

크로소이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동

Free Vibration of Horizontally Curved Beams with Clothoid Transient Curve

이 병 구†

진 태 기*

이 태 은*

Lee, Byoung Koo

Jin, Tae Ki

Lee, Tae Eun

(논문접수일 : 2001년 11월 18일 ; 심사종료일 : 2001년 12월 26일)

요 지

이 논문은 크로소이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 곡선보가 진동할 때 부재의 미소 요소에 발생하는 합응력과 관성력에 대한 동적 평형방정식을 이용하여 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식과 단부조건에 대한 무차원 경계조건을 유도하였다. 유도된 미분방정식을 크로소이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보에 적용하여 회전-회전 및 고정-고정 보의 고유진동수 및 변위와 합응력의 진동형을 산출하였다. 구조해석용 범용프로그램인 ADINA와 본 연구의 결과를 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였으며, 수치해석의 결과로 무차원 고유진동수와 곡선보의 변수들 사이의 관계를 표 및 그림에 나타내었다.

핵심용어 : 고유진동수, 관성력, 동적 평형방정식, 수평 곡선보, 완화곡선, 자유진동, 크로소이드 곡선

Abstract

This paper deals with the free vibration of horizontally curved beams with transition curve. Based on the dynamic equilibrium equations of a curved beam element subjected to the stress resultants and inertia forces, the governing differential equations are derived for the out-of-plane vibration of curved beam with variable curvature. These equations are applied to the beam having transition curve in which the clothoid curve is chosen in this study. The differential equations are solved by the numerical methods for calculating the natural frequencies and mode shapes. For verifying theories developed herein, the frequency parameters obtained from this study and ADINA are compared with each other. As the numerical results, the various parametric studies effecting on natural frequencies are investigated and those results are presented in tables and figures.

Keywords : Clothoid Curve, Dynamic Equilibrium, Free Vibration, Horizontally Curved Beam, Inertia Force, Natural Frequency, Transient Curve

1. 서 론

현대도시는 급증하는 교통량의 원활한 흐름을 위하여 유기적인 도로망 체계를 필요로 한다. 도심지역 내

에서 대용량의 도로를 건설하기 위해서는 고가고속도로의 건설이 필수적이다.

이러한 고가고속도로 건설에서 서로 다른 직선구간을 연결하기 위해서는 수평 곡선보가 반드시 필요하다.

† 책임저자. 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수
전화: 063-850-6718; Fax: 063-857-7204
E-mail: bkleest@wonkwang.ac.kr

* 학생회원 · 원광대학교 대학원 박사과정

· 이 논문에 대한 토론을 2002년 6월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

고가고속도로의 건설에서 곡선구간을 직선부재를 이용하여 시공할 수 있으나 많은 수의 교각을 필요로 한다. 이러한 많은 수의 교각은 토지이용의 막대한 지장을 초래할 뿐만 아니라 지상교통의 원활한 소통에 악영향을 끼친다. 따라서 도심지역에서 고가고속도로의 건설에는 수평 곡선보의 사용이 반드시 필요하다. 특히 곡률반경이 매우 작은 곡선교의 경우에는 단경간의 곡선구간으로 두 개의 도로를 연결할 수 있어 도심지역에서 매우 효율적인 구조이다.

도로의 직선구간에서 곡선구간으로 진입할 때에 완화구간없이 원호구간으로 직접 진입하게 되면 급격한 곡률반경의 변화로 차량이 전복할 위험이 있을 뿐만 아니라 운전자의 승차감이 매우 나빠진다. 그러므로 곡선교에는 반드시 완화곡선을 넣어 자동차의 안전주행은 물론이고 운전자의 원활한 승차감을 이루도록 건설하여야 한다. 이제까지의 수평 곡선보에 대한 문헌들^{1)~6)}을 고찰하였으나 완화곡선을 갖는 곡선보의 자유진동에 관한 문헌은 전혀 찾아볼 수 없었다.

이러한 관점에서 이 연구는 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 대한 수학적 모형을 구축하고, 이 해석모형으로부터 고유진동수와 진동형을 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하는데 연구목적이 있다. 타 문헌과의 결과비교를 통하여 본 연구의 결과를 검증하고, 크로소이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 제변수가 자유진동에 미치는 영향을 고찰한다

2. 지배미분방정식

그림 1은 $y=y(x)$ 의 임의의 선형을 갖고 지간길이가 l 인 곡선보의 기하학적 형상과 진동형의 예를 나타낸 것이다. 점선은 곡선보의 정적 상태의 선형이고, 실선은 자유진동할 때의 진동형이다.

곡선보의 단면은 등단면이고, 양단부는 회전지점 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 이 그림에서 α 는 중심각, (x, y) 는 곡선보의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계, ρ 및 θ 는 각각 곡선보의 축상 임의점에서 곡률반경 및 x 축과 곡률 중심방향이 이루는 각도이다. 그리고 v, ψ 및 ϕ 는 변위향으로 각각 곡선보의 축상 임의점에서 수직방향변위, 휨에 의한 단면회전각 및 중립축의 비틀림각이다.

그림 2는 곡선보가 자유진동할 때에 부재의 미소요소에 작용하는 힘들을 나타내고 있다. 이 그림에서

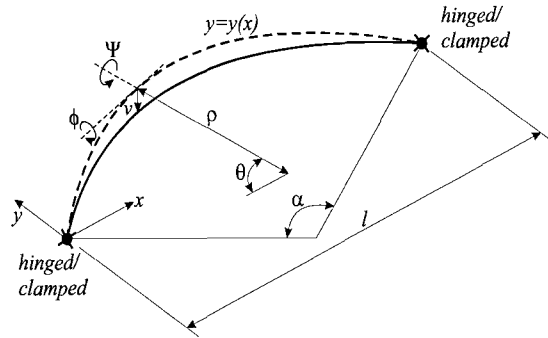


그림 1 수평 곡선보의 제변수

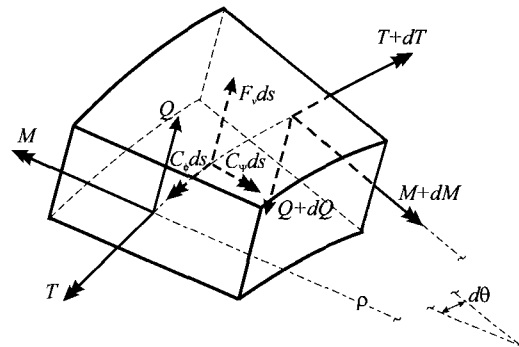


그림 2 미소요소에 작용하는 힘

M, T 및 Q 는 변위에 의하여 발생하는 합응력들이며, 각각 휨모멘트, 비틀림모멘트 및 전단력이다. F_v, C_ψ 및 C_ϕ 는 질량을 갖고 있는 부재단면에 발생하는 단위 길이당 관성력이며, 각각 수직방향 관성력, 회전관성우력 및 비틀림관성우력이다.

부재 미소요소에 작용하는 이들 합응력들과 관성력들 사이의 동적 평형방정식을 세우면 식(2.1)~(2.3)과 같다.

$$\frac{dQ}{d\theta} - \rho F_v = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{dM}{d\theta} - \rho Q + T + \rho C_\psi = 0 \tag{2.2}$$

$$M - \frac{dT}{d\theta} + \rho C_\phi = 0 \tag{2.3}$$

부재 단면에 발생하는 합응력들 즉, 휨모멘트, 비틀림모멘트 및 전단력을 v, ψ 및 ϕ 의 변위향으로 나타내면 각각 식(2.4)~(2.6)과 같다.⁷⁾

$$M = \frac{EI}{\rho} \left(\phi - \frac{d\Psi}{d\theta} \right) \quad (2.4)$$

$$T = \frac{GI}{\rho} \left(\Psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) \quad (2.5)$$

$$Q = \alpha_s AG \left(\frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\theta} - \Psi \right) \quad (2.6)$$

여기서 I 와 J 는 각각 단면 2차모멘트 및 비틀림상수, E 와 G 는 각각 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수, α_s 는 단면형상에 따른 상수이다.

곡선보가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당의 관성력 F_v , C_Ψ 및 C_ϕ 는 각각 식(2.7)~(2.9)와 같다.⁸⁾

$$F_v = -\gamma A \omega^2 v \quad (2.7)$$

$$C_\Psi = -\gamma I \omega^2 \Psi \quad (2.8)$$

$$C_\phi = -\gamma I_p \omega^2 \phi \quad (2.9)$$

여기서 γ 는 재료의 질량밀도, A 는 단면적, I_p 는 단면 극관성모멘트, ω 는 rad/sec의 단위를 갖는 고유각진동수이다.

본 연구에서는 지배 미분방정식을 무차원 형태로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l \quad (2.10, 11)$$

$$\eta = v/l, \quad \zeta = \rho/l \quad (2.12, 13)$$

$$s = l/\sqrt{I/A}, \quad s_p = l/\sqrt{I_p/A} \quad (2.14, 15)$$

$$\varepsilon = GJ/(EI), \quad \mu = \alpha_s G/E \quad (2.16, 17)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A/(EI)} \quad (2.18)$$

여기서 (ξ, δ) 는 직교좌표계 (x, y) 를 지간길이 l 로 정규화한 무차원 직교좌표계이고, η 와 ζ 는 v 와 ρ 를 지간길이 l 로 정규화한 것이다. s 와 s_p 는 세장비 관련 변수, ε 과 μ 는 곡선보의 강성변수와 전단변수이다.

한편 c_i 는 무차원 고유진동수이고, i 는 모드번호이다.

이제 위의 식들을 이용하여 임의 선형을 갖는 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도한다. 먼저, 식(2.6)과 (2.7)을 식(2.1)에 대입하고 식(2.10)~(2.18)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음과 같은 무차원 상미분방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} = \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\eta}{d\theta} - \frac{c_i^2}{\mu s^2} \zeta^2 \eta + \zeta \frac{d\Psi}{d\theta} \quad (2.19)$$

식(2.4)~(2.6) 및 식(2.8)을 식(2.2)에 대입하고 식(2.10)~(2.18)의 무차원 변수들을 이용하면 다음의 무차원 상미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} = & \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} + \left[\varepsilon + \left(\mu s^2 - \frac{c_i^2}{s^2} \right) \zeta^2 \right] \Psi \\ & + (1 + \varepsilon) \frac{d\phi}{d\theta} - \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \phi - \mu s^2 \zeta \frac{d\eta}{d\theta} \end{aligned} \quad (2.20)$$

식(2.4), 식(2.5) 및 식(2.9)를 식(2.3)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 무차원 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = & \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\phi}{d\theta} + \frac{s_p^2 - c_i^2 \zeta^2}{\varepsilon s_p^2} \phi \\ & - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{d\Psi}{d\theta} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \Psi \end{aligned} \quad (2.21)$$

이상에서 식(2.19)~(2.21)이 변화곡률을 갖는 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이다. 따라서 이 연구의 대상보인 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 선형에 대한 ζ , $d\zeta/d\theta$ 들 즉 곡선보의 형상함수를 위의 식들에 대입하면 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식으로 변환된다.

곡선보의 단부조건에 대한 경계조건식은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식(2.4)의 휨모멘트가 "0"이고, 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 앞에서 언급한 무차원 변수들을 이용하면 회전 및 고정지점의 무차원 경계조건식을 각각 식(2.22)~(2.24) 및 식(2.26)~(2.28)과 같이 나타낼 수 있다.

- 회전지점

$$\eta = 0, \phi = 0, \frac{d\Psi}{d\theta} = 0 \quad (2.22 \sim 24)$$

- 고정지점

$$\eta = 0, \phi = 0, \Psi = 0 \quad (2.25 \sim 27)$$

곡선보의 진동형을 산출하기 위하여 수직변위 η 와 합응력 m, t, q 를 다음 식들과 같이 무차원화하였다.

$$m = \frac{Ml}{EI} = \frac{1}{\xi} \left(\phi - \frac{d\Psi}{d\theta} \right) \quad (2.28)$$

$$t = \frac{Tl}{GJ} = \frac{1}{\xi} \left(\frac{d\phi}{d\theta} + \Psi \right) \quad (2.29)$$

$$q = \frac{Ql^2}{EI} = \mu s^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\eta}{d\theta} - \Psi \right) \quad (2.30)$$

3. 형상 함수

그림 3은 점선으로 표시되어 있는 두 개의 직선부재를 연결해 주고 있는 크로스오이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 선형을 직교 좌표계 (x, y) 와 (X, Y) 에서 나타낸 것이다. 이 곡선보에서 AB, DE 구간이 완화 구간이고, BCD 구간이 원호구간이다. 여기서 C 는 곡선보의 정점이다. 이 그림에서 L_t 은 완화곡선의 총 곡선길이이며, L_c 는 완화곡선의 시점인 A 점으로부터 측정된 완화곡선상 임의점 (X, Y) 까지의 곡선길이이다.

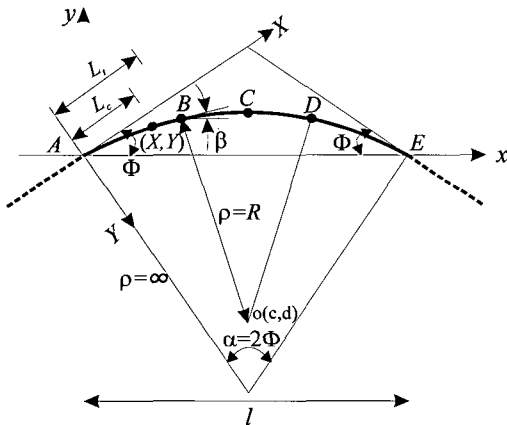


그림 3 크로스오이드 완화곡선

Φ 는 직선부재가 수평선과 이루는 경사각도이고 α 는 중심각이다. 따라서 수평 곡선보의 기하학적 조건에 의하여 $\alpha = 2\Phi$ 가 되고 본 연구에서 곡선보의 설계변수인 $\Phi (= \alpha/2)$ 값은 중심각 α 의 정의로 대신한다.

완화곡선의 시점인 A 점에서 곡선보의 곡률반경 $\rho = \infty$ 이며 완화곡선을 따라서 진입하면 곡률반경은 점차 작아져 완화곡선의 종점인 B 점에서 주어진 소요의 곡률반경 $\rho = R$ 을 갖게 된다. 수평 곡선보 $ABCDE$ 에서 완화곡선 AB 구간의 선형을 먼저 산출한다. 위에서 정의된 변수들을 이용하여 크로스오이드 선형을 직교좌표계 (X, Y) 에서 나타내면 다음 식들과 같다.⁹⁾

$$X = L_c \sum_{i=1}^{\infty} \left[(-1)^{i+1} \left(\frac{L_c^2}{2RL_t} \right)^{2i-1} / (2i-1)! \right] \quad (3.1)$$

$$Y = L_c \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[(-1)^i \left(\frac{L_c^2}{2RL_t} \right)^{2i} / (2i-1)! \right] \right\} \quad (3.2)$$

위의 식(3.1), (3.2)를 수평 곡선보가 정의될 (x, y) 좌표계에서 나타내기 위하여 다음의 좌표 변환식들을 사용한다.

$$x = X \cos \Phi + Y \sin \Phi, \quad 0 \leq x \leq x_B \quad (3.3)$$

$$y = X \cos \Phi + Y \sin \Phi, \quad 0 \leq x \leq x_B \quad (3.4)$$

식(3.3), (3.4)와 식(2.10), (2.11)을 이용하면 크로스오이드 완화곡선을 다음 식들과 같이 무차원 직교좌표계 (ξ, δ) 에서 나타낼 수 있다.

$$\xi = (X/l) \cos \Phi + (Y/l) \sin \Phi, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_B \quad (3.5)$$

$$\delta = (X/l) \cos \Phi + (Y/l) \sin \Phi, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_B \quad (3.6)$$

다음은 원호구간인 BC 의 선형을 정의한다. 원호구간의 곡률 중심점 $O(c, d)$ 를 B 점의 좌표 (x_B, y_B) , 곡률반경 R 및 B 점에서의 접선각 β 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$c = x_B + R \sin \beta \quad (3.7)$$

$$d = y_B - R \cos \beta \quad (3.8)$$

따라서 원호구간인 BC의 선형식은 다음의 원방정식으로 부터 구할 수 있다.

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = R^2, \quad x_B \leq x \leq 0.5l \quad (3.9)$$

위의 식을 시간길이 l로 무차원화하면 다음 식과 같다.

$$(\xi - c/l)^2 + (\delta - d/l)^2 = (R/l)^2, \quad \xi_B \leq \xi \leq 0.5 \quad (3.10)$$

수평 곡선보의 나머지 구간인 CDE 구간은 대칭조건에 의하여 산출한다. 이상과 같이 크로소이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보 ABCDE의 선형이 정의되었으므로 전장에서 유도한 무차원 상미분방정식과 경계조건을 이용하여 고유진동수를 산출할 수 있다.

4. 수치해석 결과 및 토의

위에서 유도한 상미분방정식과 경계조건 및 완화곡선의 선형식을 이용하여 수평 곡선보의 무차원 고유진동수 c_i 를 산출하였다. 상미분방정식을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta 법¹⁰⁾을 이용하였고, 미분방정식의 고유치 c_i 값은 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법¹⁰⁾을 이용하여 산출하였다. 이와 같은 수치해석 방법은 여러 문헌¹¹⁾들에서 이미 그 유용성이 입증되었다. 이 논문에서 모든 수치해석 해는 완화곡선의 범위를 정의해주는 $\xi_B = 0.3$ 으로 하여 산출하였다.

본 연구의 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 구조해석용 범용 프로그램인 ADINA의 무차원 고유진동수 c_i 값들을 표 1에서 비교하였다. ADINA의 해석에서 직사각형 단면을 갖는 수평 곡선보를 100개의 직선보 요소로 모형화하여 고유진동수를 rad/sec로 산출하였고 식(2.18)을 이용하여 무차원 고유진동수 c_i 로 변

표 1 본 연구와 ADINA의 c_i 값 비교

단부조건	자 료	무차원 고유진동수, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전	본 연구	5.03	24.10	52.64	57.48
	ADINA	5.17	23.74	53.69	58.27
고정-고정	본 연구	13.92	38.10	54.01	74.21
	ADINA	14.25	37.53	55.27	73.42

* $\alpha = 100^\circ, s = 50, s_p = 16, \epsilon = 1.15, \mu = 0.35$

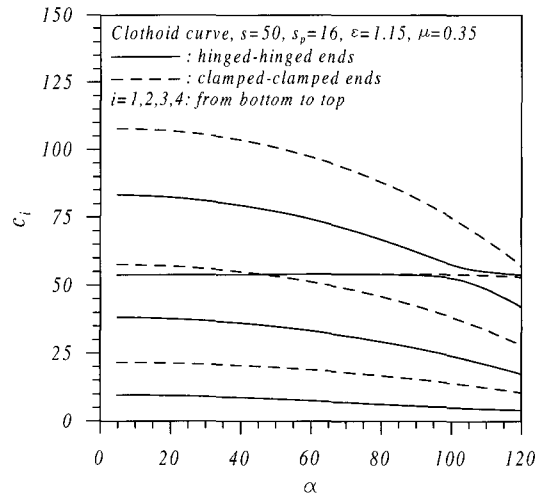


그림 4 c_i 와 α 의 관계곡선

환하였다. 이 표에서 보는 바와 같이 두 결과들은 서로 매우 근접하여 본 연구의 타당성을 검증할 수 있었다.

수평 곡선보의 각종 변수들이 무차원 고유진동수 c_i 에 미치는 영향을 분석하기 위하여 변수연구를 시행하였다. 각 변수연구에 사용한 변수 값들을 그림 상단과 표 하단에 표기하였다. 그림 4는 무차원 고유진동수 c_i 와 중심각 α 사이의 관계를 나타낸 것이며, α 값이 증가할수록 c_i 값은 감소하고 있다. 이는 α 값이 증가하면 곡선보의 강성이 감소되어 c_i 값은 감소하는 것을 의미한다. 이 그림에서 고정-고정 보의 제 2, 3모드의 곡선이 교차하고 있어서 한 개의 고유진동수에서 두 개의 진동형이 존재하고 있다.

그림 5는 무차원 고유진동수 c_i 와 세장비 s 의 관계를 나타낸 것이며, s 가 증가함에 따라서 c_i 값은 증가한다. 그러나 c_i 값은 특정 s 값 이상에서는 거의 증가하지 않고 수평선에 수렴하고 있으며, 특히 s 값이 약 120 이상에서는 모든 c_i 값은 거의 증가하지 않는다.

그림 6은 무차원 고유진동수 c_i 와 강성변수 ϵ 사이의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림에 보인 바와 같이 ϵ 이 증가함에 따라서 c_i 값은 항상증가하며 그림 5에서와 마찬가지로 특정 ϵ 값 이상에서는 수평선에 접근하는 것을 알 수 있다. 특히 제 1모드의 경우에는 매우 작은 값에서 수평선에 접근하여 ϵ 값이 c_i 값에는 거의 영향을 미치지 못한다.

표 2는 전단변수 μ 가 c_i 값에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 일반적으로 직사각형의 단면인 경우에 μ 값은

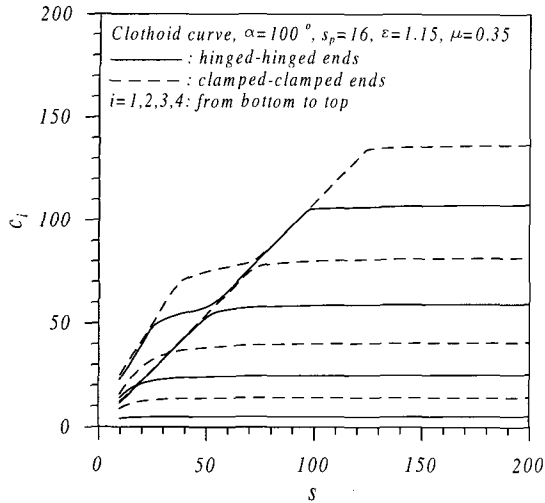


그림 5 c_i 와 s 의 관계곡선

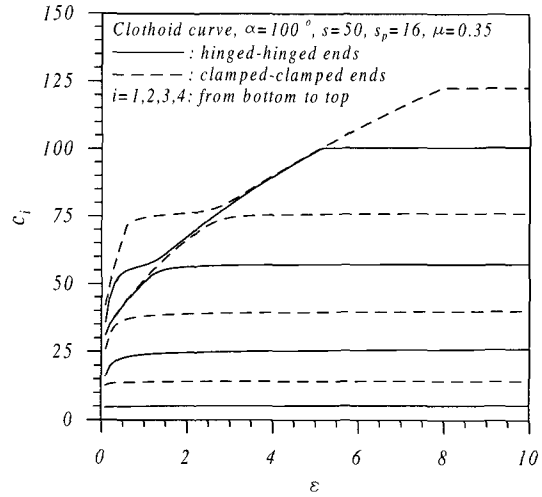


그림 6 c_i 와 ε 의 관계곡선

표 2 전단변수 μ 가 무차원 고유진동수 c_i 에 미치는 영향*

단부조건	μ	무차원 고유진동수, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전	0.300	5.03	24.10	52.64	57.48
	0.350	5.03	24.15	52.72	57.68
	0.400	5.03	24.18	52.77	57.84
고정-고정	0.300	13.92	38.10	54.01	74.21
	0.350	13.96	38.32	54.05	74.89
	0.400	13.98	38.48	54.08	75.42

* $\alpha=100^\circ$, $s=50$, $s_p=16$, $\varepsilon=1.15$

0.3~0.4 사이의 값을 갖는다. 이 표에서 보는 바와 같이 μ 값은 c_i 값을 증가시키는 요인으로 작용하나 그 영향력은 매우 작은 것을 알 수 있다.

그림 7은 본 연구에서 산출한 진동형의 예로 $\alpha=100^\circ$, $s=50$, $s_p=16$, $\varepsilon=1.15$, $\mu=0.35$ 인 곡선보의 수직변위 η 와 합응력 m , t , q 를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 수직방향변위 η , 휨 모멘트 m 의 진동형은 제 1, 3, 4 모드가 대칭진동형이고, 제 2 모드가 역대칭 진동형인 것을 알 수 있다. 한편 비틀림 모멘트 t 및

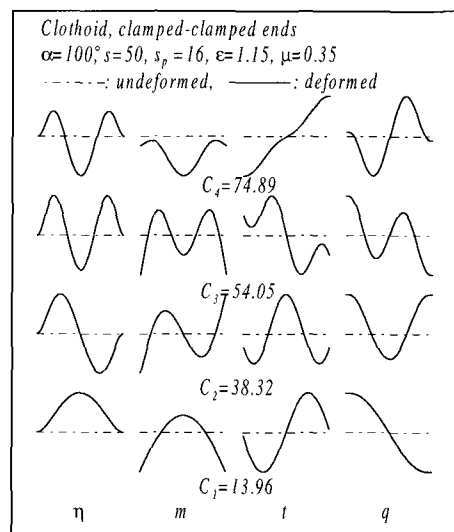
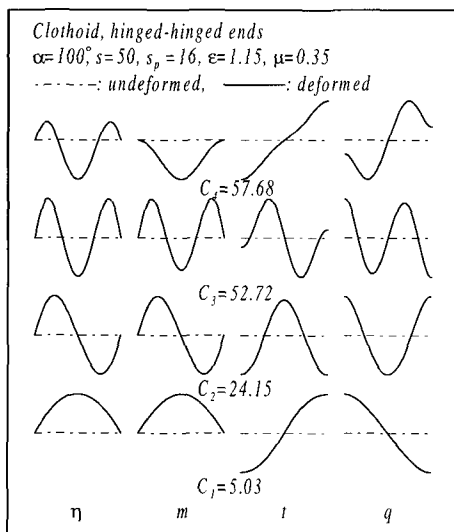


그림 7 진동형의 예

전단력 q 의 진동형은 제 1, 3, 4 모드가 역대칭 진동형, 제 2 모드가 대칭진동형인 것을 알 수 있다. 축대칭 구조의 경우에 진동형은 대칭과 역대칭 진동이 교대로 발생하는 것이 일반적이나 구조의 변수값 변화에 따라 그 순서가 변화할 수 있으며 그림 7의 진동형이 그러한 예이다. 산출된 진동형으로부터 상대진폭의 크기, 최대 진폭의 위치 및 무변위 위치 등을 파악할 수 있어 곡선보의 설계시 설계자료로 사용할 수 있다.

5. 결 론

이 연구는 크로스오이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 곡선보가 진동할 때 부재의 미소요소에 발생하는 합응력과 관성력에 대한 동적 평형방정식을 이용하여 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식과 단부조건에 대한 무차원 경계조건식을 유도하였다. 유도된 상미분방정식을 크로스오이드 완화곡선을 갖는 수평 곡선보에 적용하여 회전-회전 및 고정-고정 보의 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 본 연구와 ADINA의 고유진동수를 비교하여 본 연구결과의 타당성을 검증하였다. 수치해석 예제에서는 곡선보의 중심각, 세장비, 강성변수 및 전단변수 등이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였고, 수직변위 및 합응력의 진동형을 나타내었다. 본 연구에서 얻어진 결과들은 수평 곡선교량 등과 같은 곡선형 부재의 설계시에 고유진동수와 진동형을 제공할 수 있어 구조공학 분야에서 그 활용성이 매우 기대된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호 : 2000-1-31100-006-1)지원으로 수행된 결과의 일부이며, 재단의 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. J. M. Snyder and J. F. Wilson, "Free Vibrations of Continuous Horizontally Curved Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 157, No. 2, 1992, pp.345~355
2. A. K. Gupta and W. P. Howson, "Exact Natural Frequencies of Plane Structures Composed of Slender Elastic Curved Members", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No. 2, 1994, pp.145~157
3. 강영중, 최영준, "박판 수평곡선보의 자유진동," 한국강구조학회 논문집, 제7권, 제4호, 1995, pp. 243~252
4. 이병구, 이광범, 오상진, 진태기, "뒹과 회전관성을 고려한 수평 곡선보의 자유진동 해석," 한국전산구조공학회 논문집, 제14권, 제1호, 2001, pp. 35~42.
5. 이병구, 진태기, 최규문, 이태은, "여러 개의 스프링으로 탄성 지지된 수평 곡선보의 자유진동," 한국소음진동학회 논문집, 제11권, 제5호, 2001, pp.101~107
6. B. K. Lee, K. K. Park, S. J. Oh and T. K. Jin, "Free Vibrations of Non-Circular Curved Beams Resting on Pasternak Foundation", *Proceedings of APCOM'01*, University of New South Wales, Sydney, Australia, 2001, pp. 1497~1502
7. E. Volterra and J. H. Gaines, *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, 1971, pp.356 ~358
8. S. P. Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering*, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc, 1974
9. J. Uren and W. F. Price, *Surveying for Engineers*, Macmillan Press Ltd, 1994
10. A. W. Al-Khafaji and J. R. Tooley, *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, 1986
11. S. J. Oh, B. K. Lee and I. W. Lee, "Natural Frequencies of Non-circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, 1999, pp.23~33