

## 수학적 해석 방법에 의한 액체저장탱크의 액동압 거동 해석

박종률<sup>†</sup> · 오택열<sup>\*</sup>

(2001년 7월 6일 접수, 2002년 1월 14일 심사완료)

### Hydrodynamic Behavior Analysis of Vertical-Cylindrical Liquid-Storage Tanks by Mathematically Analytic Method

Jong-Ryul Park and Taek-Yul Oh

**Key Words:** Fluid Velocity Potential(유체속도퍼텐셜), Hydrodynamic Pressure(액동압), Impulsive Pressure(충격압), Convective Pressure(이류압), Sloshing Frequency(요동진동수)

#### Abstract

Hydrodynamic behavior and response of vertical-cylindrical liquid-storage tank is considered. The equation of the liquid motion is shown by Laplace's differential equation with the fluid velocity potential. The solution of the Laplace's differential equation of the liquid motion is expressed with the modified Bessel functions. Only rigid tank is studied. The equivalent masses and heights for the tank contents are presented for engineering design model.

#### 1. 서론

액체를 저장하는 여러 다른 구조물 중에서 지반에 지지되는 얇은 두께의 직립 원통 탱크는 저장액체에 의해 생기는 유체 정압을 지지하는데 매우 효과적이기 때문에 세계적으로 가장 널리 사용되고 있다.

1964년, 알래스카에서의 지진으로 인한 탱크의 파손에 대한 연구보고에서부터 최근까지 수십 건의 파손 사례로 보아, 액체 저장 탱크의 거동과 성능을 더욱 더 잘 이해하는 것이 필요하다.

다행히 한국 내에서는 지진에 의한 탱크의 파손 사례는 아직 보고되지 않고 있으나 최근 한반도 내에서도 산업시설물이 파손될 수 있는 리히

터 규모(Richter magnitude) 4 이상의 지진이 발생되고 있어 지진에 대한 액체 저장 탱크의 안전도를 심각히 고려해야 한다.

액체 저장 탱크가 지진하중을 받을 때, 저장액체의 진동 운동은 탱크 구조물을 통해 액체에 작용되는 지진 가속도에 의해 발생된다. 이 액체의 진동 운동은 두 가지 형(mode)으로 나눌 수 있다. 첫 번째 것은 충격형(impulsive mode)으로 정의되는데 탱크 구조물의 운동과 조화되어 움직이는 액체 입자들의 운동에 의한 운동이다. 두 번째 것은 이류형(convective mode) 혹은 보통 액체요동(sloshing)으로 부르는 것으로 정의되는데 수직으로 요동하는 자유액면 근처에서의 액체 입자들의 운동에 의한 운동이다.

액체 저장 탱크의 동적 거동의 해석은 일반적으로 강체계(rigid system)와 유연체계(flexible system)의 두 개의 계(system)로 구분하여 연구되고 있다.

강체 탱크 모델에 대한 연구는 Jacobsen,<sup>(1)</sup> Housner,<sup>(2,3)</sup> Epstein,<sup>(4)</sup> Yang,<sup>(5)</sup> Wozniak과 Mitchel,<sup>(6)</sup>

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 현대엔지니어링(주),  
화공플랜트사업부, 기계부  
E-mail : jrpark@hec.co.kr

TEL : (02)2166-8212 FAX : (02)2649-9387

<sup>\*</sup> 회원, 경희대학교, 기계산업시스템부

Haroun<sup>(7)</sup>가 수행했다.

Jacobsen에 의해 제안된 해석 절차에서는 유체가 비압축성이고 비점성이라고 가정되었다. 중력과 효과는 제외되었으며 단지 저장 액체의 충격 운동만 고려되었다.

Housner는 액체 거동 해석에서 중력과의 효과가 포함되었으며 에너지 법칙에 기초하여 저장 액체의 운동을 충격형과 이류형으로 분리하여 해석했다.

그후 Epstein는 Housner의 모델을 개선하였는데 이류운동은 주로 액체의 위 부분이 관여된다고 제안하고 자유 액면에서  $1.5R$ 의 깊이까지의 액체 부분만이 이류운동의 효과를 평가할 때 고려했다.

Yang은 충격효과를 액체-탱크계(fluid-tank system)의 고유 진동수에 상응하는 1자유도 기계 진동자(SDOF mechanical oscillator)로 표현한 지반의 사가속도함수(ground pseudo-acceleration function)를 사용하여 모델링하였다.

Wozniak과 Mitchell은 Housner의 연구결과를 바탕으로 엔지니어링 설계에 적용할 수 있도록 개선했으며, 이 결과는 API standard 650, Appendix E<sup>(8)</sup>에 채용되어 현재 엔지니어링업무에 활용되고 있다.

Haroun은 모멘텀 평형법(momentum balance method)을 사용하여 사각탱크와 수력담에 대한 액동압 계산법을 제시했다.

유연체 탱크 모델에 대한 연구는 Veletsos,<sup>(9)</sup> Yang,<sup>(5)</sup> Veletsos와 Yang,<sup>(10)</sup> Haroun과 Housner,<sup>(11)</sup> Balendra,<sup>(12)</sup> Fischer<sup>(13)</sup>은 액동하중과 탱크 구조물의 동적 반응사이의 연성 효과를 고려함으로써 액체-탱크계의 지진거동에 대한 탱크 셸 벽의 유연성의 영향을 연구했다.

탱크의 내진설계에 대한 국내의 연구는 김동현,<sup>(14)</sup> 김충호<sup>(15)</sup>에 의해 수행되었는데 액동압 거동에 대한 수학적인 엄밀해의 유도나 증명에 대해서는 부족하다.

탱크의 유연성은 탱크 벽체내의 응력에는 영향을 미치나 탱크 내부에 있는 액체의 수면변위 응답에는 영향이 거의 없다.<sup>(16)</sup> 고유 진동수들은 그 질량의 역수의 제곱근에 비례한다. 부가된 액체 질량은 셸 자체의 질량보다 매우 크다. 때문에 실제로 탱크내 액체의 공진요동진동수는 액체-탱크계의 고유진동수보다 낮으므로 압력분포는 강

체탱크의 조건하에서 구할 수 있다.<sup>(13,17, 8)</sup>

이러한 이유로, 본 연구에서는 액동압 거동해석에 강체계를 채용했다.

본 연구의 목적은 3가지이다. 첫째, 지반 여기에 의해 생기는 저장 액체의 액동압 거동해석을 위해 유체속도 퍼텐셜을 갖는 Laplace 미분방정식을 Bessel함수를 이용하여 충격형과 이류형에 대해 그 해를 정식화하는 것과 둘째, 이 해를 이용하여 엔지니어링 설계 모델을 만들고 기존의 설계 코드인 API standard 650에서 채용한 설계모델과 비교하므로써 충격형과 이류형의 운동효과 및 성질을 고찰하고자 한다. 셋째, 한국 산업규격 KS B 6225(강제석유저장탱크의 구조)에서는 탱크 몸통의 강도 설계 시, 지진시의 액면 요동과 동압을 고려하여야 한다고 명시하고 있으나 구체적인 수식과 명확한 규정이 없는바 이를 보완하는데 필요한 기초이론을 제공하고자 한다.

## 2. 원통형 탱크의 구조, 좌표계 및 문제의 가정

### 2.1 원통형 구조

고려된 탱크는 Fig. 1에 보여주고 있다. 이 탱크는 강체기초(rigid base)에 고정되어 있고 원통형이며 얇은 벽으로 되어 있다. 이 탱크는 반경  $a$ , 길이  $L$ 이며 높이  $H$  만큼 액체가 부분적으로 채워져 있는 탱크이다. 원통 좌표계가 사용되었으며 원점은 바닥의 중앙점을 사용했다.

### 2.2 문제의 가정

고려한 탱크는 강체이며 탱크내에서 요동하는 액체에 대한 거동을 고려할 때 이 액체는 (i) 비점성 유체, (ii) 비압축성 유체, (iii) 적은 변위 속도 및 자유액면의 기울기, (iv) 비회전 유동장, (v) 동질 유체라고 가정한다.

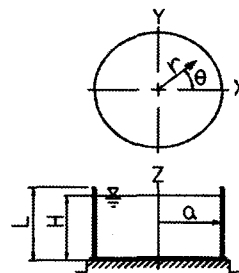


Fig. 1 Cylindrical tank and coordinate system

그리고 액체-탱크계(fluid-tank system)는 x-축에 따라 수평가속도  $\ddot{x}(t)$ 를 받는다고 가정한다. 수직가속도는 고려하지 않았다.

### 3. 기본방정식

정의된 원통좌표계와 가정하에서 어떤 비압축성 비회전유동장의 유체속도퍼텐셜  $\Phi(r, \theta, z, t)$ 가 존재하며 이것은 Laplace 방정식을 만족해야 한다. 유체에 대한 운동 방정식을 Laplace 방정식으로 쓰면

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

여기서, 반지름 방향의 속도항, 접선방향 속도항 그리고 수직방향 속도항은 각각

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

이다.

Bernoulli-Euler 방정식에서 액체운동에 의한 액동압  $p$ 는 유체속도퍼텐셜  $\Phi$ 와 시간  $t$ 와 관계가 있는데

$$p = \rho_l \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2)$$

이다.  $d(t)$ 를 액면에서 액체의 수직변위의 순간값(instantaneous value)이라고 정의하면,

$$d(t) = \int v_z dt = - \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} dt \quad (3)$$

로 표현되며  $z=H$ 에서 압력은  $d(t)$ 와 관련된 관성력(inertia force)의 기여를 무시하면 개략적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p = -\rho_l \cdot g \cdot d(t) \quad (4)$$

식 (2)과 식 (4)을 등식으로 놓고 식 (3)을 대입하여 정리한 후 시간  $t$ 로 미분하면

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

을 얻을 수 있다.

따라서 식 (1)에 대한 해는 두 부분으로 표시할 수 있다.

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_c \quad (6)$$

여기서  $\Phi_i$ 는 충격효과에 대한 해이고  $\Phi_c$ 는 중력항이 포함된 이류효과에 대한 해이다.

### 4. 충격력 유체속도퍼텐셜의 엄밀해

#### 4.1 충격력 함수해 $\Phi_i$ 의 경계조건

Laplace 방정식의 해는 조화함수이며, 유동문제에서 속도 퍼텐셜에 대한 경계조건은 고체경계면 상에서 고체경계면에 대한 상대속도의 수직성분은 0이 되어야 한다는 물리적 현상에서 얻는다.<sup>(19)</sup>

액체-탱크계에 대한 충격효과 액체운동의 경계조건은 조화함수가 되기 위해서는 다음과 같은 경계조건을 만족한다.

(1) 탱크의 바닥, 즉  $z=0$ 에서 액체의 수직방향 속도  $v_z$ 는 0이 되어야 한다.

(2) 탄성 셸의 측판에 인접한 거리, 즉  $r=a$ 에서 액체의 반지름 방향 속도는 셸의 속도와 비슷한 속도로 움직이어야 하며, 셸의 반지름 방향 속도  $v_r$ 는 지반운동에 상응하는 값과 같아야 한다.

(3) 충격력 효과에 있어서는 액체가 탱크에 가득 찬 경우, 즉  $z=H$ 에서는 순간 시간에 대한 액면의 변위는 없어야 한다. 그러므로,

$$\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}(r, 0, t) = v_z = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} - \left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right|_{r=a} &= - \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}(a, z, t) = v_r \\ &= - \frac{\partial w}{\partial t}(z, t) = \dot{x}(t) \cos \theta \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right|_{z=H} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}(r, H, t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(H, t) = 0 \quad (9)$$

4.2 충격력 함수해  $\phi_i$ 의 수학적 엄밀해  
충격력 함수해  $\phi_i$ 의 일반적인 형식은

$$\phi_i = R(r) \Theta(\theta) Z(z) T(t) \quad (10)$$

로 쓸 수 있다. 식 (10)을 식 (1)에 대입하고  $R\Theta ZT$ 로 나누면

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (11)$$

식 (7), 식 (8) 그리고 식 (9)에 의해 정의된 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-R\Theta Z'|_{z=0}T=0 \quad \text{혹은} \quad -Z'|_{z=0}=0 \quad (12)$$

$$-R'|_{r=a}\Theta ZT = \dot{x}(t) \cos \theta \quad (13)$$

$$R\Theta Z|_{z=H} \dot{T}=0 \quad \text{혹은} \quad Z|_{z=H}=0 \quad (14)$$

여기서, 위첨자 (')는 3개의 위치 좌표,  $r, \theta, z$  중 어느 것에 대한 미분을 뜻하고 위첨자 (·)는 시간에 대한 미분을 뜻한다.

속도퍼텐셜의 함수  $\theta$ 와  $T$ 는

$$\theta = \cos \theta \quad (15)$$

$$T = \dot{x}(t) \quad (16)$$

로 가정할 수 있다.

식 (11)에서  $\frac{Z''}{Z}$ 는 상수이어야 한다.

$$\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 \quad (17)$$

로 놓으면, 식 (17)의 해는

$$Z = A \cos(\lambda z) + B \sin(\lambda z) \quad (18)$$

의 형식으로 표시된다. 여기서,  $A$ 와  $B$ 는 상수이다. 식 (18)에 경계조건식 식 (12)를 적용하면  $B=0$ 가 되므로 식 (18)는

$$Z = A_n \cos(\lambda_n z) \quad (19)$$

로 단순화되고 이 식에 경계조건식 식 (14)를 적

용하면  $A \neq 0$ 이고  $\lambda_n z = \frac{\pi}{2}(2n-1)$  이므로

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H} \quad (20)$$

로 된다. 여기서  $n$ 은  $n \neq 0$ 이고 양의 정수이다. 따라서 식 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$r^2 R'' + rR' - (1 + \lambda_n^2 r^2)R = 0 \quad (21)$$

이 식은 개선된 Bessel 미분방정식이다. 이 방정식의 일반해는

$$R_n = C_n I_1(\lambda_n r) + D_n K_1(\lambda_n r) \quad (22)$$

로 표시된다. 여기서  $I_1$ 는 위수 1인 제1종 변형 Bessel 함수이고,  $K_1$ 는 위수 1인 제2종 변형 Bessel 함수이다.  $K_1(\lambda_n r)$ 는  $r=0$ 에서 특이해를 가지므로 해가 될 수 없다.  $R_n$ 을  $r$ 에 대해 미분하면

$$R_n' = C_n [\lambda_n I_1'(\lambda_n r)] \quad (23)$$

식 (15)와 식 (16)를 식 (13)에 대입하고, 식 (23)과 식 (19)을 조합하여 정리하면

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (A_n C_n) \lambda_n I_1'(\lambda_n a) \cos(\lambda_n z) = 1 \quad (24)$$

로 된다.  $(A_n C_n)$ 의 값을 구하기 위해 식 (24)의 양변에  $\cos(\lambda_n z)$ 을 곱하고  $z$ 에 대해 0부터  $H$ 까지 적분하여 정리하면  $(A_n C_n)$ 의 값은

$$\begin{aligned} (A_n C_n) &= -\frac{2}{\lambda_n I_1'(\lambda_n a)} \frac{1}{H} \int_0^H \cos(\lambda_n z) dz \\ &= -\frac{2}{\lambda_n I_1'(\lambda_n a)} \frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (15), 식 (16), 식 (19) 및 식 (22)을 식 (10)에 대입하고, 식 (20)과 식 (25)를 적용하면

$$\phi_i = -\dot{x}(t) H \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{[(2n-1)\pi]^2}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{I_1 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{r}{H} \right]}{I_1' \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \\ & \times \cos \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

충격 효과에 의해 생기는 충격압력  $p_i$ 는 식 (26)를 식 (2)에 대입해서 얻는다.

$$\begin{aligned} p_i = & -\ddot{x}(t) \rho_l H \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{[(2n-1)\pi]^2} \\ & \times \frac{I_1 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{r}{H} \right]}{I_1' \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \\ & \times \cos \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

이 충격압력에 의해 탱크에 작용하는 수평방향의 합력인 전체 충격 액동압<sup>(20)</sup>은

$$\begin{aligned} Q_{i,0,t} = & \int_0^H \int_0^{2\pi} p \Big|_{r=a} a \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot dz \quad (28) \\ = & -\ddot{x}(t) m_l \frac{H}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{[(2n-1)\pi]^3} \\ & \times \frac{I_1 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]}{I_1' \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \end{aligned} \quad (29)$$

충격 액동압에 의한 탱크의 벽 하단에 발생하는 충격 전도 모멘트는

$$M_{i,0,t} = \int_0^H \int_0^{2\pi} z \cdot p \Big|_{r=a} \cdot a \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot dz \quad (30)$$

정리하면

$$\begin{aligned} M_{i,0,t} = & -\ddot{x}(t) m_l H \frac{H}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{[(2n-1)\pi]^3} \\ & \times \frac{I_1 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]}{I_1' \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \left[ 1 - \frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

액면,  $z=H$ 에서 어떤 점에 대한 수직 속도항  $v_z$ 은  $v_{i,z} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}$ 로 표시되며,  $r=a$ 와  $z=H$ 에서의 특이해를 갖는다. 그러나 어떤 다른 점에서의 속도는 미소하다. 따라서 충격력은 액체운

동을 포함하지 않는다.

## 5. 이류력 유체속도퍼텐셜의 엄밀해

### 5.1 이류력 함수해 $\Phi_c$ 의 경계조건

액체-탱크계에 대한 이류효과 액체운동의 경계조건은 조화함수가 되기 위해서는 다음과 같은 경계조건을 만족한다.

(1) 탱크의 바닥, 즉  $z=0$ 에서 액체의 수직방향 속도  $v_z$ 는 0이 되어야 한다.

(2) 탄성 쉘의 측판에 인접한 거리, 즉  $r=a$ 에서 액체의 반지름 방향 속도  $v_r$ 는 0이 되어야 한다.

(3) 이류력 효과에 있어서는 액체가 탱크에 가득 찬 경우, 즉  $z=H$ 에서는 이류 효과에 의한 압력변화와 충격 효과에 의한 압력변화는 서로 상쇄되어야 한다. 그러므로,

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_c}{\partial z}(r, 0, t) = v_z = 0 \quad (32)$$

$$-\frac{\partial \Phi_c}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_c}{\partial r}(a, z, t) = v_r = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial t^2} \Big|_{z=H} + g \frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \Big|_{z=H} = -g \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \Big|_{z=H} \quad (34)$$

### 5.2 이류력 함수해 $\Phi_c$ 의 수학적 엄밀해

임의의 지반운동에 대한 해를 구하기보다는 조화 지반 가속도  $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 e^{i\omega t}$ 에 대한 해를 구하고자 한다.

$$\theta = \cos \theta \quad (35)$$

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad (36)$$

로 하면 이류력 함수해  $\Phi_c$ 의 일반적인 형식은

$$\Phi_c = R(r) \Theta(\theta) Z(z) e^{i\omega t} \quad (37)$$

로 쓸 수 있다. 식 (37)을 식 (1)에 대입하고  $R\Theta Z e^{i\omega t}$ 로 나누면

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (38)$$

식 (32), 식 (33), 식 (34)에 의해 정의된 경계조건은

$$R\theta Z'|_{z=0}T=0 \quad \text{혹은} \quad Z'|_{z=0}=0 \quad (39)$$

$$R'|_{r=0}\theta ZT=0 \quad \text{혹은} \quad R'|_{r=a}=0 \quad (40)$$

$$-\omega^2 R\theta Z|_{z=H} + gR\theta Z'|_{z=H}$$

$$= -\frac{g}{i\omega} \bar{x}_0 \cos\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \frac{I_1\left[\frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{r}{H}\right]}{I_1\left[\frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{H}\right]} \quad (41)$$

로 쓸 수 있다.

식 (38)에서  $\frac{Z''}{Z}$ 는 상수이어야 한다.

$$\frac{Z''}{Z} = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \quad (42)$$

로 놓으면

$$Z = A \cosh \frac{\lambda z}{a} + B \sinh \frac{\lambda z}{a} \quad (43)$$

여기서,  $A$ 와  $B$ 는 상수이다.

경계조건식 식 (39)을 적용하면  $B=0$ 가 되어

$$Z = A \cosh \frac{\lambda z}{a} \quad (44)$$

이 된다. 식 (38)에 식 (35)와 식 (42)을 대입하면

$$r^2 R'' + rR' + \left(\frac{\lambda^2}{a^2} r^2 - 1\right)R = 0 \quad (45)$$

이 방정식의 해를 위수 1인 Bessel 함수로 표현하면

$$R = C J_1\left(\lambda \frac{r}{a}\right) + D Y_1\left(\lambda \frac{r}{a}\right) \quad (46)$$

여기서  $J_1$ 는 위수 1인 제1종 Bessel 함수이고,

$Y_1$ 는 위수 1인 제2종 Bessel 함수이다.  $Y_1\left(\lambda \frac{r}{a}\right)$

는  $r=0$ 에서 특이해를 가지므로 해가 될 수 없다. 따라서

$$R = C J_1\left(\lambda \frac{r}{a}\right) \quad (47)$$

식 (47)을 미분하고 식 (40)의 경계조건을 적용하면

$$J_1'(\lambda) = 0 \quad (48)$$

이 되어야 한다. 따라서  $J_1'(\lambda) = 0$ 의 근은

$$\lambda_n = 1.8412, 5.3314, 8.5363, 11.706, 14.8636, \dots$$

이 된다.

식 (44)과 식 (47)를 식 (41)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (A_n C_n) \left[ \lambda_n \frac{g}{a} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) - \omega^2 \right] J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \cosh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \\ &= -\frac{g}{i\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi} \frac{I_1\left[\frac{(2m-1)\frac{\pi}{2}\frac{r}{H}\right]}{I_1\left[\frac{(2m-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{H}\right]} \quad (49) \end{aligned}$$

만약 경계조건식 식 (34)의 오른쪽 중력가속도 항의 숫자가 0과 같으면(즉, 자유진동 조건에 상응한다면) 식 (49)에서 요동액체의 고유진동수  $\omega_n^2$ 의 값들은

$$\omega_n^2 = \lambda_n \frac{g}{a} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \quad (50)$$

로 주어진다.

$(A_n C_n)$ 의 값을 구하기 위해 식 (49)에 식 (50)을 대입하여 요동액체고유진동수와 조화진동수를 포함하는 식으로 정리하고, 이 방정식의 양쪽에  $J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \frac{r}{a} d\left(\frac{r}{a}\right) d\theta$ 를 곱하고 그 결과를 액면 전체 즉,  $\frac{r}{a}$ 은 0에서 1,  $\theta$ 는 0에서  $2\pi$ 에 대해 적분하고 정리하면

$$(A_n C_n) = -\frac{g}{i\omega} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2 - 1} \frac{1}{J_1(\lambda_n)} \frac{\tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right)}{\cosh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right)} \quad (51)$$

로 된다. 따라서 식 (35), 식 (36), 식 (44) 및 식 (47)을 식 (37)에 대입하고, 식 (50)과 식 (51)을 적용하면 이류력 효과의 해  $\phi_c$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi_c = & -\frac{1}{i\omega} \ddot{x}_0 e^{i\omega t} H \frac{a}{H} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2}{\lambda_n^2 - 1} \\ & \times \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \cosh\left(\lambda_n \frac{z}{a}\right)}{J_1(\lambda_n) \cosh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right)} \end{aligned} \quad (52)$$

탱크에 대한 조화이류압력  $p_c$  은 식 (52)을 식 (2)에 적용하므로써 얻어진다.

$$\begin{aligned} p_c = & \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \rho_l H \frac{a}{H} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2}{\lambda_n^2 - 1} \\ & \times \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \cosh\left(\lambda_n \frac{z}{a}\right)}{J_1(\lambda_n) \cosh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right)} \end{aligned} \quad (53)$$

탱크의 벽에 생기는 상응 전체 이류 액동압은 식 (28)과 같이 적용하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} Q_{c,0,t} = & \ddot{x}_0 e^{i\omega t} m_l \frac{a}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2}{\lambda_n(\lambda_n^2 - 1)} \\ & \times \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \end{aligned} \quad (54)$$

탱크의 벽 하단 위에 발생하는 이류 전도 모멘트는 식 (30)과 같이 적용하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} M_{c,0,t} = & \ddot{x}_0 e^{i\omega t} m_l H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2}{\lambda_n(\lambda_n^2 - 1)} \\ & \times \frac{a}{H} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \cdot \left[1 - \frac{a}{\lambda_n H} \tanh\left(\frac{\lambda_n H}{2a}\right)\right] \end{aligned} \quad (55)$$

액면,  $z=H$ 에서 어떤 점에 대한 수직 속도향  $v_z$  은

$$\begin{aligned} v_{c,z} = & -\frac{\partial \phi_c}{\partial z} \\ = & \frac{\ddot{x}_0}{i\omega} e^{i\omega t} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2\lambda_n}{(\lambda_n^2 - 1)} \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{J_1(\lambda_n)} \\ & \times \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \end{aligned} \quad (56)$$

이 되며 액체의 수직방향 상응변위  $d$ 는 식 (56)

을 적분하므로써 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} d = & -\frac{\ddot{x}_0}{\omega^2} e^{i\omega t} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \frac{2\lambda_n}{(\lambda_n^2 - 1)} \\ & \times \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{J_1(\lambda_n)} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \end{aligned} \quad (57)$$

최대 액체 요동 변위  $d_{\max}$ 는  $r=a$ 에서 얻는다. 따라서 이류력은 액체운동을 포함한다.

## 6. 엔지니어링 설계 모델

### 6.1 설계하중 모델

액체-탱크계의 설계하중 모델은 Fig. 2과 같이 Housner<sup>(3)</sup>가 제안한 기계적 모델을 사용했다. 탱크에 단단히 지지되어 있는 충격효과질량  $m_0$ 는 탱크의 바닥에서 거리  $h_0$ 에서 탱크의 벽에 붙어 있는 강체이다. 탱크에 유연하게 지지되어 있는 이류효과질량  $m_n$ 는 각각은 바닥에서 높이  $h_n$ 에서 2개의 스프링으로 붙어 있다. 각각의 스프링 강성계수는  $k_n/2$ 이다.

만약  $A_n(t)$ 이 어떤 1자유도계의 의사가속도라면 탱크의 바닥위 측판에서 전단력과 전도 모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_0(t) = m_0 \ddot{x}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n A_n(t) \quad (58)$$

$$M_0(t) = m_0 h_0 \ddot{x}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n A_n(t) \quad (59)$$

여기서,

$$A_n(t) = \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

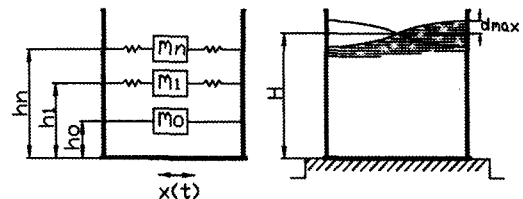


Fig. 2 Equivalent model and fluid motion

충격효과질량  $m_0$ 가 가속도  $\ddot{x}(t)$ 를 받을 때 생기는 힘, 즉 전단력  $Q_0$ 와 모멘트  $M_0$ 는

$$Q_0 = -m_0 \ddot{x}(t) \quad (60)$$

$$M_0 = -m_0 \dot{x}(t) h_0 \quad (61)$$

이류효과질량  $m_n$ 가 의사가속도  $A_n(t)$ 를 받을 때 생기는 힘, 즉 전단력  $Q_n$ 와 모멘트  $M_n$ 는

$$Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) m_n \quad (62)$$

$$M_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) m_n h_n \quad (63)$$

이다.

### 6.2 등가질량비

충격효과에서 충격질량  $m_0$ 과 탱크 안의 액체 전체 질량  $m_i$ 과의 등가질량비  $\frac{m_0}{m_i}$ 는 식 (29)과 식 (60)을 등식으로 놓으면

$$\frac{m_0}{m_i} = \frac{H}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{[(2n-1)\pi]^3} \times \frac{I_1 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]}{I_1 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \quad (64)$$

이류효과 질량  $m_n$ 과 액체전체 질량  $m_i$ 과의 등가질량비  $\frac{m_n}{m_i}$ 는 식 (54)과 식 (62)을 등식으로 놓으면

$$\frac{m_n}{m_i} = \frac{a}{H} \frac{2}{\lambda_n(\lambda_n^2 - 1)} \tanh\left(\lambda_n \frac{H}{a}\right) \quad (65)$$

의 관계식을 얻을 수 있다.

### 6.3 등가작용높이비

탱크 벽 하단의 충격효과에서 충격질량 작용높이  $h_0$ 과 액체 높이  $H$ 과의 등가작용높이비  $\frac{h_0}{H}$ 는 식 (31)에 식 (64)을 대입하고 식 (61)과 등식으로 놓으면

$$\frac{h_0}{H} = 1 + \frac{m_i}{m_0} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64(-1)^{n-1} H}{[(2n-1)\pi]^4 a} \times \frac{I_1 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]}{I_1 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{a}{H} \right]} \right] \quad (66)$$

이류효과에서 이류질량 작용높이  $h_n$ 과 액체 높이  $H$ 과의 등가작용높이비  $\frac{h_n}{H}$ 는 식 (55)과 식 (63)에 식 (65)를 대입하여 등식으로 놓으면

$$\frac{h_n}{H} = 1 - \frac{1}{\lambda_n} \frac{a}{H} \tanh\left(\frac{\lambda_n H}{a}\right) \quad (67)$$

이 얻어진다.

### 6.4 API standard 650의 설계모델과의 평가방법

API standard 650, Appendix E에서 사용된 등가작용높이비 및 등가 질량비는 Housner<sup>(2,3)</sup>가 액체의 차분요소(differential element)에 뉴턴법칙을 적용하여 유도한 것으로 그 결과는 본 연구에서의 1차 모드(모드 수  $n=1$ )에 해당한다. 본 평가에서는 4차 모드(모드 수  $n=4$ )까지 확대하여 고려했다. 두 모델 간의 평가방법은 Epstein<sup>(4)</sup>이 사용한 방법과 같이 등가작용높이비와 등가질량비의 곱에 대한 각각의 비율로 평가했다. 상기 두 평가 비율의 결과는 Fig. 3이다.

그리고 KS B 6225(강제석유저장탱크의 구조)의 내진 설계기준에 적용할 수 있도록 본 해석의 4차 모드까지의 합을 1차 모드에 상응하는 값으로 변환하여 개선시킨 등가질량비와 등가작용높이비는 Fig. 4 및 Fig. 5이다.

## 7. 결과 및 고찰

첫째, 1차 모드만 고려했을 경우 API standard 650과 본 연구와의 차이점은 다음과 같다.

(1) 본 연구의 충격형에서 등가질량비는 API standard 650의 값과 본 연구의 값은 거의 일치한다. 반면에 등가작용높이비  $\frac{h_0}{H}$ 는 API standard 650보다 약 6.7% 높게 나온다. 특이한 것은 API standard 650에서는 탱크의 직경 대 높이의 비,  $D/H \leq 1.5$ 에서는 등가작용높이비의 변화가 있고, 그 이상에서는 값이 0.375로 일정하다. 반면, 본



연구에서는  $D/H \leq 2.75$ 에서 충격효과의 변화가 있고 그 이상에서는 값이 0.4로 일정하다.

(2) 이류효과에서는 등가질량비  $\frac{m_1}{m_i}$ 는 API standard 650의 값과 본 해석에서의 값들과는 거의 일치한다.

둘째, 본 연구에서 4차 모드까지 고려했을 경우 전체 전단력은 API standard 650보다 3%에서 약 9%정도 높게 나온다. 이는 Chen과 Barber<sup>(21)</sup>에 의하면 충격력은 15%까지 큰 값을 가진다는 것과 비슷한 현상을 보여주고 있다.

8. 결론

수평 지진 가속도를 받고 있는 원통 수직 액체 저장 탱크의 액동압 거동에 대한 운동방정식을 해석한 결과 다음과 같은 특성을 알 수 있다.

- (1) 충격력은 지반운동의 가속도에 비례하며, 반면 이류력은 액체요동진동수에 의존한다.
- (2) 이류력은 액체의 요동에 의해 생기므로 충격력의 결과에 의해서 생긴 힘이다.
- (3) 충격효과에서는 유체의 수직방향의 변위 및 속도는 무시하리만큼 미소하여 액면요동의 효과는 무시되지만, 이류효과에서는 유체수직변위 및 속도는 자유액면의 요동진동수와 관계가 있고 탱크 벽면에서 최대값을 갖는다.
- (4) 본 해석에서 얻은 등가질량비와 등가작용높이비는 실제현상에 더 접근하므로 설계코드에 채용하는 것이 타당할 것으로 사료된다.

본 연구 결과는 다음 연구과제인 “강제석유저장탱크(KS B 6225)의 내진설계기준 개선 안”에 대한 연구에 적용될 것이다.

참고문헌

- (1) Jacobsen, Lydik S., 1949, "Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of Fluid Surrounding a Cylindrical Pier," *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 39, pp. 189~204.
- (2) Housner, G. W., 1955, "Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers," *Bulletin of The Seismological Society of America*, pp. 15~35.
- (3) Housner, G. W., 1963, Nuclear Reactors and Earthquakes, TID-7024, U.S. Atomic Energy Commission, pp. 183~209, 367~390.
- (4) Epstein, H. I., 1976, "Seismic Design of Liquid Storage Tanks," *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 102, No. ST9, pp. 1659~1673.
- (5) Yang, J. Y., 1976, "Dynamic Behavior of

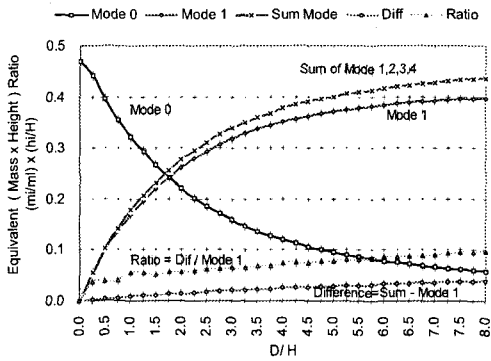


Fig. 3 Equivalent ( masses x heights )

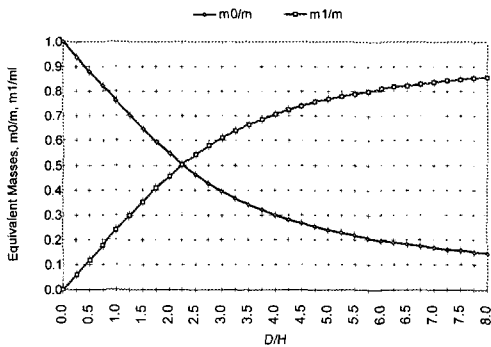


Fig. 4 Equivalent masses

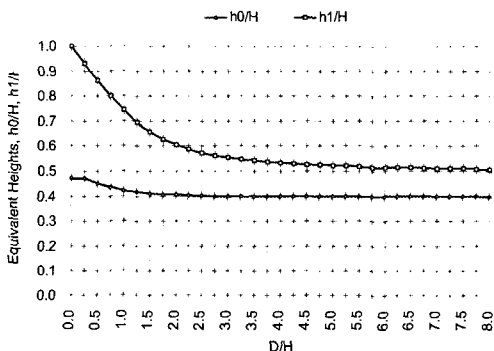


Fig. 5 Equivalent heights

- Fluid-Tank System," Ph.D Thesis, Rice University, Houston, TX, USA.
- (6) Wozniak, R. S. and Mitchell, W. W., 1978, "Basis of Seismic Design Provision for Welded Steel Oil Storage Tanks," *Proceedings-Refining Department, American Petroleum Institute, Washington, D.C.*, Vol. 57, pp. 485~501.
- (7) Haroun, M. A., 1986, "Hydrodynamic Pressure on Tanks by Momentum Balance," *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, Vol. 108, pp. 413~417.
- (8) API Standard 650, 1998, *Welded Steel Tanks for Oil Storage*, 9th edition.
- (9) Veletsos, A. S., 1974, "Seismic Effects in Flexible Liquid Storage Tanks," *Proceeding of International Association for Earthquake Engineering*, pp. 630~639.
- (10) Veletsos, A. S. and Yang, J. Y., 1977, "Earthquake Response of Liquid Storage," *Technical Council on Lifeline Earthquake Engineering, ASCE*, pp. 255~365.
- (11) Haroun, M. A. and Housner, G. W., 1981, "Seismic Design of Liquid Storage Tanks," *Journal of the Technical Councils of ASCE*, Vol. 107, No. TC1, pp. 191~207.
- (12) Balendra, T., Ang, K. K., Paramasivam, P., and Lee, S. L., 1982, "Seismic Design of Flexible Cylindrical Liquid Storage Tanks," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 477~496.
- (13) Fischer, D., 1979, "Dynamic Fluid Effects in Liquid-Filled Flexible Cylindrical Tanks," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, pp. 587~601.
- (14) 김동현, 1987, "원통형 저장탱크의 내진설계 연구," 한양대학교, 박사학위논문.
- (15) 김충호, 1987, "원통형 액체저장탱크의 동적 해석에 관한 연구," 부산대학교, 박사학위논문.
- (16) Aslam, M., Godden, W. G. and Scalise, D. T., 1979, "Earthquake Sloshing in Annular and Cylindrical Tanks," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, No. EM3, pp. 371~389.
- (17) Haroun, M. M. and Tayel, M. A., 1985, "Axisymmetrical Vibrations of Tanks—Numerical," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 111, No. 3, pp. 329~344.
- (18) 이진규, 이상영, 김기환, 조진래, 박태학, 이우용, 2000, "원통형 액체저장탱크의 고유진동에 대한 이론적 연구," 대한기계학회 2000년도 춘계 학술대회논문집 A권, pp. 602~607.
- (19) 손병진, 1978, *유체역학*, p. 517.
- (20) 鶴戸口, 1987, *JIS石油貯槽, 日本規格協會*, pp. 318~320.
- (21) Chen, P. C. and Barber, R. B., 1976, "Seismic Design of Liquid Storage Tanks to Earthquakes," *Int. Symp. Earthquake Structural Design*, St. Louis, Missouri, pp. 1231~1247.