_1(1, \alpha)(1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - \beta)} d\alpha \\ = \frac{1}{8\pi} \int_{\alpha_1}^{2\pi - \alpha_1} \frac{(r(\alpha)^2 - 1)(1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - \beta)} d\alpha \quad (9) \\ (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \beta \leq 2\pi)$$

여기서,  $r(\alpha)$ 는 다음과 같다.

$$r(\alpha) = [k - \sqrt{k^2 - 1}]^{-N}$$

$$k = \frac{b+1}{2}(1 - \cos \alpha) - 1$$

식(9)에서  $W_1(\rho, \beta)$ , 즉  $w_1(r, \theta)$ 를 구하였으므로 식(3)으로부터 모든 유동장에 대한 속도장  $w(r, \theta)$ 를 구할 수 있다. 대표적인 예로서  $a=0.5$ 이고 핀의 개수가 1, 2, 3인 경우의 등속도선을 Fig. 3~5에 각각 도시하였다. 특별한 경우로서 핀(fin)의 길이가 원점에서 원관 벽까지인 경우( $a=0$ )의 부채꼴 유동영역( $0 \leq r \leq 1, -\pi/N \leq \theta \leq \pi/N$ )에 대한 해는 변수분리방법을 사용하면 다음과 같이 쉽게 구해진다.

$$w(r, \theta) = -\frac{1}{4} \left[ r^2 \left( 1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos \alpha} \right) - \frac{16\alpha^2}{\pi^3} \right. \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} r^{(2k+1)\pi/\alpha} \\ \left. \times \frac{\cos((2k+1)\pi\theta/\alpha)}{(2k+1+2\alpha/\pi)(2k+1-2\alpha/\pi)} \right] \quad (10a)$$

여기서,  $\alpha = 2\pi/N$ 이다.  $N=4$ ( $\alpha = \pi/2$ )인 경우에 식(10a)의 분모가 0이 되는데, 이 경우의 해는 다음과 같다.

$$w(r, \theta) = -\frac{1}{4} \left[ r^2 \left\{ \left( 1 - \frac{\cos 2\theta}{\pi} (3 - 4 \ln r) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{\pi} \theta \times \sin 2\theta \right\} - \frac{16\alpha^2}{\pi^3} \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} r^{(2k+1)\pi/\alpha} \right. \\ \left. \times \frac{\cos((2k+1)\pi\theta/\alpha)}{(2k+1+2\alpha/\pi)(2k+1-2\alpha/\pi)} \right] \quad (10b)$$

이 경우에 대해서도  $N=2, 4$ 의 경우에 등속도선을 Fig. 6~7에 도시하였다. 이상으로 핀이 부착된 원관내의 층류 유동에 대하여 핀의 개수와 핀의 길이의 변화에 따라 속도분포와 유동특성을 모두 구할 수 있다.

#### 4. 결과 및 고찰

##### 4.1 속도분포

Fig. 3~5은 핀의 길이가 0.5( $a=0.5$ )이고 핀의

개수( $N$ )가 1, 2, 3인 경우에 핀과 핀 사이의 등속도선을 각각 나타내고 있다. 그림에서 보듯이  $N=1$ 인 경우를 제외하고는 핀이 등간격으로 부

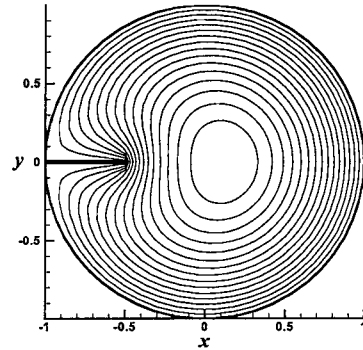


Fig. 3 Constant velocity line ( $N=1, a=0.5, w_{\max} = 0.206, \Delta w/w_{\max} = 1/16$ ).

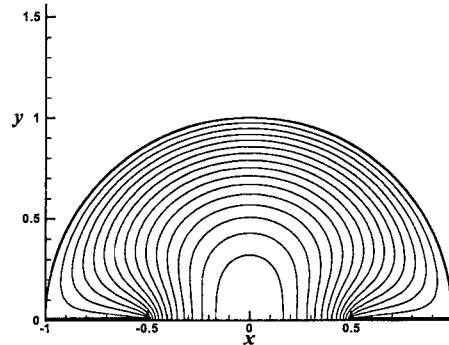


Fig. 4 Constant velocity line ( $N=2, a=0.5, w_{\max} = 0.172, \Delta w/w_{\max} = 1/16$ ).

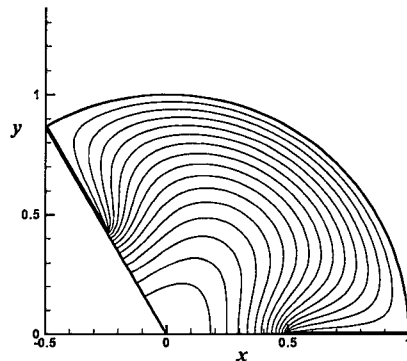


Fig. 5 Constant velocity line ( $N=3, a=0.5, w_{\max} = 0.149, \Delta w/w_{\max} = 1/16$ ).

착되어 있으므로 최대유속이 관 중앙에서 나타남을 확인할 수 있다.

Fig. 6~7는 핀의 개수( $N$ )가 2, 4이고 길이가

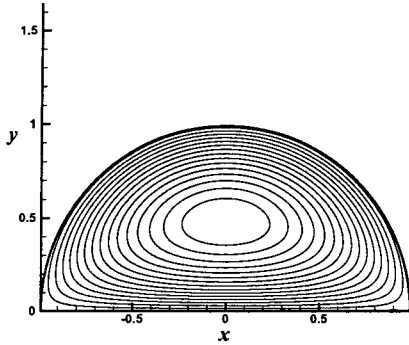


Fig. 6 Constant velocity line ( $N=2, a=1, w_{\max}=0.092, \Delta w/w_{\max}=1/16$ ).

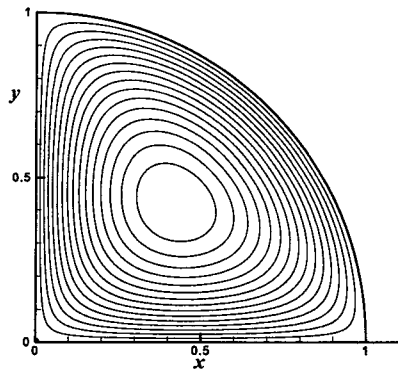


Fig. 7 Constant velocity line ( $N=4, a=1, w_{\max}=0.052, \Delta w/w_{\max}=1/16$ ).

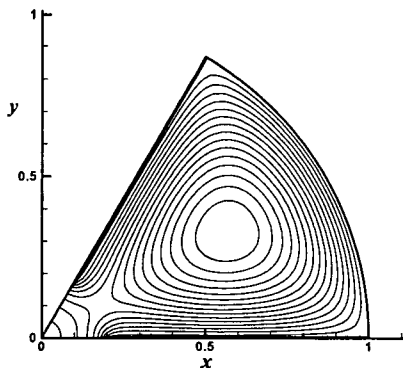


Fig. 8 Constant velocity line ( $N=6, a=0.2, w_{\max}=0.034, \Delta w/w_{\max}=1/16$ ).

1( $a=0$ )일 때의 등속도선을 나타내고 있다.  $a \neq 0$  또는  $N \neq 1$ 인 경우에도 Fig. 8( $N=6, a=0.2$ )과 같이 핀의 길이가 길어지면( $a < 0.3$ ) 최대속도는 원관 중심이 아니라 핀 사이의 중앙 쪽에서 나타나며 속도분포는 saddle point를 형성함을 알 수 있다.

#### 4.2 전단응력 분포

Fig. 9~10에 핀 표면과 원관 벽면에서의 전단응력 분포를 각각 나타내었다.

핀의 개수가 증가할수록 오히려 속도구배가 감소하기 때문에 전단응력이 작게 나타났으며 핀 표면에서는 전단응력이 매우 크게 나타남을 알 수 있는데 이는 핀 끝의 첨점 부근에서의 큰 속도구배에 기인한다.

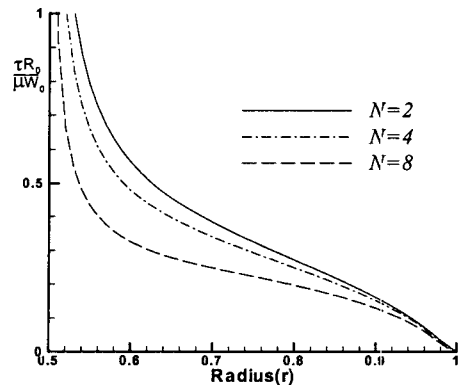


Fig. 9 Shear stress distribution on the fin  $\tau(\tau, 0)$  ( $a=0.5$ ).

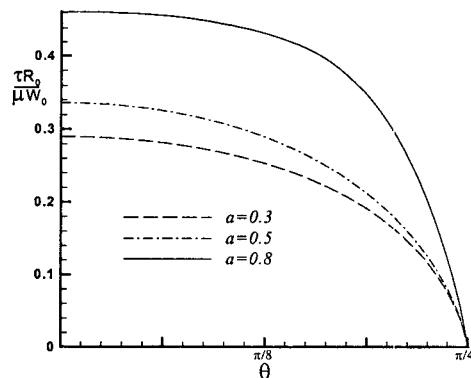


Fig. 10 Shear stress distribution on the wall  $\tau(1, \theta)$  ( $N=4$ ).

원관 벽면에서의 전단응력은 핀과 핀 사이의 중앙부분( $\theta=0$ )에서 최대의 전단응력을 나타내며, 원관 벽면의 핀 부착점( $\theta=\pi/N$ )에서는 전단응력이 0으로 됨을 알 수 있다.

4.3 유량과 관마찰계수

핀관내를 통과하는 유량  $Q$ 는

$$Q = \pi R_0^2 \bar{w} = -\frac{\pi R_0^4}{\mu} \frac{dP}{dZ} \bar{w}$$

로 표현되므로 3장에서 구한  $w(r, \theta)$ 의 단면 평균  $\bar{w}$ 를 구하면 된다.

$$\bar{w} = \frac{1}{\pi R_0^2} \int w(r, \theta) dA$$

Fig. 11에 핀의 개수와 길이에 따른 무차원 평균 속도  $\bar{w}$ 를 나타내었다. 핀이 없는 경우( $N=0$  또는  $a=1$ )에 무차원 평균속도  $\bar{w}$ 가 Poiseuille 유동과 같이 1/8로 됨을 확인할 수 있다. 층류 유동에 대한 관마찰계수  $f$ (Darcy friction factor)는 다음과 같이 무차원 평균속도  $\bar{w}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} f &\equiv -\frac{2D_h}{\rho \bar{w}^2} \frac{dP}{dZ} \\ &= \frac{64}{Re_h} \frac{\pi^2}{8w(\pi+(1-a)N)^2} \\ &= \frac{64}{Re_{eff}} \end{aligned}$$

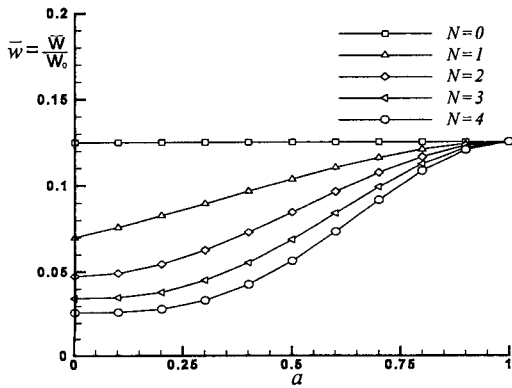


Fig. 11 Average velocity in the finned tube.

여기서  $Re_h = \frac{\rho \bar{w} D_h}{\mu}$ ,  $Re_{eff} = \frac{\rho \bar{w} D_{eff}}{\mu}$  이고  $D_{eff} = \frac{8\bar{w}(\pi+(1-a)N)^2}{\pi^2} D_h = \frac{8\bar{w}(\pi+(1-a)N)}{\pi} D$  이다.

위에서 계산된 유효직경 ( $D_{eff}$ )는 난류유동에서도 관마찰계수( $f$ )를 구하는 데 있어서 다음과 같이 매우 유용하게 사용할 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$f = 0.316 Re_{eff}^{-1/4} \quad (4000 < Re_{eff} < 10^5)$$

Fig. 12에 핀관의 유효직경( $D_{eff}$ )를 도시하였다. 특히, 핀이 없는 경우( $N=0$  또는  $a=1$ )는  $\bar{w}=1/8$ 이므로  $D_{eff}=D$ 임을 알 수 있고  $a=0.7$  이상인 경우에는 유효직경( $D_{eff}$ )이 오히려 직경( $D$ )보다 크게 나타남을 알 수 있다. 따라서, 층류 난류에 관계없이 짧은 핀( $a>0.7$ )이 부착된 경우의 관마찰계수가 핀이 없는 경우의 관마찰계수보다 작아짐을 알 수 있다.

5. 결 론

내부 핀이 길이 방향으로 부착된 원관내의 완전 발달된 유동장을 conformal mapping 이론을 사용하여 핀의 개수, 핀의 길이 변화에 따른 유동장을 해석한 결과는 다음과 같다.

(1) 동일한 압력강하에 대하여, 핀의 개수가 증가하고 핀의 길이가 길어질수록 속도가 감소하고 최대속도의 위치는 원관 중심에서 핀과 핀 사이

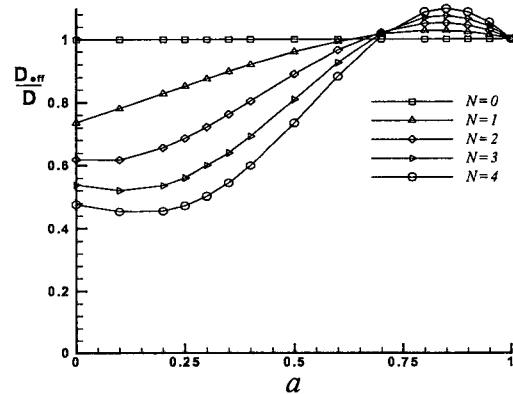


Fig. 12 Effective diameter of finned tube.

로 이동하며, 등속도선에서 cell의 형상이 형성됨을 확인할 수 있다.

(2) 전단응력은 핀 끝에서 전단응력이 크게 나타나고 벽면에서는 핀과 핀 중심에서 최대로 나타난다.

(3) 동일한 압력강하에 대하여, 유량은 핀의 개수가 많아지고 핀의 길이가 길어질수록 작아진다.

(4) 유효직경( $D_{eff}$ )는 핀의 길이가 길고( $a < 0.7$ ) 개수가 작아질수록 크게 나타났으며, 핀의 길이가 짧아지고( $a > 0.7$ ) 개수가 많아질수록 크게 나타난다.

### 후 기

본 논문은 2000년도 두뇌한국 21사업에 의하여 지원되었음.

### 참고문헌

- Masliyah, J. H. and Nandakumar, K., 1976, Heat transfer in internally finned tubes, J. Heat Transfer, Vol. 98, pp. 257-261.
- Soliman, H. M. and Feingold, A., 1977, Analysis of fully developed laminar flow in longitudinal internally finned tube, Chem. Eng. J., Vol. 14, pp. 119-128.
- Prakash, C. and Liu, Ye-Di., 1985, Analysis of laminar flow and heat transfer in the entrance region of an internally finned circular duct, J. Heat Transfer, Vol. 107, pp. 84-91.
- Barozzi, G. S. and Pagliarini, G., 1985, A method to solve conjugate heat transfer problems: The case of fully developed laminar flow in a pipe, J. Heat transfer, Vol. 107, pp. 77-83.
- Kelkar, K. M. and Patankar, S. V., 1987, Numerical prediction of fluid flow and heat transfer in a circular tube with longitudinal fins interrupted in the streamwise direction, ASME 24th national heat transfer Conf., Pittsburgh, Aug.
- Kettner, I. J., Degani, D. and Gutfinger, C., 1991, Numerical study of laminar heat transfer in internally finned tubes, Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 20, pp. 159-180.
- Shinzinger, R. and Patricio, A. A. L., 1991, Conformal mapping: Methods and Applications, Elsevier Science Publishers B. V., pp. 36-52.
- Hilderbrand, F. B., 1976, Advanced calculus for application, 2nd ed., Prentice-Hall Inc., pp. 450-451.
- White, F. M., 1994, Fluid mechanics, 3rd ed., McGraw-Hill Inc., pp. 300, 313-314.