

# 하이퍼큐브와 HCN(n, n), HFN(n, n) 사이의 임베딩

김 종 석<sup>†</sup> · 이 형 옥<sup>††</sup> · 허 영 남<sup>†††</sup>

## 요 약

알고리즘의 설계에 있어서 주어진 연결망을 다른 연결망으로 임베딩하는 것은 알고리즘을 활용하는 중요한 방법이다. 상호연결망 HCN(n, n) 과 HFN(n, n)은 하이퍼큐브가 갖는 좋은 성질을 가지면서 하이퍼큐브보다 망비용(network cost)이 작은 값을 갖는 상호연결망이다. 본 논문에서는 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 와 HCN(n, n), HFN(n, n) 사이에 임베딩하는 방법을 제시하고, 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 은 HCN(n, n)과 HFN(n, n)에 연장을 3, 평균 연장을 2 이하에 임베딩 가능함을 보인다. 또한 HCN(n, n), HFN(n, n)은 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 에 임베딩하는 비용이  $O(n)$ 임을 보인다.

## Embedding between Hypercube and HCN(n, n), HFN(n, n)

Jong-Seok Kim<sup>†</sup> · Hyeong-Ok Lee<sup>††</sup> · Yeong-Nam Heo<sup>†††</sup>

## ABSTRACT

It is one of the important measures in the area of algorithm design that any interconnection network should be embedded into another interconnection network for the practical use of algorithm. A HCN(n, n), HFN(n, n) graph also has such a good properties of a hypercube and has a lower network cost than a hypercube. In this paper, we propose a method to embed between hypercube  $Q_{2n}$  and HCN(n, n), HFN(n, n) graph. We show that hypercube  $Q_{2n}$  can be embedded into an HCN(n, n) and HFN(n, n) with dilation 3, and average dilation is smaller than 2. Also, we has a result that the embedding cost, a HCN(n, n) and HFN(n, n) can be embedded into a hypercube, is  $O(n)$ .

키워드 : 상호연결망(Interconnection Network), 임베딩(Embedding), 연장율(Dilation)

### 1. 서 론

현대의 물리학, 생물학, 천문학과 같은 과학분야와 CAD/CAM, 컴퓨터 그래픽 같은 공학분야 등에서는 많은 계산을 요구하므로 기존의 컴퓨터보다 더욱 빠른 계산 능력을 가지는 컴퓨터를 요구하게 되었다. 최근 컴퓨터 설계에서 성능 향상을 위한 방법으로 병렬 처리(parallel processing) 기술이 널리 사용되고 있다. 병렬 처리란 다수의 프로세서들이 여러 개의 프로그램 또는 한 프로그램의 분할된 부분들을 분담하여 동시에 처리하는 기술을 말한다. 병렬 컴퓨터를 분류하는 방식으로는 Flynn의 분류가 가장 널리 사용되고 있다.

병렬처리 컴퓨터는 크게 공유 메모리를 갖는 다중 프로세서(multiprocessor) 시스템과 분산 메모리를 갖는 다중 컴퓨터(multicomputer) 시스템으로 분류할 수 있다. 다중 컴퓨터 시스템의 각 프로세서들은 자신의 지역 메모리 장치를 갖고, 프로세서들은 정적인 상호연결망(static interconnection net-

work)에 의해 연결되어 있으며 이들 프로세서들 간의 통신은 상호 연결망을 통한 메시지 전송(message passing)에 의해 이루어지고 계산은 데이터 구동(data driven) 방식을 취한다[2, 8]. 지금까지 제안된 상호연결망은 메쉬, 하이퍼큐브[7, 10], HCN[6, 11], HFN[3, 4], 스타그래프[1] 등이 있다.

다중 컴퓨터의 프로세서들을 연결하기 위한 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 따라서 상호 연결망에 대한 연구는 병렬 처리 컴퓨터 개발을 위한 기반으로 그 필요성은 계속 증가하고 있으며, 상호연결망을 평가하는 척도로 분지수, 지름, 대칭성, 고장허용도, 방송, 임베딩 등이 있다.

임베딩은 상호연결망  $G$ 의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망  $H$ 의 프로세서와 통신링크들로 사상하는 것으로서, 상호연결망  $G$ 에서 개발된 알고리즘을 상호연결망  $H$ 에서 효율적으로 실행시킬 수 있는지를 연구하는 분야중의 하나이다. 임베딩의 비용을 평가하는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion) 등이 있다[1, 7, 10].

본 논문에서는 하이퍼큐브와 HCN(n, n), HFN(n, n) 사이의 임베딩을 분석한다. 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 을 HCN(n, n)과 HFN(n, n)에 각각 연장을 3, 확장율 1로 임베딩 가능함을 보이고, 평균 연장율이 2 이하임을 보인다. 또한, HCN(n, n)과

\* 본 연구는 2001년도 순천대학교 공과대학 학술재단 학술연구비의 지원에 의해 수행된 과제임.

† 준 회원 : 순천대학교 대학원 컴퓨터학과

†† 중신회원 : 순천대학교 컴퓨터교육과 교수

††† 정 회원 : 순천대학교 컴퓨터학과 교수

논문접수 : 2002년 4월 24일, 심사완료 : 2002년 5월 24일

HFN( $n, n$ )을 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 에 임베딩 하는 비용이  $O(n)$ 임을 보인다. 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 본 논문에서 제시하는 상호연결망에 대한 관련연구 분야를 살펴보고, 3장에서는 하이퍼큐브와 HCN( $n, n$ ) 및 HFN( $n, n$ ) 사이의 임베딩을 분석하고, 4장에서 결론을 맺는다.

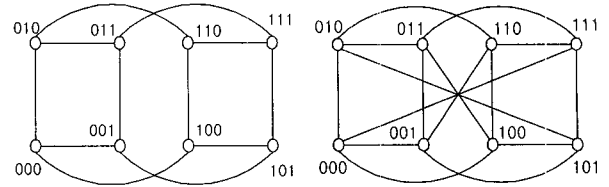
## 2. 관련 연구

상호 연결망은 각 프로세서를 노드로, 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로써 표현될 수 있다. 상호 연결망은 다음과 같이 무방향 그래프  $G=(V, E)$ 로 표현된다. 여기서  $V(G)$ 는 노드들의 집합, 즉  $V(G) = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 이고,  $E(G)$ 는 에지의 집합으로써  $V(G)$  내의 임의의 두 노드  $v$ 와  $w$ 의 쌍  $(v, w)$ 로서 에지  $(v, w)$ 가 존재할 필요충분 조건은 노드  $v$ 와  $w$  사이에 통신 채널이 존재하는 것이다. 상호 연결망을 평가하는 망 척도는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성(symmetry), 확장성(scalability), 고장 허용도(fault tolerance), 방송(broadcasting) 및 임베딩(embedding) 등이 있다[1, 5]. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면  $n \times k$ 개 노드를 갖는 메쉬,  $2^n$ 개 노드를 갖는 하이퍼큐브,  $n!$ 개 노드를 갖는 스타그래프 부류로 나눌 수 있다.

하이퍼큐브  $Q_n$ 은  $2^n$ 개의 노드와  $n2^{n-1}$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는  $n$ -비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1 비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 존재한다.  $n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_n$ 은 분지수와 지름이 각각  $n$ 을 가지면서 망비용(network cost)이  $n^2$ 인 정규그래프이다. 하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭이고 단순한 재귀적 구조를 가지고 있어서 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있으며, Intel iPSC, nCUBE[12], Connection Machine CM-2[13], SGI Origin 2000 등의 시스템에서 사용되고 있다[9]. 또한 임베딩 관점에 있어서 링, 트리, 피라미드, 메쉬 등과 같은 다른 연결망 구조들이 효율적으로 임베딩 될 수 있다는 장점이 있지만, 분지수에 비해 지름과 노드간의 평균 거리가 짧지 않다는 단점이 있다. 이것은 하이퍼큐브가 에지를 효율적으로 사용하지 못함을 의미한다. 이러한 단점을 개선한 새로운 연결망으로 Hierarchical Cubic Network[6, 11], Multiply-Twisted-Cube, Folded Hypercube[4], Hierarchical Folded Hypercube[3], Extended Hypercube 등이 있다.

Folded-Hypercube는 기존 하이퍼큐브에서 각 노드의 주소가 보수관계에 있는 노드들간에 에지를 한 개 추가한 것으로서 하이퍼큐브보다 분지수는 1 증가하지만 하이퍼큐브의 지름을 절반정도 개선한 상호 연결망이다.

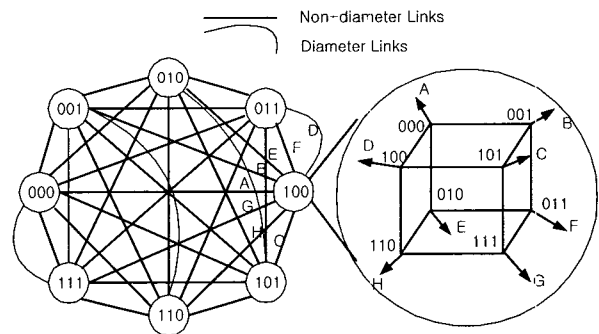
HCN( $n, n$ )은  $n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_n$ 를 기본 모듈로 하고, 기본모듈 내부의 모든 노드들이  $n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_n$ 를 갖는다. HCN( $n, n$ )은  $2^{2n}$ 개의 노드와 분지수  $n+1$ , 그리고



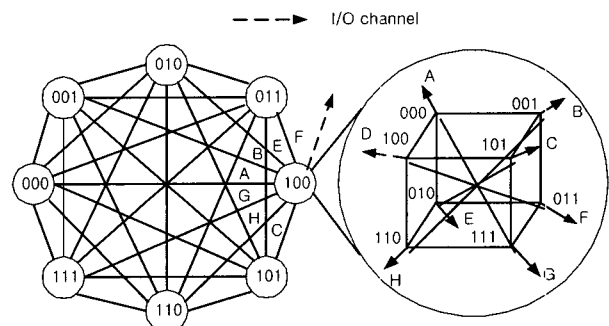
(a) 3차원 하이퍼큐브 (b) 3차원 Folded-하이퍼큐브  
(그림 1) 하이퍼큐브와 Folded-하이퍼큐브

$(n+1)2^{2n-1}$ 개의 에지로 구성되어 있다. HCN( $n, n$ )의 주소는  $(I, J)$ 로 표현하고,  $I$ 는 기본 모듈을 나타내고  $J$ 는 기본 모듈 내의 노드를 표현한다. 기본 모듈 안의 노드를 연결하는 에지는 내부에지라 하고, 기본 모듈 사이의 노드를 연결하는 에지는 외부에지라 한다. 외부 에지는 diameter link와 non-diameter link로 나뉜다. diameter link는 조건  $0 \leq I \leq (2^n-1)$ 와  $0 \leq J \leq (2^n-1)$ 을 만족하는 노드  $(I, I)$ 와  $(J, J)$  사이의 외부 에지를 말하는데  $I$ 와  $J$ 는 보수적 성격을 지닌다. diameter link가 아닌 외부 에지는 non-diameter link로서,  $(I, J)$ 와  $(J, I)$ 를 연결하는 에지이다.

HFN( $n, n$ )의 구조는 HCN( $n, n$ )의 정의에서 다음 두 가지의 에지 변형을 적용하여 구성된 그래프이다. 첫째, 하이퍼큐브 대신에 Folded-하이퍼큐브를 기본 모듈로 사용한다. 둘째, HCN( $n, n$ )의 diameter link를 제거한다. HFN( $n, n$ )은  $2^{2n}$ 개 노드, 분지수  $n+2$ , 그리고  $(n+2)2^{2n-1}-2^{n-1}$ 개 에지로 구성된다.



(그림 2) HCN(3,3)



(그림 3) HFN(3,3)

〈표 1〉 하이퍼큐브와 그 변형된 연결망에서의 망 비용

연결망	망척도	노드수	분지수	지름	망 비용
하이퍼큐브 $Q_{2n}$		$2^{2n}$	$2n$	$2n$	$4n^2$
Folded-하이퍼큐브		$2^{2n}$	$2n+1$	$n$	$2n^2+n$
HCN(n, n)		$2^{2n}$	$n+1$	$n + \lfloor \frac{(n+1)}{3} \rfloor + 1$	$\cong \frac{4}{3}n^2 + \frac{8}{3}n$
HFN(n, n)		$2^{2n}$	$n+2$	$2 \times \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	$\cong n^2 + 3n$

### 3. 임베딩

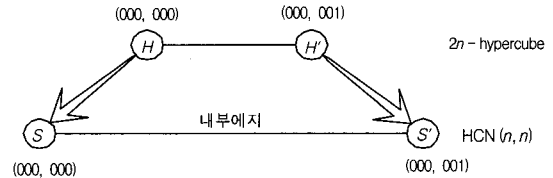
그래프의 임베딩(embedding)은 어떤 그래프  $G$ 가 다른 그래프  $H$  구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프  $G$ 의 그래프  $H$ 에 대한 임베딩  $f$ 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍  $(\phi, \rho)$ 을 말한다.  $\phi$ 는  $G$ 의 정점 집합  $V(G)$ 를  $H$ 의 정점 집합  $V(H)$ 에 대응시키는 함수이고,  $\rho$ 는  $G$ 의 에지  $e=(v, w)$ 에서  $\phi(v)$ 와  $\phi(w)$ 를 잇는  $H$ 상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장을(dilation), 밀집을(congestion), 확장율(expansion)이 사용되고 있다. 그래프  $G$ 의 에지  $e$ 의 연장은  $H$ 상에서의 경로  $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩  $f$ 의 연장은  $G$ 의 모든 에지의 연장에서 최대값이다. 그래프  $H$ 의 에지  $e'$ 의 밀집율은  $e'$ 에 포함되는  $\rho(e)$ 의 개수를 말하고, 임베딩  $f$ 의 밀집율은  $H$ 의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 임베딩  $f$ 의 확장율은  $G$ 의 정점의 개수에 대한  $H$ 의 정점의 개수의 비를 말한다.

**정리 1 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 은 HCN(n, n)에 연장을 3, 확장율 1로 임베딩 가능하다.

**증명 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H=(h_1 h_2 \dots h_n h_{n+1} \dots h_{2n})$ 와  $H'=(h'_1 h'_2 \dots h'_n h'_{n+1} \dots h'_{2n})$ 는  $i$ -차원 에지( $1 \leq i \leq 2n$ )에 의해 인접한 노드라 가정하고, HCN(n, n)의 노드  $S=(s_1 s_2 \dots s_n, s_{n+1} \dots s_{2n})$ ,  $S'=(s'_1 s'_2 \dots s'_n, s'_{n+1} \dots s'_{2n})$ 라 가정하자. 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 를 HCN(n, n)의 노드  $S$ 로 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H'$ 를 HCN(n, n)의 노드  $S'$ 로 사상했을 때, HCN(n, n)의 노드  $S$ 의 비트스트링에서  $S'$ 의 비트스트링을 연결하는데 적용되는 HCN(n, n)의 에지의 개수를 통하여 연장을 분석한다. 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와 인접한  $H'$ 의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

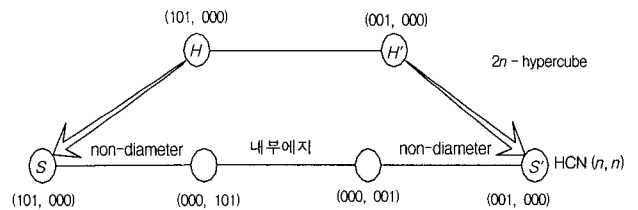
경우 1 :  $h_1 h_2 \dots h_n = h'_1 h'_2 \dots h'_n$ 이고  $h_{n+1} \dots h_{2n} \neq h'_{n+1} \dots h'_{2n}$  일 때 : 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 가 사상된 HCN(n, n)의 노드  $S$ 의 비트스트링은  $(s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n, s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n})$ 이고, 노드  $H'$ 가 사상된 노드  $S'$ 의 비트스트링은  $(s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n, s_{n+1} \dots \overline{s_j} \dots s_{2n})$ 이다( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ). 노드

$S$ 와  $S'$ 의 비트스트링에서 오직  $j$  번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드  $S$ 와  $S'$ 는 HCN(n, n)의 동일한 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, HCN(n, n)의 정의에 의해 노드  $S$ 와  $S'$ 는 서로 인접한 노드이다. 따라서 노드  $S$ 와  $S'$ 는 하나의 내부 에지로 연결되어 있으므로,  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 를 HCN(n, n)의 노드  $S$ 와  $S'$ 에 각각 사상할 때 연장을 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다.



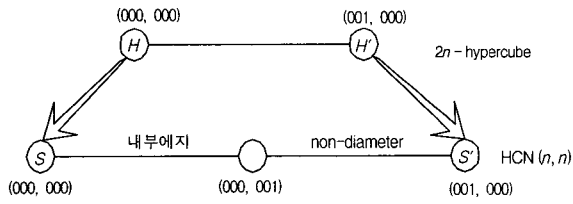
(그림 4) 경우 1

경우 2 :  $h_1 h_2 \dots h_n \neq h'_1 h'_2 \dots h'_n$  일 때 : 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 가 사상된 HCN(n, n)의 노드  $S$ 의 비트스트링은  $(s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n, s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n})$ 이고, 노드  $H'$ 가 사상된 노드  $S'$ 의 비트스트링은  $(s_1 s_2 \dots \overline{s_i} \dots s_n, s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n})$ 이다( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ). 노드  $S$ 와  $S'$ 의 비트스트링에서  $i$  번째에 있는 비트만 보수 관계이므로  $S$ 와  $S'$ 는 HCN(n, n)의 서로 다른 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있다. 사상된 HCN(n, n)의 노드  $(s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n, s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n})$ 를 non-diameter link에 의해  $(s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n}, s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n)$ 에 연결한다. 연결된 노드  $(s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n}, s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n)$ 를 모듈 내부에 있는 노드  $(s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n}, s_1 s_2 \dots \overline{s_i} \dots s_n)$ 에 연결한다. 연결된 노드  $(s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n}, s_1 s_2 \dots \overline{s_i} \dots s_n)$ 를 non-diameter link에 의해  $(s_1 s_2 \dots \overline{s_i} \dots s_n, s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n})$ 에 연결한다. 따라서  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 를 HCN(n, n)의 노드  $S$ 와  $S'$ 에 각각 사상할 때 연장을 3에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



(그림 5) 경우 2

경우 2.1 :  $h_1 h_2 \dots h_n \neq h'_1 h'_2 \dots h'_n$ 이고  $h_1 h_2 \dots h_n = h_{n+1} \dots h_{2n}$ 일 때 : 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 가 사상된 HCN(n, n)의 노드  $S$ 의 비트스트링은  $(s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n, s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n})$ 이고, 노드  $H'$ 가 사상된 노드  $S'$ 의 비트스트링은  $(s_1 s_2 \dots \overline{s_i} \dots s_n, s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n})$ 이며( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ), 사상된 노드  $S$ 의 비트스트링 중  $s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n = s_{n+1} \dots s_j \dots s_{2n}$ 이므로 경우 2에서 처음 연결된 non-diameter link를 사용할 필요가 없다. 그러므로 이 경우는 연장을 2이다.



(그림 6) 경우 2.1

이상의 2가지 경우에서 증명한 바와 같이 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 은  $HCN(n, n)$ 에 연장을 3으로 임베딩 가능하다. □

**따름정리 2 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의  $HCN(n, n)$ 에 대한 임베딩의 평균 연장은 2 이하이다.

**증명 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 을  $HCN(n, n)$ 에 임베딩 했을 때, 임베딩의 평균 연장은 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 모든 에지의 연장을 합하여 전체 에지 개수로 나눈 값이다. 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드는  $HCN(n, n)$ 의 노드와 일-대-일 사상되고, 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 에지 중 연장을 1을 갖는 에지는  $n2^{2n-1}$ 개이고, 연장을 2를 갖는 에지는  $n2^n$ 개이고, 연장을 3을 갖는 에지는  $2^n \times 2^{2n-1} - n \times 2^{2n-1} - n \times 2^n$ 이라는 것을 정리 1에 의해 알 수 있다.  $Q_{2n}$ 의 전체 에지 개수는  $k = 2n \times 2^{2n-1}$ 이다. 따라서 평균 연장은  $(n \times 2^{2n-1} + 2n \times 2^n + 3 \times (2^n \times 2^{2n-1} - n \times 2^{2n-1} - n \times 2^n)) / k$  즉,  $\frac{4 \times 2^{2n-1} - 2^n}{2 \times 2^{2n-1}} = 2 - \frac{1}{2^n}$  이므로, 평균 연장은 2보다 적은 값을 갖는다. □

**정리 3 :**  $HCN(n, n)$ 을  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 에 임베딩 하는 비용은  $O(n)$ 이다.

**증명 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H = (h_1 h_2 \dots h_n h_{n+1} \dots h_{2n})$ 와  $H' = (h'_1 h'_2 \dots h'_n h'_{n+1} \dots h'_{2n})$ 는  $i$ -차원 에지 ( $1 \leq i \leq 2n$ )에 의해 인접한 노드라 가정하고,  $HCN(n, n)$ 의 노드  $S = (s_1 s_2 \dots s_n, s_{n+1} \dots s_{2n})$ ,  $S' = (s'_1 s'_2 \dots s'_n, s'_{n+1} \dots s'_{2n})$ 라 가정하자.  $HCN(n, n)$ 의 노드  $S$ 를  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 로  $HCN(n, n)$ 의 노드  $S'$ 를  $Q_{2n}$ 의 노드  $H'$ 로 사상했을 때,  $H$ 의 비트스트링에서  $H'$ 의 비트스트링을 생성하는데 적용되는 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 에지의 개수를 통하여 연장을 분석한다. 노드  $S$ 와 인접한  $S'$ 의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

경우 1.  $s_1 s_2 \dots s_n = s'_1 s'_2 \dots s'_n$ 이고  $s_{n+1} \dots s_{2n} \neq s'_{n+1} \dots s'_{2n}$ 일 때 :  $HCN(n, n)$ 의 노드  $S$ 가 사상된  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 의 비트스트링은  $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} \dots h_j \dots h_{2n})$ 이고, 노드  $S'$ 가 사상된 노드  $H'$ 의 비트스트링은  $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} \dots \bar{h}_j \dots h_{2n})$ 이다 ( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ). 노드  $H$ 와  $H'$ 의 비트스트링에서 오직  $j$ 번째에 있는 한 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드  $H$ 와  $H'$ 는  $Q_{2n}$ 의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고,  $Q_{2n}$ 의 정의에 의해 노드  $H$

와  $H'$ 는 서로 인접한 노드이다. 따라서  $HCN(n, n)$ 의 노드  $S$ 와  $S'$ 를  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 에 각각 사상할 때 연장을 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

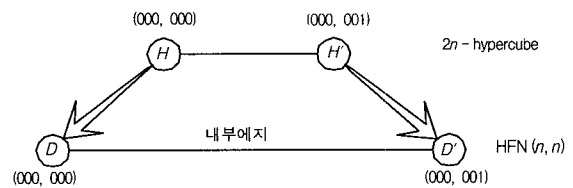
경우 2.  $s_1 s_2 \dots s_n \neq s'_1 s'_2 \dots s'_n$  일 때 :  $HCN(n, n)$ 의 노드  $S$ 가 사상된  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 의 비트스트링은  $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} \dots h_j \dots h_{2n})$ 이고, 노드  $S'$ 가 사상된 노드  $H'$ 의 비트스트링은  $(h'_1 h'_2 \dots h'_i \dots h'_n h'_{n+1} \dots h'_j \dots h'_{2n})$ 이다 ( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ).  $Q_{2n}$ 의 정의에 의해 노드  $H$ 와  $H'$ 가 연결되기 위해서는 서로 다른 비트스트링만큼의 에지가 필요하다. 노드  $H$ 와  $H'$ 의 비트스트링은  $2n$ 개이므로 노드  $H$ 와  $H'$ 가 보수관계일 때 두 노드의 연결을 위해 필요한 에지의 개수는  $2n$ 이다. 따라서  $HCN(n, n)$ 의 노드  $S$ 와  $S'$ 를  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 에 각각 사상할 때 연장을  $2n$ 으로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

이상의 2가지 경우에서 증명한 바와 같이  $HCN(n, n)$ 을  $Q_{2n}$ 으로 임베딩 했을 때 연장은  $O(n)$ 이다. □

**정리 4 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 은  $HFN(n, n)$ 에 연장을 3으로 임베딩 가능하다.

**증명 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H = (h_1 h_2 \dots h_n h_{n+1} \dots h_{2n})$ 와  $H' = (h'_1 h'_2 \dots h'_n h'_{n+1} \dots h'_{2n})$ 는  $i$ -차원 에지 ( $1 \leq i \leq 2n$ )에 의해 인접한 노드라 가정하고,  $HFN(n, n)$ 의 노드  $D = (d_1 d_2 \dots d_n, d_{n+1} \dots d_{2n})$ ,  $D' = (d'_1 d'_2 \dots d'_n, d'_{n+1} \dots d'_{2n})$ 라 가정하자. 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 를  $HFN(n, n)$ 의 노드  $D$ 로  $Q_{2n}$ 의 노드  $H'$ 를  $HFN(n, n)$ 의 노드  $D'$ 로 사상했을 때,  $D$ 의 비트스트링에서  $D'$ 의 비트스트링을 연결하는데 적용되는  $HFN(n, n)$ 의 에지의 개수를 통하여 연장을 분석한다. 노드  $H$ 와 인접한  $H'$ 의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

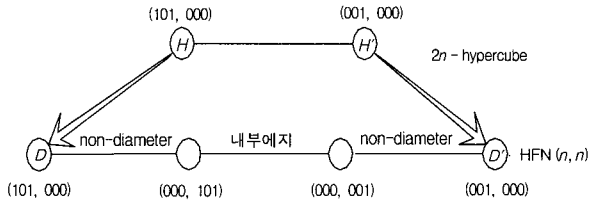
경우 1.  $h_1 h_2 \dots h_n = h'_1 h'_2 \dots h'_n$ 이고  $h_{n+1} \dots h_{2n} \neq h'_{n+1} \dots h'_{2n}$ 일 때 : 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 가 사상된  $HFN(n, n)$ 의 노드  $D$ 의 비트스트링은  $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n})$ 이고, 노드  $H'$ 가 사상된 노드  $D'$ 의 비트스트링은  $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_{n+1} \dots \bar{d}_j \dots d_{2n})$ 이다 ( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ). 노드  $D$ 와  $D'$ 의 비트스트링에서 오직  $j$ 번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드  $D$ 와  $D'$ 는  $HFN(n, n)$ 의 동일한 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고,  $HFN(n, n)$ 의 정의에 의해 노드  $D$ 와  $D'$ 는 서로 인접한 노드이다. 따라서 노



(그림 7) 경우 1

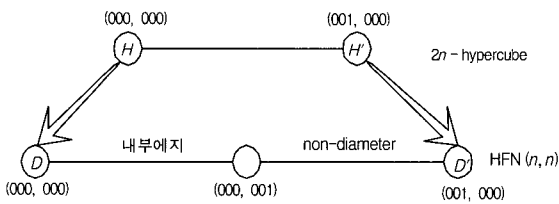
드  $D$ 와  $D'$ 는 하나의 내부 에지로 연결되어 있으므로, 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 를 HFN( $n, n$ )의 노드  $D$ 와  $D'$ 에 각각 사상할 때 연장을 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 2.  $h_1 h_2 \dots h_n \neq h'_1 h'_2 \dots h'_n$  일 때 :  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 가 사상된 HFN( $n, n$ )의 노드  $D$ 의 비트스트링은  $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n})$ 이고, 노드  $H'$ 가 사상된 노드  $D'$ 의 비트스트링은  $(d_1 d_2 \dots \bar{d}_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n})$ 이다 ( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ). 노드  $D$ 와  $D'$ 의 비트스트링에서  $i$ 번째에 있는 비트만 보수관계이므로  $D$ 와  $D'$ 는 HFN( $n, n$ )의 서로 다른 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있다. 사상된 HFN( $n, n$ )의 노드  $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n})$ 를 non-diameter link에 의해  $(d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n}, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n)$ 에 연결한다. 연결된 노드  $(d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n}, d_1 d_2 \dots \bar{d}_i \dots d_n)$ 에 연결한다. 연결된 노드  $(d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n}, d_1 d_2 \dots \bar{d}_i \dots d_n)$ 를 non-diameter link에 의해  $(d_1 d_2 \dots \bar{d}_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n})$ 에 연결한다. 따라서  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 를 HFN( $n, n$ )의 노드  $D$ 와  $D'$ 에 각각 사상할 때 연장을 3에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



(그림 8) 경우 2

경우 2.1  $h_1 h_2 \dots h_n \neq h'_1 h'_2 \dots h'_n$ 이고  $h_1 h_2 \dots h_n = h_{n+1} \dots h_{2n}$ 일 때 :  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 가 사상된 HFN( $n, n$ )의 노드  $D$ 의 비트스트링은  $(d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n})$ 이고, 노드  $H'$ 가 사상된 노드  $D'$ 의 비트스트링은  $(d_1 d_2 \dots \bar{d}_i \dots d_n, d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n})$ 이며 ( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ), 사상된 노드  $D$ 의 비트스트링 중  $d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n = d_{n+1} \dots d_j \dots d_{2n}$ 이므로 경우 2에서 처음 연결된 non-diameter link를 사용할 필요가 없다. 그러므로 이 경우는 연장을 2이다.



(그림 9) 경우 2.1

이상의 2가지 경우에서 증명한 바와 같이  $Q_{2n}$ 은 HFN( $n, n$ )에 연장을 3으로 임베딩 가능하다. □

**따름정리 5 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 HFN( $n, n$ )에 대한 임베딩의 평균 연장율은 2 이하이다.

**증명 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 을 HFN( $n, n$ )에 임베딩 했을 때, 임베딩의 평균 연장율은  $Q_{2n}$ 의 모든 에지의 연장율을 합하여 전체 에지 개수로 나눈 값이다.  $Q_{2n}$ 의 노드는 HFN( $n, n$ )의 노드와 일-대-일 사상되고,  $Q_{2n}$ 의 에지 중 연장율 1을 갖는 에지는  $n2^{2n-1}$ 개이고, 연장율 2를 갖는 에지는  $n2^n$ 개이고, 나머지 에지  $2^n \times 2^{2n-1} - n \times 2^{2n-1} - n \times 2^n$ 는 연장율 3을 갖는다는 것을 정리 4에 의해 알 수 있다.  $Q_{2n}$ 의 전체 에지 개수는  $k = 2n \times 2^{2n-1}$ 이다. 따라서 평균 연장율은  $(n \times 2^{2n-1} + 2n \times 2^n + 3 \times (2^n \times 2^{2n-1} - n \times 2^{2n-1} - n \times 2^n)) / k$  즉,  $\frac{4 \times 2^{2n-1} - 2^n}{2 \times 2^{2n-1}} = 2 - \frac{1}{2^n}$  이므로 대략 2보다 적은 값을 갖는다. □

**정리 6 :** HFN( $n, n$ )을  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 에 임베딩하는 비용은  $O(n)$ 이다.

**증명 :**  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H = (h_1 h_2 \dots h_n h_{n+1} \dots h_{2n})$ 와  $H' = (h'_1 h'_2 \dots h'_n h'_{n+1} \dots h'_{2n})$ 는  $i$ -차원 에지 ( $1 \leq i \leq 2n$ )에 의해 인접한 노드라 가정하고, HFN( $n, n$ )의 노드  $D = (d_1 d_2 \dots d_n, d_{n+1} \dots d_{2n})$ ,  $D' = (d'_1 d'_2 \dots d'_n, d'_{n+1} \dots d'_{2n})$ 라 가정하자. HFN( $n, n$ )의 노드  $D$ 를 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 로 사상했을 때,  $H$ 의 비트스트링에서  $H'$ 의 비트스트링을 연결하는데 적용되는 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 에지의 개수를 통하여 연장율을 분석한다. 노드  $D$ 와 인접한  $D'$ 의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

경우 1.  $d_1 d_2 \dots d_n = d'_1 d'_2 \dots d'_n$  이고  $d_{n+1} \dots d_{2n} \neq d'_{n+1} \dots d'_{2n}$  일 때 : HFN( $n, n$ )의 노드  $D$ 가 사상된  $2n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 의 비트스트링은  $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} \dots h_j \dots h_{2n})$ 이고, 노드  $D'$ 가 사상된 노드  $H'$ 의 비트스트링은  $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} \dots \bar{h}_j \dots h_{2n})$ 이다 ( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ). 노드  $H$ 와  $H'$ 의 비트스트링에서 오직  $j$  번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드  $H$ 와  $H'$ 는 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고,  $Q_{2n}$ 의 정의에 의해 노드  $H$ 와  $H'$ 는 서로 인접한 노드이다. 따라서 HFN( $n, n$ )의 노드  $D$ 와  $D'$ 를  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 에 각각 사상할 때 연장을 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 2.  $d_1 d_2 \dots d_n = d'_1 d'_2 \dots d'_n$  이고  $d_{n+1} \dots d_{2n} = \overline{d'_{n+1} \dots d'_{2n}}$  일 때 : HFN( $n, n$ )의 노드  $D$ 가 사상된 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 의 비트스트링은  $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} \dots h_j \dots h_{2n})$ 이고, 노드  $D'$ 가 사상된 노드  $H'$ 의 비트스트링은  $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n \overline{h_{n+1} \dots h_j \dots h_{2n}})$ 이다 ( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ). 노드  $H$ 와  $H'$ 의 비트스트링에서 1부터  $n$ 번째 비트스트링이 같으므로, 노

드  $H$ 와  $H'$ 는 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고,  $Q_{2n}$ 의 정의에 의해 노드  $H$ 와  $H'$ 가 연결되기 위해서는 서로 다른 비트스트링 만큼의 에지가 필요하다. 노드  $H$ 와  $H'$ 의 비트스트링에서  $n+1$ 부터  $2n$ 번째 비트스트링이 보수관계에 있으므로  $H$ 와  $H'$ 가 연결되기 위해서는  $n$ 개의 에지가 필요하다. 그러므로  $HFN(n, n)$ 의 노드  $D$ 와  $D'$ 를  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 에 각각 사상할 때 연장을  $n$ 으로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 3.  $d_1 d_2 \dots d_n \neq d'_1 d'_2 \dots d'_n$  일 때 :  $HFN(n, n)$ 의 노드  $D$ 가 사상된  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 의 비트스트링은  $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} \dots h_j \dots h_{2n})$ 이고, 노드  $D'$ 가 사상된 노드  $H'$ 의 비트스트링은  $(h'_1 h'_2 \dots h'_i \dots h'_n h'_{n+1} \dots h'_j \dots h'_{2n})$ 이다 ( $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$ ).  $Q_{2n}$ 의 정의에 의해 노드  $H$ 와  $H'$ 가 연결되기 위해서는 서로 다른 비트스트링 만큼의 에지가 필요하다. 노드  $H$ 와  $H'$ 가 서로 다른 모듈에 위치해 있고,  $h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n$ 과  $h_{n+1} \dots h_j \dots h_{2n}$ 가 보수관계인 경우 가장 많은 수의 에지를 필요로 한다. 노드  $H$ 와  $H'$ 의 비트스트링은  $2n$ 개이므로 두 노드의 연결을 위해 필요한 에지의 개수는  $2n$ 이다. 그러므로  $HFN(n, n)$ 의 노드  $D$ 와  $D'$ 를 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 의 노드  $H$ 와  $H'$ 에 각각 사상할 때 연장을  $2n$ 으로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

이상의 3가지 경우에서 증명한 바와 같이  $HFN(n, n)$ 을 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 에 임베딩 하기 위해 필요한 비용은  $O(n)$ 이다. □

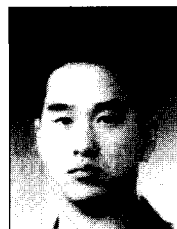
#### 4. 결 론

본 논문에서는 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된  $HCN(n, n)$  및  $HFN(n, n)$ 과 하이퍼큐브  $Q_{2n}$  사이의 임베딩 방법을 제시하고, 그 결과를 이용하여 연장을 분석하였다. 임베딩 결과는 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 를  $HCN(n, n)$ 과  $HFN(n, n)$ 에 연장을 3, 확장율 1로 임베딩 가능함을 보였고, 평균 연장이 2 이하임을 보였다. 또한,  $HCN(n, n)$ 과  $HFN(n, n)$ 을 하이퍼큐브  $Q_{2n}$ 에 임베딩하는 비용이  $O(n)$ 임을 보였다. 이러한 결과는 하이퍼큐브에서 이미 개발된 여러 가지 알고리즘을  $HCN(n, n)$ 과  $HFN(n, n)$ 에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미한다.

#### 참 고 문 헌

[1] S. B. Akers, and B. Krishnamurthy, "A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Network," IEEE Trans. Comput., Vol.38, No.4, pp.555-565, 1989.  
 [2] K. W. Doty, "New Designs for Dense Processor Interconnection Networks," IEEE Trans. Computer, Vol.c-33, No.5, May, 1984.  
 [3] D. R. Duh, G. H. Chen, and J. F. Fang, "Algorithms and Properties of a New Two-Level Network with Folded Hypercubes as Basic Modules," IEEE Trans. Parallel Dis-

tributed syst., Vol.6, No.7, pp.714-723, 1995.  
 [4] A. El-Amawy and S. Latifi, "Properties and Performance of Folded Hypercubes," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.2, No.1, pp.31-42, 1991.  
 [5] T-Y. Feng, "A Survey of Interconnection Networks," IEEE computer, pp.12-27, December, 1981.  
 [6] K. Ghose, and K. R. Desai, "Hierarchical Cubic Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.6, No. 4, pp.427-436, 1995.  
 [7] F. Harary, J. P. Hayes, and H-J. Wu, "A Survey of the Theory of Hypercube Graphs," Comput. Math. Appl., Vol. 15, pp.277-289, 1988.  
 [8] D. A. Reed, and R. M. Fujimoto, Multicomputer Networks : Message-Based Parallel Processing, MIT Press, 1987.  
 [9] A. S. Vaidya, P. S. N. Rao and S. R. Shankar, "A Class of Hypercube-like Networks," Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pp.800-803, Dec., 1993.  
 [10] A. Y. Wu, "Embedding of Tree Networks into Hypercubes," J. Parallel and Distributed Computing, Vol.2, pp.238-249, 1985.  
 [11] S-K. Yun, and K-H. Park, "Comments on 'Hierarchical Cubic Networks'," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.9, No.4, pp.410-414, 1998.  
 [12] J. P. Hayes and T. N. Mudge, "Hypercube Supercubes," Proc. IEEE, Vol.17(12), pp.1829-1841, Dec., 1989.  
 [13] L. W. Tucker and G. G. Robertson, "Architecture and Application of the Connection Machine," IEEE Comput., Vol 21, pp.26-38, Aug., 1988.



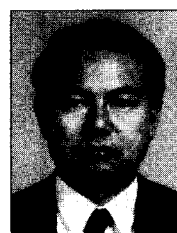
#### 김 종 석

e-mail : rockhee@sunchon.ac.kr  
 1995년 순천대학교 전자계산학과 (학사)  
 2001년 순천대학교 컴퓨터과학과 (석사)  
 2001년~현재 순천대학교 컴퓨터과학과 박사과정  
 관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 그래프이론, 상호연결망, 계산이론



#### 이 형 옥

e-mail : oklee@sunchon.ac.kr  
 1994년 순천대학교 전자계산학과(학사)  
 1996년 전남대학교 전산통계학과(석사)  
 1999년 전남대학교 전산통계학과(이학박사)  
 1999년~2002년 한국전산원 선임연구원  
 2002년~현재 순천대학교 컴퓨터교육과 전임강사  
 관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 그래프이론, 상호연결망, 계산이론



#### 허 영 남

e-mail : hyn@sunchon.ac.kr  
 1967년 공주사범대학 물리학과(학사)  
 1982년 조선대학교 전자공학과(석사)  
 1996년 조선대학교 전자계산학과(이학박사)  
 1983년~현재 순천대학교 컴퓨터과학과 교수  
 관심분야 : 영상처리, 병렬 및 분산처리