

다항식 변형률 분포함수를 이용한 철근콘크리트 인장부재의 균열 해석

Cracking Analysis of RC Tension Members Using Polynomial Strain Distribution Function

곽 효경†

Kwak, Hyo-Gyoung

(논문접수일 : 2001년 4월 4일)

송 종영*

Song, Jong-Young

(심사종료일 : 2002년 3월 7일)

김 한수**

Kim, Han-Soo

요지

본 논문에서는 축방향 인장 부재의 균열거동과 철근콘크리트 부재의 인장강화현상을 고려하기 위한 새로운 해석적 기법을 제시하였다. 균열 후 거동 규명을 위하여 부착응력-슬립의 관계나 부착 응력의 분포를 가정하는 기존의 해석방법과는 달리, 철근과 콘크리트의 변형률 분포 함수를 다항식으로 가정하여, 이를 바탕으로 일축 인장부재의 균열 해석 기법을 구성하였다. 제시한 균열 해석모델은 기존의 해석기법과 비교하여, 철근콘크리트 구조물의 유한요소해석을 위한 균열 후의 평균응력-변형률 관계를 정의하거나, 부재의 길이방향으로 철근과 콘크리트가 분담하는 하중 및 슬립량 산정시 매우 효율적이다. 제안된 모델을 이용하여 얻어진 균열하중과 보강철근의 신장을 값을 다른 해석기법 및 실험값과 비교한 결과 만족할만한 정확도를 보여주었다.

핵심용어 : 균열강도, 인장강화현상, 변형률 분포함수, 신장을, 인장부재

Abstract

In this paper, an analytical model which can simulate the post-cracking behavior and tension stiffening effect in a reinforced concrete(RC) tension member is proposed. Unlike the classical approaches using the bond stress-slip relationship or the assumed bond stress distribution, the tension stiffening effect at post-cracking stage is quantified on the basis of polynomial strain distribution functions of steel and concrete, and its contribution is implemented into the reinforcing steel. The introduced model can be effectively used in constructing the stress-strain curve of concrete at post-cracking stage, and the loads carried by concrete and reinforcing steel along the member axis can be directly evaluated on the basis of the introduced model. In advance, the prediction of cracking loads and elongations of reinforced steel using the introduced model shows good agreement with results from the previous analytical studies and experimental data.

Keywords : crack strength, tension stiffening effect, strain distribution function, elongation, tension member

† 책임저자, 정희원 · 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 부교수
전화: 042-869-3621; Fax: 042-869-3610
E-mail: khg@kaist.ac.kr

* 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 연수연구원

** 현대건설 기술연구소 책임 연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 6월 29일까지 본 학회에
보내주시면 2002년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

콘크리트는 재료적인 특성상 인장에 매우 취약하기 때문에 과도한 인장력을 받는 경우 균열이 유발되므로 철근 등을 도입하여 인장 부재나 휨 부재에 필요한 인장 저항력을 확보하게 된다. 일반적으로 콘크리트의 인장에 대한 저항력은 부재의 극한강도에 큰 영향을 미치지 않는 관계로 그 영향이 무시되어 왔으나, 근자에 들어 사용 중에 과다한 처짐이나, 균열 등 구조물의 사용성 문제가 중요시됨에 따라 철근콘크리트의 인장 균열 거동을 고려한 보다 정밀한 해석이 요구되고 있다. 철근콘크리트 부재의 균열 이후의 거동 특성은 콘크리트의 인장강도, 철근의 형상과 역학적 성질, 정착길이, 괴복두께, 배근간격 등 부착과 관련한 다양한 인자에 의해 영향을 받게 되는데, 이러한 철근콘크리트 구조물의 부착 메카니즘을 규명하기 위한 실험적, 해석적 연구가 많은 연구자들에 의해 수행되어 오고 있다.^{1)~4)} 초기에는 인장강화효과(tension stiffening effect)의 주요한 영향인자인 부착특성 규명에 관한 실험적 연구와 더불어, 부착 메카니즘을 토대로 한 해석적 방법들이 주를 이루었으나,^{1),3)} 최근에는 비선형 파괴역학 개념을 이용한 보다 발전된 해석모델들이 개발되고 있다.²⁾ 나아가 실험과 해석적 연구를 토대로 규명된 부착슬립 거동은 철근콘크리트 구조물의 균열 후 동반되는 인장 강화효과를 모사하기 위한 수치해석 모델 개발시 유용한 자료로 활용되어진다.

전술한 바와 같이 구조물의 사용성 확보를 위해서는 균열 발생 후 구조물의 정확한 거동 예측이 요구되는데, 현재 널리 사용되고 있는 축방향 철근콘크리트 부재의 균열 거동 예측을 위한 해석적 방법에는 유한요소법을 직접 적용하는 방법⁵⁾과 균열 이후의 콘크리트 인장응력-변형률 관계를 규정하는 방법^{1),3),4),6),7)}으로 크게 구분할 수 있다. 특히 콘크리트 응력-변형률 관계를 규정하는 후자의 경우, 철근이나 콘크리트의 탄성계수를 균열이 진행되는 동안 변형률의 값에 따라 변화시키는 방법⁷⁾과, 부착응력-슬립 또는 부착응력의 분포를 가정하여 이를 균열과 균열사이에서의 힘의 평형관계와 적합조건에 적용시켜, 균열 이후의 거동을 예측하는 해석적 방법^{1),3),4),6)}으로 나눌 수 있다. 그러나 부착응력 분포함수(bond stress distribution function)를 가정하는 경우, 부재의 축방향을 따라 콘크리트와 철근이 분담하는 하중 산정과 철근의 신장률, 슬립 등을 계산

하기 위한 일련의 미분, 적분 과정이 용이하지 않은 단점이 있다.

본 논문에서는 부착응력의 분포함수를 가정하는 기존 방법과는 달리, 균열이 발생한 후 부착 메카니즘에 의해 급격히 변하는 콘크리트와 철근의 변형률 분포함수(strain distribution function)를 다항식으로 제안하여, 이를 바탕으로 보다 간단하고 적용이 용이한 균열 거동 예측모델을 구성하고자 한다. 이를 위해 철근과 콘크리트의 변형률 분포함수를 정의하는 다항식의 차수를 균열 전, 후의 에너지 평형관계로부터 유도하였으며 제안된 균열 해석모델의 타당성을 검증하기 위해 다양한 축방향 인장부재에 대한 수치해석을 수행하여 균열강도, 철근의 신장을 등을 실험데이터 및 해석값과 비교, 검토하였다. 또한 축력이 증가함에 따라 순차적으로 발생하는 균열 단계의 철근과 콘크리트 변형률 및 슬립량 등을 부재의 길이방향으로 나타내어 인장부재의 점진적인 균열 발생 거동을 분석하였다.

2. 해석 모델의 기본가정

축력을 받아 균열이 발생한 철근콘크리트 인장부재의 거동은 그림 1에서 보는 바와 같이, 철근과 콘크리트 사이에 작용하는 부착응력에 기인한 인장강화효과(tension stiffening effect) 때문에, 단면에 균열이 발생하여 철근만 인장력에 저항하는 경우(그림의 STATE II)와 균열이 발생하지 않아 철근과 콘크리트의 전체면적이 인장력에 저항하는 경우(그림의 STATE I)의 중간 영역에 존재하게 된다. 이와 같이 비균열상태와 완전균열상태 사이에 위치하는 철근콘크리트 축부재의

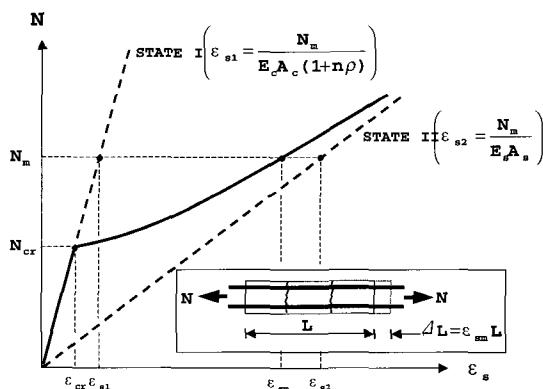


그림 1 철근콘크리트 부재의 인장강화현상

균열거동을 해석하는 방법으로는 CEB-FIP 규준⁸⁾에서 채택하고 있는 균열 내 철근의 평균변형률(ε_{sm})을 이용한 접근방법과 ACI 규준⁵⁾에서 채택하고 있는 유효 단면이차모멘트 방법과 유사한 콘크리트의 유효 단면을 사용한 접근방법으로 크게 구분할 수 있다.

그러나 유효 단면을 사용하는 후자의 경우 계산법이 간단하고 실용적이지만, 이론적인 근거가 미약하며 유효 단면을 적용하기 위한 철근콘크리트의 재료 구성 모델로의 전환이 용이하지 않은 단점이 있다. 특히, 최근에 들어 콘크리트 구조물의 비선형 해석시 널리 사용되고 있는 수정 압축영역 이론(modified compression field theory)^{9),10)}이나 연화 트러스모델 이론(softened truss model theory)²⁾은 평균 응력-변형률 개념을 토대로 균열과 균열 사이에 존재하는 콘크리트의 인장 강화효과를 정량적으로 고려하도록 요구하고 있다.

따라서, 본 논문에서도 인장강화효과를 고려하기 위한 해석모델의 개발시 적용과 확장이 용이하도록 하기 위해 다항식 변형률 분포함수를 이용한 평균 응력-변형률 개념을 토대로 축부재의 균열 후 거동 예측 모델을 구성하였으며, 다음의 기본 가정이 사용되었다. (1) 완전균열상태(STATE II)에서 철근은 인장과 압축에 대해 모두 저항할 수 있는 반면, 콘크리트는 압축에 대해서만 저항할 수 있다. (2) 비균열상태(STATE I)에서는 철근과 콘크리트 모두 인장과 압축에 대해 저항할 수 있다. (3) 완전균열상태와 비균열상태 사이에 존재하는 균열 후 철근 콘크리트 축부재는 완전균열상태와 비균열상태의 중간 거동을 나타낸다.

3. 축방향 인장부재의 부착거동

3.1 축방향 인장부재의 지배방정식

그림 2에서 보는 바와 같이 축방향 부재에 인장력 N 이 작용할 때 기본 가정으로부터 부재의 양 끝단에서는 완전균열 상태(STATE II)를 나타내므로 철근의 변형률이 ε_s 가 되며, 부착 전달길이 l_t 만큼 떨어진 지점에서는 철근과 콘크리트가 일체 거동을 하므로 비균열상태(STATE I)의 변형률인 ε_{sl} 이 된다고 가정할 수 있다 (그림 1 참조). 이 때 철근과 콘크리트의 변형률 차이(strain difference)는 그림에서 보는 바와 같이 부재 단부에서는 ε_s 가 되며 부착 전달길이 l_t 지점에서는 0의 값을 갖는다. 또한, 국부 슬립량 $w(x)$ 는

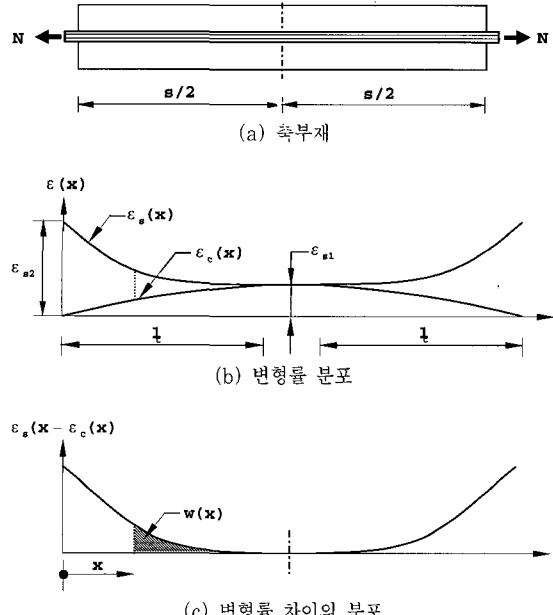


그림 2 축방향 부재의 거동

다음 식(1)과 같이 끝단에서 x 만큼 떨어진 지점에서부터 부재 중앙점($S/2$)까지, 철근과 콘크리트의 전체 변형률 차이의 합으로써 정의되며, 그림 2에서 빗금친 영역의 면적으로 나타낼 수 있다.

$$w(x) = \int_x^{S/2} (\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)) dx \quad (1)$$

여기서, S 는 균열 간격을, $\varepsilon_s(x)$ 는 철근의 변형률 분포함수를, $\varepsilon_c(x)$ 는 콘크리트의 변형률 분포함수를 각각 의미한다.

나아가 작용하는 외력과 철근 및 콘크리트에 의한 저항력과의 힘의 평형관계와 식(1)의 관계식을 토대로 널리 알려진 다음의 축방향 인장부재에 대한 부착응력-슬립의 지배방정식을 구할 수 있다.¹⁾

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{(1+n\rho)\Sigma_o}{E_s A_s} f_b(x) = 0 \quad (2)$$

여기서, $w(x)$ 는 슬립량의 분포를, E_s 는 철근의 탄성계수를, A_s 는 철근의 단면적을, n 은 철근과 콘크리트의 탄성계수비를, ρ 는 철근비를, Σ_o 는 철근의 원주길이를, $f_b(x)$ 는 부착응력을 각각 의미한다.

앞에서 언급한 바와 같이 기존의 해석적 연구는 식(2)와 같이 유도되는 부착응력-슬립 지배방정식의 해를 부착응력 $f_b(x)$ 와 슬립 $w(x)$ 와의 관계를 가정하여 구하거나 부착응력의 분포를 다양한 함수로 가정한 후 균열 면과 균열과 균열사이에 위치한 콘크리트 중앙점에서의 경계조건을 토대로 구하게 된다. 이러한 방법에 의해 산정된 부재의 길이 방향 슬립량 $w(x)$ 와 식(2)를 구성하면서 사용한 평형방정식을 이용하여 순차적으로 철근과 콘크리트의 변형률, 부착응력을 각각 구하게 된다. 그러나 이와 같이 부착응력 분포함수를 가정하는 경우, 부재의 길이방향으로 철근과 콘크리트가 분담하는 하중을 산정하기 위한 일련의 미분, 적분과정이 용이하지 않을 뿐만 아니라, 최대 부착응력이 발생하는 위치가 실제 실험 결과와 일치하지 않는 등 축방향 부재의 균열거동을 효과적으로 모사하는데 있어 한계점을 갖는다.⁴⁾ 따라서 본 논문에서는 이러한 해석상의 어려움을 해결하기 위해 철근콘크리트의 부착응력-슬립 관계를 이용하지 않고, 균열 후 철근과 콘크리트의 변형률 분포함수를 이용하는 새로운 해석기법을 제시하고자 한다.

3.2 제안된 모델

3.2.1 철근과 콘크리트의 변형률 분포함수

그림 3에서 보는 바와 같이, 축방향 부재에 인장력 N 이 작용하게 되면 균열발생 전에 길이를 따라 철근과 콘크리트에서 동일한 값 (ε_{sl})을 나타내던 변형률 분포가 균열발생 이후에는 서로 다른 분포를 나타내게 된다. 즉, 부착 전달길이 l_t 내에 존재하는 철근과 콘크리트의 변형률 분포는 기본가정에 의해 균열면인 양끝단에서 철근의 변형률은 ε_s 를, 콘크리트의 변형률은 0(zero)을 각각 나타내게 되며, 부착 전달길이 l_t 만큼 떨어진 지점에서 부재의 중앙점인 $S/2$ 까지는 비균열단 면으로써 철근과 콘크리트에서 동일한 변형률인 ε_{sl} 을 나타내게 된다.

또한, 기본가정을 토대로 완전균열상태의 변형률은 $\varepsilon_s = N/(A_s E_s)$, 비균열상태의 변형률은 $\varepsilon_{sl} = N/(A_s E_s + A_c E_c)$ 과 같이 각각 산정된다. 일반적으로 철근과 콘크리트의 탄성계수와 면적비의 곱으로 이루어지는 일축 인장부재의 면적변수(area parameter) $n\rho$ 값은 0.02~0.5 범위의 값을 갖으며,¹⁾ 이 때 균열 이후 콘크리트 변형률은 철근에 비해 상대적으로 작은 변화폭

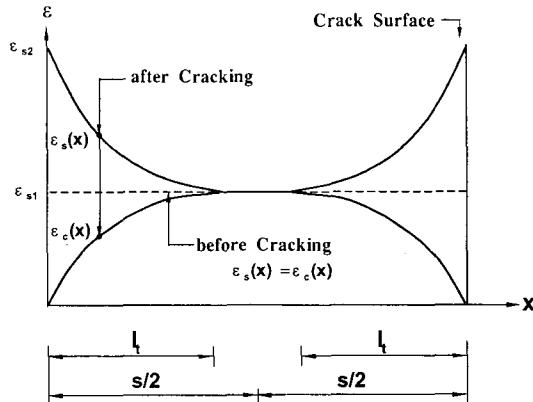


그림 3 균열 전, 후의 변형률 분포 변화

을 나타내게 된다. 따라서 본 논문에서는 부착 전달길이 l_t 내에서 콘크리트의 변형률 분포를 n_c 차의 다항식으로 가정하였으며, 힘의 평형관계로부터 철근의 변형률 분포함수를 식(3)과 같이 콘크리트의 변형률 분포함수로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_s - \frac{1}{n\rho} \varepsilon_c(x) \quad (3)$$

$$\varepsilon_c(x) = \varepsilon_{sl} \left(1 - \left(\frac{l_t - x}{l_t} \right)^{n_c} \right) : x \leq l_t$$

$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_c(x) = \varepsilon_{sl} : l_t \leq x \leq S/2 \quad (4)$$

여기서 s 는 균열 간격을, $\varepsilon_s(x)$ 는 철근의 변형률 분포함수를, $\varepsilon_c(x)$ 는 콘크리트의 변형률 분포함수를, l_t 는 부착 전달길이를 각각 의미한다.

한편, 부착 전달길이 l_t 는 하중증분에 따라 철근의 길이방향으로 측정된 철근 변형률에 관한 실험 결과를 토대로 Somayaji 등이 제시한, 다음의 가해진 하중과 전달길이의 선형 관계로부터 결정할 수 있다.³⁾

$$l_t = K_p \frac{N_C}{\Sigma_o} \quad (5)$$

여기서 K_p 는 인발시험으로부터 구해지는 상수이며, 본 논문에서는 Houde 등의 실험결과¹¹⁾의 평균값인 $1/385 \text{in}^2/\text{lb}(1/27 \text{cm}^2/\text{kgf})$ 을 사용하였다. Σ_o 는 철근의 원주길이이고 N_C 는 비균열상태에서 콘크리트가 분담하는 하중값으로 $N_C = A_c E_c \varepsilon_{sl} = N/(1+n\rho)$ 의 관계식으로

부터 결정할 수 있다.

제안된 변형률을 분포함수의 미지수인 콘크리트의 변형률을 분포함수 $\varepsilon_c(x)$ 의 차수 n_c 는 균열 전, 후의 에너지 변화량이 같다는 에너지 평형관계로부터 구할 수 있다. 즉, 철근의 변형률은 균열 전에는 비균열상태의 변형률인 ε_{sl} 이나, 균열이 발생한 후에는 그림 3에서 보는 바와 같이 균열면에서는 ε_{sl} , 전달길이 l_t 지점에서는 ε_{sl} 이 되며 변형률의 분포는 식(3)과 같은 분포를 갖는다. 반면에 콘크리트의 변형률은 균열면에서 0의 값을, 전달길이 l_t 지점에서는 비균열상태의 변형률값인 ε_{sl} 이며 변형률의 분포는 식(3)과 같이 n_c 차 다항식의 분포를 갖는다. 이 때, 균열 전, 후의 변형에너지 변화량의 합은 0이므로 철근의 변형에너지 변화량 ΔU_s , 콘크리트의 변형에너지 변화량 ΔU_c , 부착에너지 변화량 ΔU_B 는 각각 다음 식(6)을 만족해야 한다.

$$\Delta U_s - \Delta U_c = \Delta U_B \quad (6)$$

여기서

$$\Delta U_s = A_s E_s \int_0^{l_t} (\varepsilon_s(x) - \varepsilon_{sl})^2 dx = \frac{A_s E_s \cdot \varepsilon_{sl}^2 \cdot l_t}{n_c^2 \rho^2 (2n_c + 1)} \quad (7)$$

$$\Delta U_c = A_c E_c \int_0^{l_t} (\varepsilon_{sl} - \varepsilon_c(x))^2 dx = \frac{A_c E_c \cdot \varepsilon_{sl}^2 \cdot l_t}{2n_c + 1} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta U_B &= \int_0^{l_t} \tau_b(x) \Sigma_o w(x) dx = \frac{\Sigma_o \tau_{max}}{w_1^a} \\ &\times \frac{\varepsilon_{sl}^{(1+a)} \cdot l_t^{(1+a)} \cdot l_t}{(n_c + 1)^{(1+a)} \cdot ((n_c + 1)(1 + a) + 1)} \end{aligned} \quad (9)$$

콘크리트의 부착에너지 변화량은 다음 식(10)에 나타낸 바와 같이 CEB-FIP규준에서 제시한 부착응력-슬립 관계식을 이용하였으며, 이때 인장부재의 슬립률 $w(x)$ 는 식(1)을 이용하여 각각 산정하였다.

$$\tau_b = \tau_{max} \cdot (w/w_1)^a \quad (10)$$

여기서, τ_{max} 는 콘크리트의 최대 부착응력을 의미하며, 구속된(confined) 콘크리트이고 부착상태가 양호한 경우에 w_1 은 1mm, a 는 부착응력, 슬립관계를 규정하

는 상수로써 0.4를 사용하였다.¹²⁾

식(7)~(9)에서 보는 바와 같이, 철근과 콘크리트의 에너지 변화량은 콘크리트 변형률 분포함수의 차수인 n_c 의 함수이며, 각각 산정된 에너지 변화량을 식(6)에 대입하면, 가정한 콘크리트의 변형률 분포함수 차수에 대한 n_c 를 결정할 수 있다.

3.2.2 균열강도

일반적으로 균열 이후 콘크리트와 철근 사이의 부착응력에 의하여 콘크리트 응력이 인장 부재 길이의 축방향과 횡방향으로 불규칙하게 분포하기 때문에, 철근콘크리트 인장부재의 균열 강도(f_t)는 무근콘크리트의 인장강도(f_i)와는 다르게 된다. 철근콘크리트 부재의 균열강도는 Blackman과 Somayaji 등의 연구 결과에 의하면,^{3),13)} 실험체의 단면적 대 길이의 비가 작아질수록 증가하는데 Chan 등은 이러한 균열강도 증가 값을 부재 내의 콘크리트 최대응력($\sigma_{c,max}$) 대 평균응력($\sigma_{c,ave}$)의 비를 사용하여 다음과 같이 제안하고 있다.⁶⁾

$$f_t = \alpha \cdot f_i \cdot \left(\frac{\sigma_{c,max}}{\sigma_{c,ave}} \right)^\beta \quad (11)$$

여기서 α 는 0.86~0.98, β 는 0.8~0.9의 값을 갖는다.⁵⁾

본 논문에서는 하중 증가 단계별 균열하중을 예측하는데 있어서, 초기 균열강도는 할렬인장강도를 사용하였으며, 일차 균열이 발생하여 부재길이가 감소함으로 말미암아 증가하는 균열강도는 식(11)을 사용하여 산정하였다. 제안된 콘크리트 변형률 분포함수를 이용하면, 콘크리트 최대응력($\sigma_{c,max}$)은 부착 전달길이에서 단면 중앙점 영역에 이르는 비균열단면의 변형률(ε_{sl})에 콘크리트의 탄성계수를 곱하여 결정되며(그림 3 참조), 콘크리트의 평균응력($\sigma_{c,ave}$)은 다음 식과 같이 산정되는 균열간격 내의 콘크리트 변형률의 평균값인 ε_{cm} 에 탄성계수를 곱하여 구할 수 있다. 즉 축하중이 증가하여 균열의 개수가 증가함에 따라 발생되는 균열간격 S 의 감소로 인해 콘크리트 평균변형률이 감소하게 되며, 이에 따라 콘크리트 평균응력($\sigma_{c,ave}$)도 감소하여 식(11)에 의해 산정되는 균열강도가 증가하게 된다.

$$\varepsilon_{cm} = \frac{2}{S} \int_0^{s/2} \varepsilon_c(x) dx \quad (12)$$

4. 축방향부재의 균열 거동해석

4.1 해석과정

제안된 해석모델을 이용한 축방향 철근콘크리트 인장부재의 균열 거동해석은 가해진 하중과 단면에 관한 데이터가 주어지면 다음과 같은 순서로 해석이 진행된다. 먼저, 축하중을 철근의 항복하중 단계까지 점차적으로 증가시킨다. 다음으로 가해진 외력이 작용할 때 비균열상태, 완전균열상태에서의 변형률 ϵ_1 , ϵ_2 를 각각 구한 뒤에(그림 1 참조), 식(5)를 이용하여 부착 전달 길이 l_t 를 산정한다. 이와 같이 산정된 ϵ_1 , ϵ_2 , l_t 를 식(6)~(9)에 대입하여 콘크리트 변형률 함수의 차수 n_c 를 결정한다. 이 때, 비균열상태의 변형률 ϵ_1 이 인장 변형률 ϵ_i 보다 작으면, 가해진 외력에 의해 균열이 발생하지 않음을 의미하며, 다시 축력을 증가시켜 해석을 반복한다. 만약 비균열상태의 변형률 ϵ_1 이 인장 변형률 ϵ_i 보다 크면, 가해진 외력이 균열을 유발시키는 균열 하중이 되고, 다음 단계에서 균열이 발생하지 않은 부재의 길이는 현 하중단계의 부재길이의 절반 즉, $L = L/2$ 이 된다. 또한 축방향 부재길이 감소로 인한 균열강도 증가값은 식(11)에 의해 계산되는데 본 논문에서는 여러가지 수행된 실험결과를 토대로 α 와 β 는 평균값인 0.92, 0.80을 각각 사용하였다.⁶⁾ 부재길이 감소로 인하여 다음 단계에서 발생하는 균열은 균열과 균열사이의 중심점에서 콘크리트 변형률 ϵ_1 이 증가된 인장강도(\overline{f}_t)에 대응되는 변형률 ϵ_t 를 초과하는 경우에 유발되게 된다. 예제해석을 수행함에 있어 본 논문에서는 축방향부재를 100개의 절점으로 분할하였으며, 각 절점에서 제안된 변형률 분포함수를 이용하여 부재길이 방향의 철근과 콘크리트의 변형률(식(3), (4) 참조), 슬립량(식(1) 참조) 등 축방향 부재의 균열거동과 관련된 변형분포와 이력을 각각 산정하게 된다.

4.2 신장률 및 분담하중의 산정

앞의 해석과정을 통해 임의의 크기를 갖는 축하중 N 에 대응하는 철근과 콘크리트의 변형률이 결정되고 나면, 철근의 신장률(ΔL)은 다음 식(13)과 같이 부재의 전체길이 L 영역의 철근 변형률 $\epsilon_s(x)$ 를 적분하면 얻을 수 있다.

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon_s(x) dx \quad (13)$$

또한 부재의 전 구간에 걸쳐서 정의된 철근과 콘크리트의 변형률 분포를 사용하면, 식(14), (15)와 같이 주어진 하중 단계에서의 철근이 분담하는 하중($N_s(x)$)과, 콘크리트가 분담하는 하중($N_c(x)$)을 손쉽게 산정할 수 있다.

$$N_c(x) = \epsilon_c(x) \cdot E_c A_c \quad (14)$$

$$N_s(x) = \epsilon_s(x) \cdot E_s A_s \quad (15)$$

이와같이 다항식 변형률 분포함수를 이용한 균열 해석기법은 기존의 부착응력-슬립의 관계나 부착응력 분포를 사용하는 방법에 비해, 하중 증가에 따른 부재의 길이 방향에 대한 철근과 콘크리트가 분담하는 하중 변화 및 슬립량 변화를 예측하는데 있어서 매우 효율적임을 알 수 있다. 이는 기존의 해석방법을 사용하는 경우에는 하중 증가단계마다 지배방정식의 해인 슬립량을 구한 뒤 길이방향으로 제안된 부착응력 분포함수에 대한 미, 적분을 반복해야하는 번거로움이 따르나, 본 논문에서 제시된 변형률 분포함수를 사용하는 경우에는 상대적으로 간단한 관계식을 통해 산정된 변형률에 탄성계수와 단면적을 곱하여 줌으로써 손쉽게 구할 수 있기 때문이다.

5. 예제해석

본 논문에서 제안된 축력을 받는 일차원 철근콘크리트 부재에 대한 균열 해석모델의 타당성을 검증하기 위하여 축방향 원형부재에 대한 비교 연구가 이루어졌다. 이 시험체는 직경이 6in(15.24cm)이고, 단면의 중앙에 직경 1in(2.54cm)의 철근이 배근되어 있으며 부재의 길이는 72in(183cm)로써 Gerstle 등⁵⁾의 파괴역학과 이산균열모델을 이용한 유한요소해석과, Chan 등⁶⁾이 부착응력 분포함수를 이용한 수치해석시 개발된 해석모델의 타당성을 검증하기 위해 사용된 바 있다. 시험체에 사용된 재료상수는 콘크리트의 탄성계수 $E_c = 3600\text{ ksi}$ ($252,000\text{ kgf/cm}^2$), 콘크리트의 인장강도 $\sigma_t = 0.20\text{ ksi}$ (14 kgf/cm^2), 철근의 탄성계수 $E_s = 29,000\text{ ksi}$ ($2,030,000\text{ kgf/cm}^2$)의 값을 각각 갖는다.

표 1 균열개수와 외력 관계(단위 : kips*)

균열개수	Gerstle ⁵⁾	Chan ⁶⁾	This Study
1	6.76	6.76	6.77
2	6.82	6.89	6.87
4	7.24	7.67	7.83
8	12.7	11.2	11.4

(* 1kips=454kgf)

표 1에서 보는 바와 같이 본 논문에서 제안된 다항식 변형률 분포함수를 이용한 균열해석 결과가 다른 해석결과와 마찬가지로 균열이 유발되는 하중값을 각 단계별로 비교적 정확하게 예측하고 있음을 알 수 있다. 또한 그림 4에 나타낸 철근의 응력과 신장을 곡선에서 보는 바와 같이 실험값과도 잘 일치하는 결과를 나타냄을 알 수 있다. 그림 4에서 보는 바와 같이 표 1에 나타낸 균열이 유발되는 하중단계에서의 철근의 응력은 각각 8.6ksi(602kgf/cm²), 8.7ksi(609kgf/cm²), 9.9ksi(693kgf/cm²), 14.5ksi(1,015kgf/cm²)에 해당되며, 이를 각 지점에서 균열발생으로 인한 균열면에서의 슬립량 증가로 인해 철근의 신장률이 급격히 증가하다가, 최종 균열이 발생한 이후에는 균열사이에 위치한 콘크리트의 인장저항력을 기대할 수 없게 되므로 콘크리트가 없는 철근(Free Bar)의 기울기에 수렴하게 됨을 알 수 있다. 본 논문의 결과가 실험값보다 최종

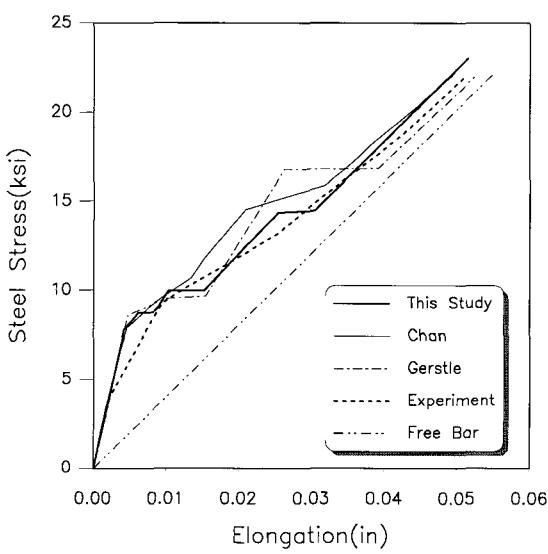


그림 4 철근의 응력-신장을 관계

균열이후, 다소 강성이 크게 나타나는 이유는 본 논문에서는 축방향 부재의 길이방향 균열만을 고려했기 때문인 것으로 사료된다. 나아가 그림 5와 6은 하중이 작용할 때, 균열간격의 중앙부에서 균열이 발생하기 직전의 균열발생단계에서 철근과 콘크리트의 변형률 변화 및 분담하중의 변화를 부재의 길이방향으로 나타낸 것이고, 그림 7은 각 하중 단계별 철근과 콘크리트의 변형률 차이에 의하여 발생하는 슬립량의 분포를 각각 나타내고 있다.

또한 그림 5를 통해 살펴볼 수 있는 바와 같이 하중이 증가함에 따라 콘크리트의 변형률 분포에 비해 철근의 변형률 분포의 변화가 상대적으로 커짐을 알 수 있으며, 균열면에서는 철근만이 외력에 저항하는 관계로 균열면에서 철근은 외력에 비례하는 상대적으로 큰 변형률분포를 나타내고 있음을 알 수 있다.

나아가 그림 5(d)의 콘크리트 변형률 분포에서 나타나는 바와 같이 가해진 하중의 크기가 증가할수록 균열간격이 감소하여, 11.4kips(5,175kgf) 이후에는 하중을 증가시켜도 콘크리트의 변형률이 균열을 유발시키는 인장변형률에 도달하지 못하기 때문에 균열 발생이 8개 이후에는 더 이상 증가하지 않게 됨을 알 수 있다.

한편 철근과 콘크리트의 분담하중변화를 살펴보면 균열개수가 1인 경우에는 전체 작용하는 외력의 72%를 분담하던 콘크리트의 분담력이 균열 개수가 2, 4, 8개로 증가할수록, 62%, 38%, 15%로 감소하며, 항복하중에 이른 경우에는 전체 하중의 5%만을 콘크리트가 저항하고 철근이 95%의 외력에 저항하여 완전균열상태와 유사하게 거동함을 알 수 있다. 즉 균열의 발생개수는 단면의 폭에 가까운 균열간격이 발생될 때까지 순차적으로 증가하나, 그 이후에는 추가적인 균열의 발생 없이 철근이 항복에 이를 때까지 작용하는 외력에 비례하여 철근의 응력과 변형률이 증가하게 됨을 알 수 있다.

그림 7을 살펴보면, 균열단면을 경계로 슬립량의 분포가 대칭을 이루면서 동일하게 나타나지만 최대 균열 개수가 발생한 경우에는 전 영역에 걸쳐 큰 폭으로 슬립량이 증가함을 알 수 있다. 즉 완전 균열상태로 진행됨에 따라 콘크리트와 철근의 부착에 의해 유발되는 인장강화효과는 점차 감소하게 되며, 철근이 항복에 도달할 경우 더 이상의 인장강화효과를 기대할 수 없음을 예상할 수 있다.

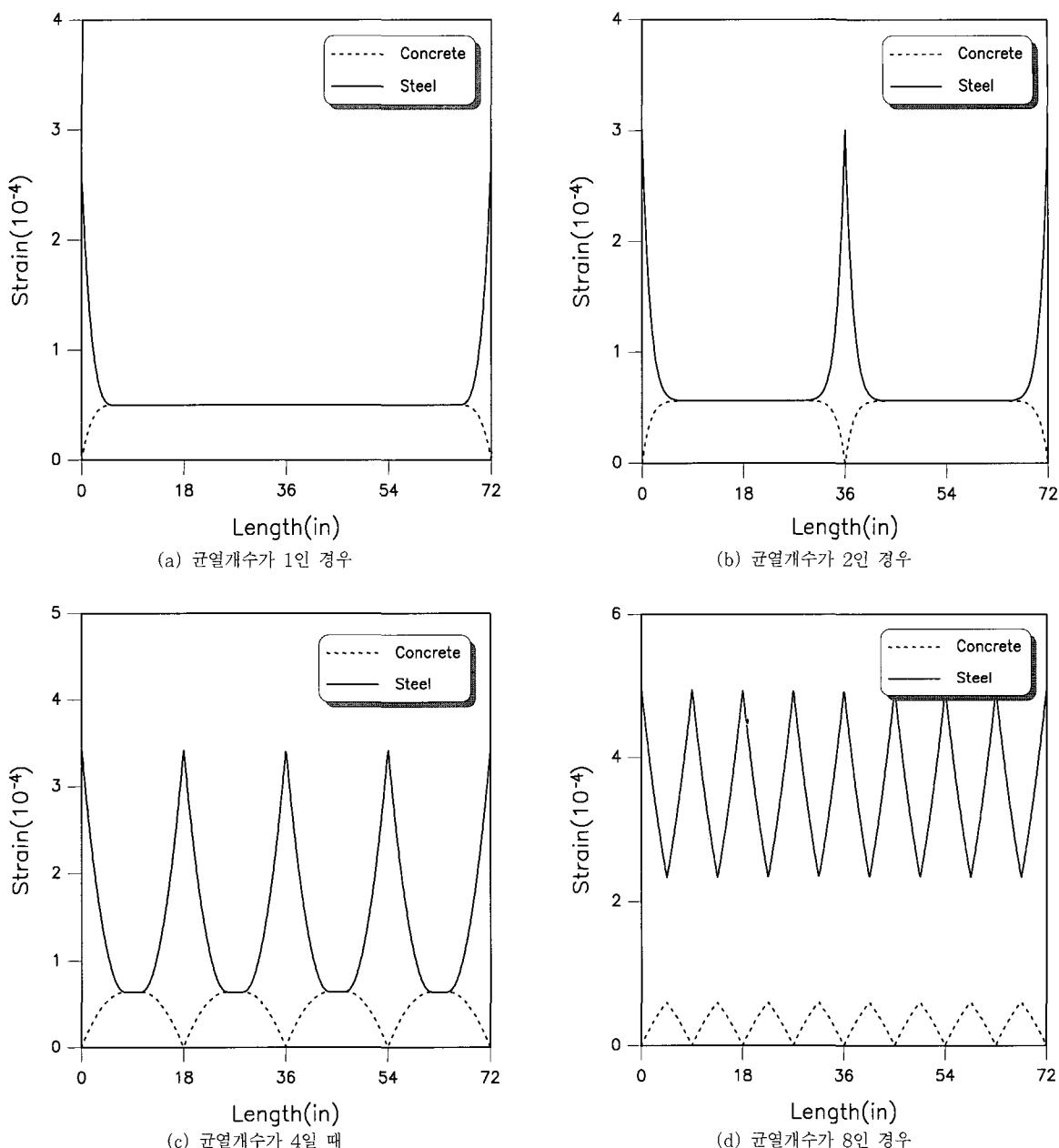


그림 5 균열 발생 단계에서의 철근과 콘크리트 변형률 분포

다음으로 직사각형 축방향 부재에 대한 비교 연구가 이루어졌는데, 이 시험체는 폭이 8.1in(20.6cm)이고 두께가 3.5in(8.9cm)이며 단면의 중앙에 직경 1in(2.54cm)의 철근이 배근되어 있고 부재의 길이는 33in(83.8cm)이다. 이 때 시험체에 사용된 재료상수는 콘

크리트의 탄성계수 $E_c = 3450 \text{ ksi} (241,500 \text{ kgf/cm}^2)$, 콘크리트의 인장강도 $\sigma_t = 0.308 \text{ ksi} (21.56 \text{ kgf/cm}^2)$, 철근의 탄성계수 $E_s = 29,000 \text{ ksi} (2,030,000 \text{ kgf/cm}^2)$ 의 값을 각각 갖는다. 표 2를 살펴보면 다른 해석기법을 적용하여 구한 균열이 발생하는 단계에서의 철근 응

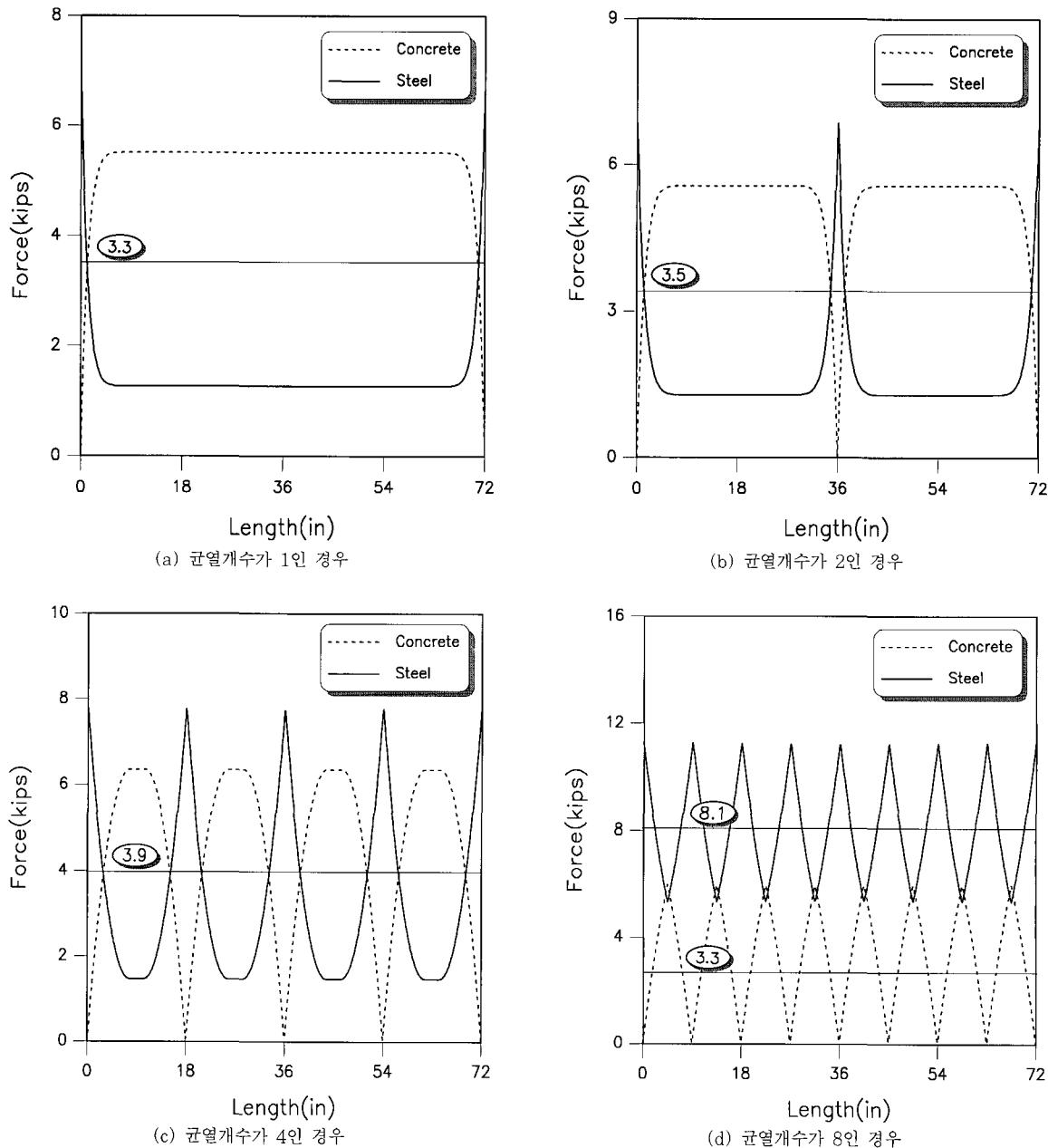


그림 6 균열 발생 단계에서의 철근과 콘크리트의 분담하중분포

력⁶⁾과 본 논문에서 제시한 방법으로 산정된 철근의 응력이 잘 일치함을 알 수 있으며, 철근의 응력과 신장을 관계를 나타낸 그림 8에서 볼 수 있는 바와 같이 실험 값과도 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 직사각형 부재의 경우에는 부재길이가 원형 부재에 비해 상대적으로

작아서 균열이 2개 발생한 이후에는 균열간격의 감소로 인해 더 이상의 균열이 유발되지 않음을 알 수 있다. 즉 균열개수가 2일 경우 균열간격은 8.25in(21cm)에 이르게 되는데 시험체의 폭이 8.1in(20.5cm)인 관계로 추가적인 균열이 발생되지 않을 수 있다.

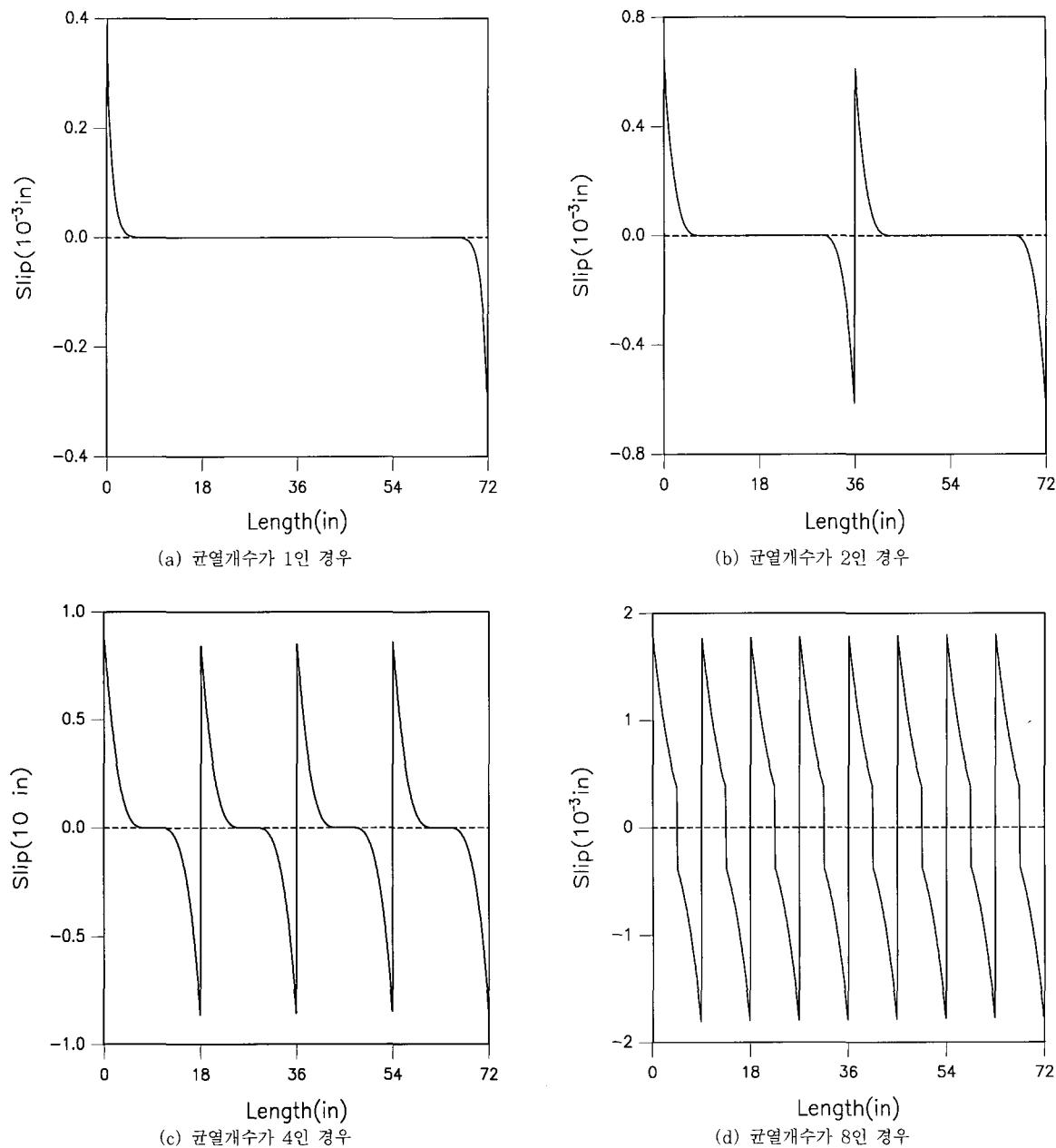


그림 7 균열 발생 단계에서의 슬립량 분포

표 2 균열개수와 철근 응력 관계(단위 : ksi*)

균열개수	Khouzam ⁵⁾	Chan ⁶⁾	This Study
1	16.5	14.5	15.4
2	19.0	21.0	23.1

(* 1ksi = 70kgf/cm²)

마지막으로 Mirza와 Houde에 의해 실험된 정방형 단면을 갖는 축방향 부재에 대하여 해석모델을 적용하여 균열강도를 예측한 결과는 표 3과 같다.¹⁴⁾ 이 때, 적용된 시험체의 단면은 각각 2×2 in (5.08×5.08 cm), 4×4 in (10.16×10.16 cm), 6×6 in (30.48×30.48 cm)의 구

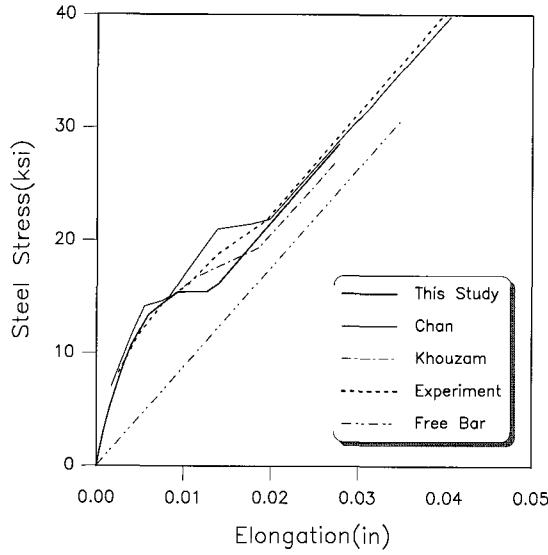


그림 8 철근의 응력-신장률 관계

형단면으로 단면의 중앙에 직경 1in(2.54cm)의 철근이 배근되어 있으며 부재의 길이는 16in(40.6cm)이다. 사용된 재료 상수는 콘크리트의 탄성계수 $E_c = 4,360\text{ ksi}$ ($305,200\text{ kgf/cm}^2$), 콘크리트의 인장강도 $\sigma_t = 0.340\text{ ksi}$ (23.8 kgf/cm^2), 철근의 탄성계수 $E_s = 28,400\text{ ksi}$ ($1,988,000\text{ kgf/cm}^2$)의 값을 각각 갖는다. 표 3을 살펴보면 $6 \times 6\text{ in}$ 단면의 경우는 초기 균열이 유발되는 철근응력이 철근의 항복강도의 약 1/2에 해당되어 더 이상의 균열이 전진되지 않는 반면에, $2 \times 2\text{ in}$ 경우는 1/10정도로써 균열이 4개까지 발생하며 이후에는 하중이 증가함에 따라 균열간격의 감소로 인해 콘크리트의 변형률이 인장 변형률에 도달하지 못하므로 더 이상의 균열이 발생되지 않는다. 이는 앞에서 언급한 바와 같이 시험체의 최대폭과 균열간격의 관계를 통해 예전된 바와 같다.

표 3 균열개수와 철근 응력 관계(단위 : ksi*)

단면	균열개수	Chan ^⑨	This Study
$2\text{ in} \times 2\text{ in}$	1	3.0	3.6
	2	3.6	3.7
	4	4.2	4.1
$4\text{ in} \times 4\text{ in}$	1	9.6	10.7
	2	14.4	16.7
$6\text{ in} \times 6\text{ in}$	1	28.2	24.7

(* 1ksi = 70 kgf/cm^2 , 1 in = 2.54cm)

6. 인장강화모델(tension stiffening model)로의 확장

6.1 인장강화모델의 구성

인장강화효과는 균열 이후 콘크리트와 철근 사이의 부착 거동에 의해 철근콘크리트부재의 인장강성이 증가하는 것을 의미하며, 부착특성이 양호할수록 그 효과가 증가하게 된다. 여기서는 본 논문에서 제안한 변형률 분포함수를 바탕으로 결정된 균열거동 예측모델을 토대로 축방향부재 및 휨부재에 대한 인장강화모델(tension stiffening model)을 제안하고자 한다. 그림 1에서 살펴본 바와 같이 임의의 축하중 N 이 작용할 경우 완전균열상태에 도달하여 콘크리트가 더 이상의 저항력을 갖지 못한다고 가정하면, 철근의 변형률은 철근만(free bar)의 하중-변형률 곡선관계로부터 ε_2 가 발생하게 된다. 그러나 균열과 균열사이에 위치한 콘크리트가 외력에 일부 저항하기 때문에 발생하는 변형률은 ε_2 보다 작은 ε_{sm} 을 나타내게 된다. 즉 외부에서 작용하는 축력 N_m 에 대해 부재내에 발생하는 평균변형률은 ε_{sm} 으로 정의할 수 있으며 이때 $N_s = \varepsilon_{sm} \cdot E_s \cdot A_s$ 의 하중이 철근에 의해 저항하게 되며 ($N_m - N_s$)의 하중이 콘크리트에 의해 저항하게 된다(그림 1 참조). 따라서 철근콘크리트 구조물의 유한요소해석시에 널리 사용되고 있는 철근과 콘크리트의 변위장 일치조건을 토대로 할 때, 균열발생 후 콘크리트의 변형연화영역에서 $\bar{\varepsilon}_{sm} = \bar{\varepsilon}_{ave}$ 로 정의할 수 있다. 따라서 구조물에 유발된 불규칙한 변형률의 분포를 평균변형률의 개념을 도입함으로써 한 요소 내에 발생한 균열에 따른 평균 인장강화효과를 정의하게 된다.

유럽의 CEB-FIP모델(CEB 1978)¹²⁾의 경우, 가해진 하중 N 과 초기균열하중 N_{cr} 의 비율에 따라 정의되는 변수인 ζ 를 사용하여 철근의 평균변형률을 다음 식(17)과 같이 완전균열상태와 비균열상태의 철근 변형률의 합으로 정의하고 있다.

$$\bar{\varepsilon}_{sm} = \bar{\varepsilon}_{ave} = (1 - \zeta) \cdot \varepsilon_{sl} + \zeta \cdot \varepsilon_{av} \quad (17)$$

여기서 $\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 (N_{cr}/N)^2$, 초기균열하중 $N_{cr} = f'_t A_c (1 + n\rho)$ 이며, N 은 가해진 외력을, 부착성질에 관한 재료상수인 β_1 은 이형철근의 경우 1의 값을 갖으며, β_2 는 초기재하는 1, 지속적인 하중이나 반복하중의 경

우에는 0.5의 값을 각각 갖는다. 또한 비균열상태의 철근변형률 ε_{sl} 과 완전균열상태의 철근변형률 ε_{s2} 는 3.2.1에서 설명한 바와 같이 $\varepsilon_{sl} = N/(A_s E_s + A_c E_c)$ 과 $\varepsilon_{s2} = N/(A_s E_s)$ 의 관계식으로부터 결정된다(그림 1 참조).

한편, 본 논문에서 제안한 철근의 변형률 분포함수를 사용하는 경우에는 다음과 같이 임의의 축하중 N 이 작용할 때의 균열간격 S_N 내에 분포하는 철근의 변형률 분포 $\varepsilon_s(x)$ 로부터 철근의 평균변형률을 결정하게 된다(그림 3 참조).

$$\bar{\varepsilon}_{sm} = \frac{2}{S_N} \int_0^{S_N/2} \varepsilon_s(x) dx \quad (18)$$

이때 축하중이 증가할수록 부착전달길이 l_t 는 증가하는데 비해, 일정크기의 축력 N 이상이 되면 축력의 크기에 관계없이 평균 균열간격 S_N 은 일정한 값으로 수렴하는 일축인장부재에 대한 균열거동 해석결과를 토대로, 임의의 축하중 N 에 의해 유발되는 균열간격 S_N 을 식(19)과 같이, 최초의 균열하중 N_{cr} 이 작용할 때 식(5)에 의해 산정되는 초기균열간격 S_{cr} 과 항복하중이 작용할 때 최종적으로 수렴된 균열간격 S_Y 와의 선형관계로부터 결정할 수 있다.

$$S_N = \frac{S_Y - S_{cr}}{N_Y - N_{cr}} (N - N_{cr}) + S_{cr} \quad (19)$$

여기서 $S_Y = 0.5 \cdot (2(t_c + l_b/10) + k_1 k_2 d_b / \rho)$, t_c 는 콘크리트 덮개를, l_b 는 종방향철근의 최대간격을, k_1 은 부착 성질을 규정하는 변수(이형철근의 경우 0.4)이며, k_2 는 최대인장변형률 ε_1 과, 최소인장변형률 ε_2 값에 의해 결정되는 변형률의 경사를 고려하는 변수로서 $k_2 = 0.25(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2\varepsilon_1$ 로 표현되며, d_b 는 철근의 직경을, ρ 는 철근비를 각각 의미한다.¹²⁾

이와 같이 임의의 축하중 N_m 이 작용할 때 철근의 평균변형률 $\bar{\varepsilon}_{sm}$ 값이 산정된 후, 철근과 콘크리트의 부착에 의해 발생하는 인장강화효과를 정량적으로 평가하는 방법은 다음과 같다. 철근콘크리트 인장부재에 균열이 발생하면, 인장균열 이후 부재의 전 구간에 걸쳐서 순수하게 콘크리트가 분담하는 콘크리트의 평균 인장응력 σ_c 는 전체하중(N_m)에서 철근이 받는 하중($\bar{\varepsilon}_{sm} E_s A_s$)을 뺀 하중을 콘크리트 단면적(A_c)으로 나

눈 값이 되며 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_c = (N_m - \bar{\varepsilon}_{sm} E_s A_s) / A_c \quad (20)$$

이와 같이 가해진 축력 N 과 철근의 평균변형률 $\bar{\varepsilon}_{sm}$ 관계로부터 철근이 항복하중에 도달할 때까지의 $N/A_s f_y - \bar{\varepsilon}_{sm}/\varepsilon_{sy}$ 곡선을 구할 수 있으며, 이를 토대로 식(20)에 의해 산정되는 국부 균열영역을 포함한 부재의 전 구간에서의 콘크리트 평균인장응력 σ_c 와 전체 인장부재의 평균변형률로 대변되는 평균변형률 $\bar{\varepsilon}_{cm}$ 관계로부터, 균열이후의 철근콘크리트 인장부재에서 콘크리트의 평균응력-변형률 관계를 규정하는 인장강화모델을 구성하게 된다(그림 1 참조).

일반적으로 철근콘크리트 구조물의 유한요소해석 시 널리 사용되는 균열이후의 콘크리트의 평균 응력-변형률 관계를 규정하는 인장강화모델은 Collins 모델($\sigma_c = f_t / (1 + \sqrt{200 \cdot \varepsilon})$),⁹⁾ Maekawa 모델($\sigma_c = f_t (\varepsilon_{tu}/\varepsilon)^c$)¹⁵⁾과 같이 콘크리트의 인장강도 f_t 의 함수로 규정되는 모델과 Gupta와 같이 부착응력-슬립 관계로부터 유도된 모델,¹¹⁾ 그리고 본 논문에서 제시한 모델과 CEB-FIP모델과 같이 철근의 평균변형률 관계로부터 구성된 모델 등이 있다. 위의 식에서 ε_{tu} 는 균열이 발생할 때의 변형률을, c 는 강성변수(stiffening factor)로써 이형철근의 경우에는 0.4의 값을 갖는다. 즉 인장강화모델들은 특징을 갖게 되는데 각 모델들의 장단점 및 차이점을 예제해석에서 살펴볼 수 있다.

6.2 인장강화모델의 검증

면적변수 $n\rho$ 와 강도변수 f_y/nf_t 의 변화에 따른 제안된 인장강화모델의 특성을 파악하기 위해 기존 연구를 통해 제안된 인장강화모델과의 비교가 이루어졌다. 면적변수 $n\rho$ 와 강도변수 f_y/nf_t 변화에 따른 축력-평균변형률 관계와 콘크리트 응력-변형률 관계를 나타낸 그림 9를 살펴보면, Collins⁹⁾의 인장강화모델은 앞에서 설명한 바와 같이 콘크리트 인장강도의 함수로만 표현되어 있어서 두 변수변화에 따른 인장강화영향을 효과적으로 고려하지 못하며, Gupta¹¹⁾의 단순 모델은 철근항복하중하의 콘크리트 응력 대 인장강도비 σ_c/f_t' 가 0.5로써 항상 일정한 값을 가지므로 면적변수와 강도변수가 커지는 경우 상대적으로 균열 이후의 콘크리트

인장강성을 과도하게 산정함을 알 수 있다. 이에 반해 본 논문에서 제시한 인장강화모델은 CEB 모델과 거동 특성이 유사하며 두 변수 변화에 따른 인장강화영향을 효과적으로 고려함을 알 수 있다. 해석결과를 살펴보면 일축인장부재의 면적변수와 강도변수가 작을수록 인장

강화효과가 커짐을 알 수 있으며, 강도변수가 15로서 상대적으로 철근의 항복강도값이 작을 때, 부착성질에 관한 변수의 곱 $\beta_1 \beta_2$ 값을 1로 가정할 경우에는 본 논문에서 제시한 인장강화모델보다 CEB 모델이 인장강화 효과를 상대적으로 크게 고려하고 있음을 알 수 있다.

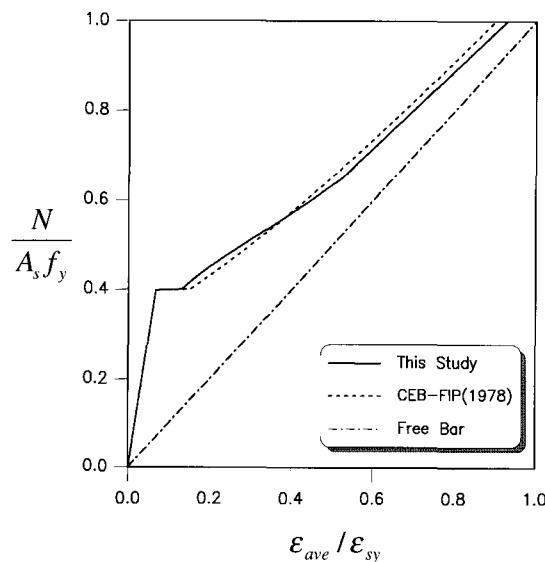
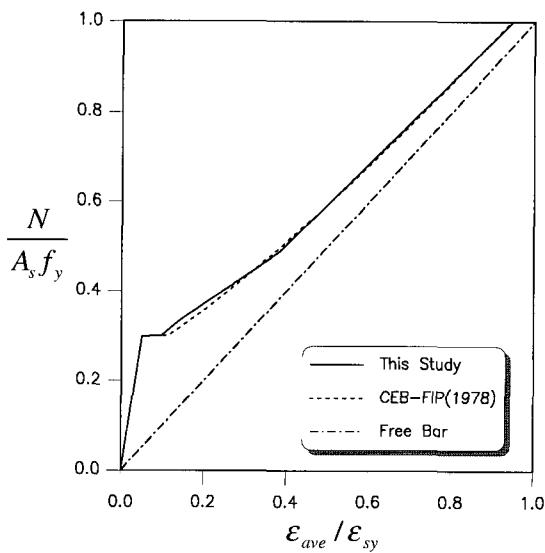
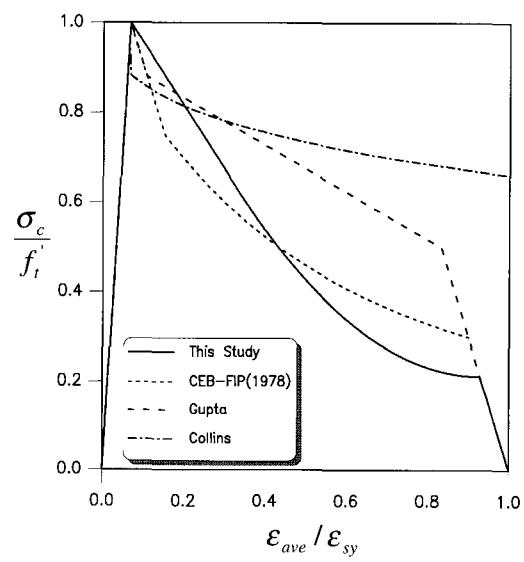
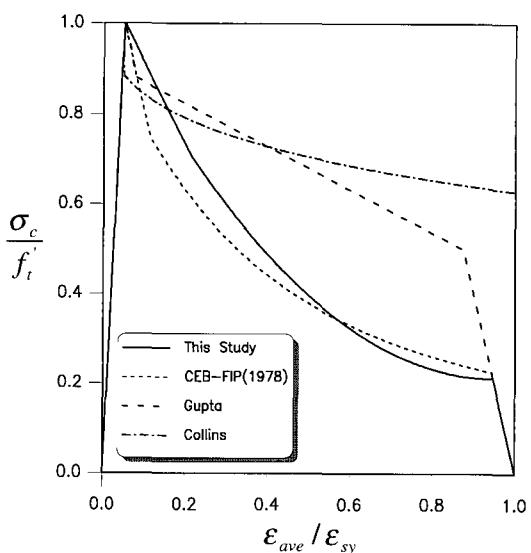
(a) $n\rho=0.2, f_y/nf_t=15$ 일 때(b) $n\rho=0.2, f_y/nf_t=20$ 일 때

그림 9 면적변수와 강도변수 변화에 따른 인장강화영향(continue)

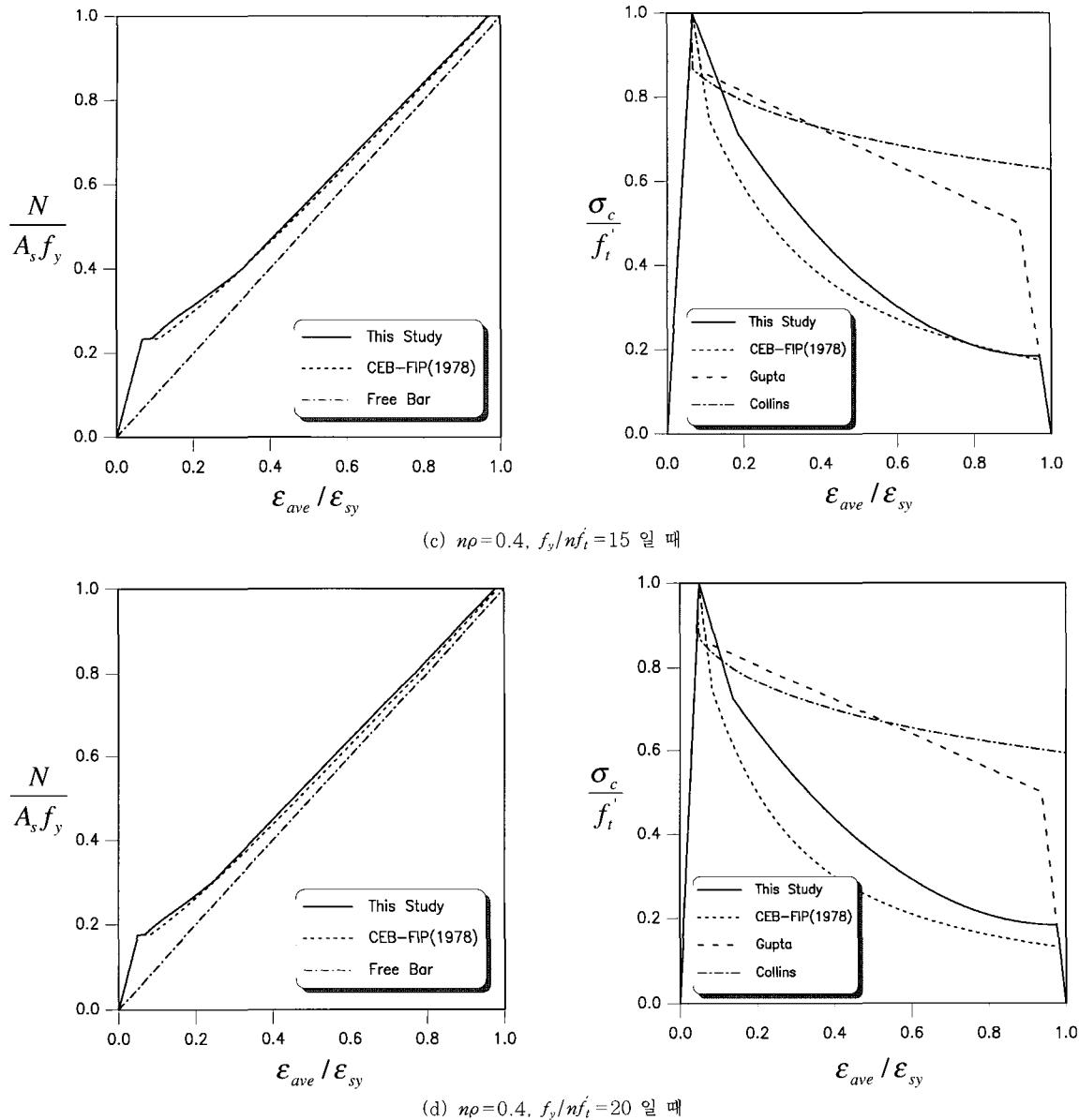


그림 9 면적변수와 강도변수 변화에 따른 인장강화영향

7. 결 론

본 논문에서는 축방향 인장부재의 균열거동과 철근 콘크리트 부재의 인장강화현상을 고려하기 위한 새로운 해석적 모델을 제시하였다. 균열 후 거동 해석을 위하여 부착응력-슬립의 관계나 부착응력의 분포를 가정

하는 기존의 방법과는 달리, 균열 단면 사이에 존재하는 철근과 콘크리트에 대한 변형률 분포 함수를 균열 전·후의 에너지 평형관계를 이용하여 다항식으로 제안하였으며, 이를 바탕으로 철근콘크리트 구조물의 인장강화모델 구성이 용이한 일축 방향 철근 콘크리트의 균열 거동 해석기법을 구성하였다. 예제 해석을 통해

제안된 다항식 변형률 분포함수가 하중이 증가함에 따라 부재의 길이 방향으로 철근과 콘크리트가 분담하는 하중, 슬립량, 철근의 신장을 등, 균열 후 거동을 효과적으로 산정할 수 있음을 알 수 있었다. 또한 본 논문에서 구성된 균열 이후 균열 단면 내에 존재하는 콘크리트의 응력-변형률 관계를 규정하는 인장강화모델을 면적변수와 강도변수를 변화시키면서 철근콘크리트 인장부재에 적용한 결과, 두 변수 변화에 따른 거동을 효과적으로 나타내고 있음을 알 수 있으며, 콘크리트의 응력-변형률 관계로 표시된 인장강화모델은 휨이 지배적으로 작용하는 콘크리트 구조물(보, 슬래브 등)의 비선형 해석시 균열 후 거동을 예측하는데 효과적으로 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. Gupta, A. K., and Maestrini, S. R., "Tension-Stiffness Model for Reinforced Concrete Bars", *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 3, 1990, pp.769~790
2. Ouyang, C., Kulkarni, S. M. and Shah, S. P., "Prediction of Cracking Response of Reinforced Concrete Tensile Members", *J. of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 1, 1997, pp.70~78
3. Somayaji, S. and Shah, S. P., "Bond Stress Versus Slip Relationship and Cracking Response of Tension Members", *ACI J.*, Vol. 78, No. 3, 1981, pp.217~225
4. Yang, S. and Chen, J., "Bond Slip and Crack Width Calculation of Tension Members", *ACI Struct. J.*, Vol. 85, No. 7, 1988, pp.414~422
5. ACI Committee 224, "Cracking of concrete members in direct tension", *J. of ACI*, Vol. 83, No. 1, 1986, pp.3~13
6. Chan, H. C., Cheung, Y. K. and Huang, Y. P., "Crack Analysis of Reinforced Concrete Tension Members", *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 118, No. 8, pp.2118~2132
7. Gilbert, R. I., and Waner, R. F., "Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs", *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 104, No. 12, 1978, pp.1885~1900
8. CEB, "Cracking and deformation, Bulletin d'information", No. 158, Paris, France, 1985
9. Vecchio, F. J., and Collins, M. P., "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Members subjected to Shear", *ACI J.*, Vol. 83, No. 2, 1986, pp.219~231
10. Vecchio, F. J., "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation", *J. of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 126, No. 9, 2000, pp.1070~1077
11. Kankam, C. K., "Relationship of Bond Stress, Steel Stress, and Slip in Reinforced Concrete", *J. of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 1, 1997, pp.79~85
12. CEB, "CEB-FIP Model Code for Concrete Structures", Paris, France, 1978
13. Blackman, J. S., Smith, G., and Young, L. E., "Stress Distribution Affects Ultimate Tensile Strength", *ACI J.*, Vol. 55, No. 6, 1958, pp.679~684
14. Mirza, S. M., and Houde, J., "Study of Bond Stress-Slip Relationships in Reinforce Concrete", *ACI J.*, Vol. 76, No. 1, 1979, pp.19~45
15. Okamura, H. and Maekawa, K., *Nonlinear Analysis and Constitutive Models of Reinforced Concrete*, Gihodo-Shuppan, Tokyo, Japan, 1991