

PRC연속보 최적설계에서 단면의 유효깊이 변화를 고려한 DCOC알고리즘 개발

Development of DCOC Algorithm Considering the Variation of Effective Depth in the Optimum Design of PRC Continuous Beam

Cho, Hong-Dong Han, Sang-Hoon

(논문접수일 : 2001년 7월 11일 ; 심사종료일 : 2002년 5월 28일)

五
六

본 연구에서는 직사각형 단면을 갖는 프리스트레스 철근콘크리트보(PRC)의 최소경비설계를 수행하였다. 목적함수로서 전설경비는 콘크리트 경비, 긴장재 경비, 철근 경비 그리고 거푸집 경비를 포함하였으며 이를 최소화하였다. 설계제약조건으로는 시방서상의 최대처짐제약, 휨 및 전단강도제약, 연성제약 그리고 설계변수에 대한 상·하한 제약을 고려하였다. 문-터커 필요조건을 이용하여 최적성 규준을 설계변수의 항으로 명시적으로 유도하였으며, 이때 설계변수로는 보의 유효깊이, 긴장재의 최대편심거리 그리고 철근비로 취하였고, 긴장재의 형상은 2차 포물선함수로 가정하였다. 또한 본 연구에서는 요소별로 변화하는 단면을 갖는 경우와 전경간에 걸쳐 일정한 단면을 갖는 경우에 대하여 고려하였고, 긴장재의 경간별 최대편심을 설계변수화 하였다. 그리고 수치예를 들어 개발된 기법의 적용성과 효율성을 보였다.

핵심용어 : 이산성, 연속형, 최적성, 규준, 쿤-티커 필요조건, 설계제약조건, 실제 시스템

Abstract

This paper describes the minimum cost design of prestressed reinforced concrete (PRC) beam with rectangular section. The cost of construction as objective function which includes the costs of concrete, prestressing steel, non-prestressing steel, and formwork is minimized. The design constraints include limits on the maximum deflection, flexural and shear strengths, in addition to ductility requirements, and upper-lower bounds on design variables as stipulated by the specification. The optimization is carried out using the methods based on discretized continuum-type optimality criteria(DCOC). Based on Kuhn-Tucker necessary conditions, the optimality criteria are explicitly derived in terms of the design variables - effective depth, eccentricity of prestressing steel and non-prestressing steel ratio. The prestressing profile is prescribed by parabolic functions. In this paper the effective depth is considered to be freely-varying and one uniform for the entire multispan beam respectively. Also the maximum eccentricity of prestressing force is considered in every span. In order to show the applicability and efficiency of the derived algorithm, several numerical examples of PRC continuous beams are solved.

Keywords : Discretized continuum-type optimality criteria(DCOC), Kuhn-Tucker necessary conditions, design constraints, real system.

* 책임저자, 정희원 · 충북대학교 토목공학과 교수
전화: 043-261-2404; Fax: 043-276-4955
E-mail: dcoc@orgio.net

* 정회원 · 충북대학교 토목공학과 교수

- 이 논문에 대한 토론을 2002년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 9월 허에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

일반적인 최적화 방법들은 설계변수의 수와 제약조건의 수가 증가하게 되면 최적해에 도달하기 위해 재설계과정에서 요구되는 구조 재해석의 수가 증가하게 되어 그 능력에 제한을 받게 된다. 그러나 본 연구에 사용된 이산성연속형 최적성규준(Discretized Continuum-type Optimality Criteria, DCOC)방법은 설계변수의 수와 변위제약 이외의 제약조건의 수에 영향을 거의 받지 않으므로 주로 응력이나 강도제약에 의해 설계가 이루어지는 최적화 문제에 있어 높은 효율성을 이를 수 있다.^{1),2)} 본 연구에서는 경간별 유효깊이 변화를 갖는 프리스트레스보의 연구^{3~5)}에 이어 요소별, 전경간이 일정한 유효깊이를 갖는 문제로 확장·적용하였으며, 경간별 긴장재의 최대 편심을 고려함으로써 외측경간과 내측경간의 긴장재의 편심 비율에 대한 매개 변수의 산정절차를 제거할 수 있도록 하였다.

2. 최적설계문제 형성

2.1 설계변수

설계변수는 단면의 유효깊이, 경간별 긴장재의 최대 편심거리 x_{3s}^m 그리고 보 요소별 철근비 x_5^{em} 로 취하였다. 단면의 폭과 긴장재의 단면적은 상수이며, 설계변수 중 단면의 유효깊이는 요소별로 변화하는 경우(x_2^{em}), 경간별로 일정한 경우(x_2^m) 그리고 전경간에 걸쳐 일정한 경우(x_2)에 대하여 각각 고려하였다.

2.2 긴장재의 형상

동분포하중 재하시의 긴장재의 형상은 2차 포물선 함수로 가정하여, Fig. 1의 지지조건에 따라 식(1)과 같이 세 가지 형태로 표현될 수 있다.

$$x_3^{em} = \begin{cases} x_{3s}^m \left[6\left(\frac{\bar{s}}{L^m}\right)^2 - 5\frac{\bar{s}}{L^m} \right] & \text{type A} \\ x_{3s}^m \left[8\left(\frac{\bar{s}}{L^m}\right)^2 - 8\frac{\bar{s}}{L^m} + 1 \right] & \text{type B} \\ x_{3s}^m \left[6\left(\frac{\bar{s}}{L^m}\right)^2 - 7\frac{\bar{s}}{L^m} + 1 \right] & \text{type C} \end{cases} \quad (1)$$

여기서, x_{3s}^m 은 경간 m 에서 긴장재의 최대편심거리

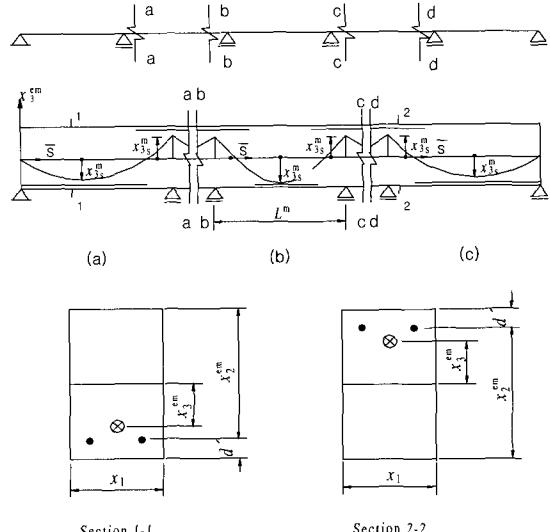


Fig. 1 Typical multi-span beams with tendon profiles,
(a) Type A-exterior span with a simple support at left end, (b) Type B-interior span,
(c) Type C-exterior span with a simple support at right end

이고, \bar{s} 는 원쪽 지점에서 임의 요소까지의 거리를 나타낸다.

2.3 목적함수

콘크리트, 거푸집, 철근 그리고 긴장재의 경비가 포함된 N_m 개의 경간을 갖고 각 경간이 N_e 개의 요소로 나누어진 PRC연속보의 목적함수는 설계변수의 항으로 식(2)와 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\psi = \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{e=1}^{N_e} \psi^{em}(x_2^{em}, \bar{x}_{3a}, x_5^{em}) \quad (2)$$

$$\psi^{em} = \left[x_2^{em} m_1 + x_2^{em} x_5^{em} m_2 + m_3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{x}_{3a}}{L^m} \right) + \bar{c}_1 \right] L^{em} \quad (3)$$

여기서,

$$\bar{c}_1 = [x_1 d' + (x_1 + 2d') c_{fc}] c_c$$

$$m_1 = (x_1 + 2c_{fc}) c_c$$

$$m_2 = x_1 (c_{sc} - 1.0) c_c$$

$$m_3 = 2A_{ps} (c_{bc} - 1.0) c_c$$

또한, c_c 는 콘크리트경비, c_{fc} , c_{sc} , c_{pc} 는 각각 콘크리트경비를 기준으로 한 거푸집, 철근, 긴장재의 상대 경비를 나타낸다.

2.3 제약조건

2.3.1 처짐제약조건

처짐제약조건식은 지정된 절점에서의 최대처짐 u_D 가 허용처짐 Δ_{al} 보다 작아야 한다는 조건에 의해 식(4)와 같이 나타낼 수 있다. 처짐계산을 위한 휨강성은 $EI^{em} = l_2(x_2^{em})^3$ 의 간략식⁶⁾을 사용하였으며, 여기서, $l_2 = 0.045E_c x_1$ 이다.

$$u_D - \Delta_{al} \leq 0 \quad (4)$$

식(4)의 최대처짐은 유연도정식화에 의해 긴장재에 의한 2차효과를 포함하여 식(5)와 같이 나타낼 수 있으며, 이 식은 라그랑지승수의 근사화⁷⁾에 대한 식을 유도하기 위해 사용된다.

$$u_D = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{l_2(x_2^{em})^3} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} Q_1^{em} &= \int_{L^{em}} M \bar{M} ds \\ &= \frac{M_{Al}^{em} L^{em}}{2} [2 \bar{M}_A^{em} - \bar{V}_A^{em} L^{em}] \\ &\quad - \frac{V_{Al}^{em} (L^{em})^2}{6} [3 \bar{M}_A^{em} - 2 \bar{V}_A^{em} L^{em}] \\ &\quad + \frac{\omega_d^m (L^{em})^3}{24} [4 \bar{M}_A^{em} - 3 \bar{V}_A^{em} L^{em}] \end{aligned} \quad (6)$$

$$Q_2^{em} = Q_{21}^{em} - Q_{22}^{em} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Q_{21}^{em} &= \frac{M_{AE}^{em} L^{em}}{2} [2 \bar{M}_A^{em} - \bar{V}_A^{em} L^{em}] \\ &\quad - \frac{V_{AE}^{em} (L^{em})^2}{6} [3 \bar{M}_A^{em} - 2 \bar{V}_A^{em} L^{em}] \\ &\quad - \frac{\omega_p^m (L^{em})^3}{24} [4 \bar{M}_A^{em} - 3 \bar{V}_A^{em} L^{em}] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Q_{22}^{em} &= \int_{L^{em}} M_{pe}^{em} \bar{M} ds \\ &= \int_{L^{em}} M_{pe}^{em} (\bar{M}_A^{em} - \bar{V}_A^{em}) ds \end{aligned} \quad (9)$$

2.3.2 휨강도제약조건

설계휨강도는 보요소 내의 계수휨강도 보다 작지 않아야 하므로 식(10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_f^{em} = \frac{|M_{max}^{em}|}{M_{ur}^{em}} - 1.0 \leq 0 \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} M_{ur}^{em} &= \phi \left[f_{ps} A_{ps} \left(d_p - \frac{a}{2} \right) + f_y A_s \left(x_2^{em} - \frac{a}{2} \right) \right] \\ a &= \frac{A_{ps} f_{ps} + A_s f_y}{0.85 f_{ck} x_1} \\ f_{ps} &= f_{pu} \left[1 - \frac{\gamma_p}{\beta_1} \left\{ \rho_p \frac{f_{pu}}{f_{ck}} + \frac{x_2^{em}}{d_p} \omega \right\} \right] \\ A_s &= x_1 x_2^{em} x_5^{em}, \quad \rho_p = \frac{A_{ps}}{x_1 d_p} \\ \omega &= \rho \frac{f_y}{f_{ck}}, \quad \rho = \frac{A_s}{x_1 x_2^{em}} \\ d_p &= \frac{x_2^{em} + d'}{2} + x_3^{em} \end{aligned}$$

긴장재의 종류에 따른 계수 γ_p 는 0.28로 하였으며, 중립축 계수는 $\beta_1 = 0.85 - 0.05(f_{ck} - 280)/70$ 으로 구하였고, 그 범위는 $0.65 \leq \beta_1 \leq 0.85$ 이다.

2.3.3 전단강도제약조건

설계전단강도는 위험단면에서의 계수전단강도보다 작지 않아야 하므로, 식(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_s^{em} = \frac{|V_{max}^{em}|}{V_{ur}^{em}} - 1.0 \leq 0 \quad (11)$$

여기서, $V_{ur}^{em} = 0.8(0.53 + 2.12)\sqrt{f_{ck}} x_1 x_2^{em}$

2.3.4 한계제약

연성파괴를 유도하기 위한 철근비의 상 · 하한제약조건은 식(12)와 같으며, 철근비의 하한치와 상한치는

식(13), 식(14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$x_{5l}^{em} \leq x_5^{em} \leq x_{5u}^{em} \quad (12)$$

$$x_{5l}^{em} = \max \left\{ \frac{0.002(x_2^{em} + d')}{x_2^{em}}, \frac{14}{f_y} - x_4^{em} \right\} \quad (13)$$

$$x_{5u}^{em} = \frac{x_{54} - x_{52}x_{53}}{x_{51}x_{52}} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} x_{51} &= \frac{2f_y}{f_{ck}(x_2^{em} + d' + 2x_3^{em})} \\ x_{52} &= \left[1.0 - \frac{2\gamma_p A_{ps} f_{pu}}{\beta_1 x_1 (x_2^{em} + d' + 2|x_3^{em}|) f_{ck}} \right] \\ x_{53} &= \frac{A_{ps} f_{pu}}{x_1 x_2^{em} f_{ck} (x_2^{em} + d' + 2x_3^{em})} \\ x_{54} &= 0.36 \beta_1 \end{aligned}$$

2.4 최적기준

처짐제약, 강도제약, 한계제약 등의 제약조건식과 실제시스템과 수반시스템의 평형방정식을 포함한 확장 라그랑지함수는 각 제약조건에 대한 라그랑지승수를 이용하여 식(15)와 같이 나타낼 수 있다.

Minimize

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \psi^{em} + \mu \left[\sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{Q_1^{em} + Q_2^{em}}{l_2^{em} (x_2^{em})^3} \right) - A_{al} + \eta \right] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^{em} [g_j^{em} + \omega_j^{em}] \\ &\quad + (\alpha^R)^T [\{P\} - [B][F_f]] \\ &\quad + (\alpha^V)^T [\{\bar{P}\} - [B][\bar{F}_f]] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \beta_i^{em} (-x_i^{em} + (x_i^{em})^L + s_i^{em}) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \gamma_i^{em} (x_i^{em} - (x_i^{em})^U + \bar{s}_i^{em}) \quad (15) \end{aligned}$$

여기서, μ , λ_j^{em} , $\{\alpha^R\}$, $\{\alpha^V\}$, β_i^{em} 그리고 γ_i^{em} 은 라그랑지승수들이고 η 는 이완변수, ω_j^{em} , s_i^{em} , \bar{s}_i^{em} 은 이완함수들이다. 식(15)의 우변의 네 번째 항과 다섯 번째 항은 실제와 수반시스템의 평형방정식을 나타낸다.

식(15)의 확장라그랑지함수는 정류해를 갖기 위해 Kuhn-Tucker 필요조건을 만족해야 한다. 따라서 보의 유효깊이 x_2^{em} 에 대한 $\bar{\phi}$ 의 변분, 긴장재의 최대 편심거리 x_{3s}^{em} 에 대한 $\bar{\phi}$ 의 변분 그리고 각 요소에서의 철근비 x_5^{em} 에 대한 $\bar{\phi}$ 의 변분은 모두 0 (zero)이 되어야 하며, 이를 기초로 설계변수의 개선이 이루어진다.

2.4.1 유효깊이 x_2^{em} 에 대한 $\bar{\phi}$ 의 변분

확장라그랑지함수에 대한 유효깊이 x_2^{em} 의 변분은 식(16)과 같다. 이 식과 휨강도제약조건인 식(10)을 이용하여, 처짐과 휨강도를 만족하는 유효깊이가 계산되고, 처짐제약조건을 이용하여 라그랑지승수 μ 가 계산된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2^{em}} &= \frac{3\mu(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{l_2(x_2^{em})^4} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{ur}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2^{em}} \\ &\quad - \lambda_2^{em} \frac{|V_{ur}^{em}|}{(V_{ur}^{em})^2} \frac{\partial V_{ur}^{em}}{\partial x_2^{em}} + \mu \bar{u}_c^{em} - (\beta_2^{em} - \gamma_2^{em}) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{u}_c^{em} &= -\frac{x_1 w_c L^{em}}{12} [6 \bar{v}_A^{em} + \bar{\theta}_A^{em} L^{em} \\ &\quad + 6 \bar{v}_B^{em} - \bar{\theta}_B^{em} L^{em}] \end{aligned}$$

\bar{u}_c^{em} 은 실제시스템의 평형방정식에 자중 $W = x_1(x_2^{em} + d')$ 을 영향을 포함한 것이다.

2.4.2 긴장재의 최대편심거리 x_{3s}^{em} 에 대한 $\bar{\phi}$ 의 변분

확장라그랑지함수에 대한 긴장재 편심 x_{3s}^{em} 의 변분은 식(17)과 같다. 이 식은 최대편심거리 x_{3s}^{em} 을 구하기 위해 사용된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_{3s}^{em}} &+ \frac{\mu}{l_2(x_2^{em})^3} \frac{\partial Q_2^{em}}{\partial x_{3s}^{em}} \\ &- \lambda_1^{em} \frac{|M_{ur}^{em}| \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_{3s}^{em}} - M_{ur}^{em} \frac{\partial |M_{ur}^{em}|}{\partial x_{3s}^{em}}}{(M_{ur}^{em})^2} \\ &+ \frac{\lambda_2^{em}}{V_{ur}^{em}} \frac{\partial |V_{ur}^{em}|}{\partial x_{3s}^{em}} - (\beta_3^{em} - \gamma_3^{em}) = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

2.4.3 철근비 x_5^{em} 에 대한 $\bar{\phi}$ 의 변분

확장라그랑지함수에 대한 철근비 x_5^{em} 의 변분은 식(18)과 같으며, 이 식은 휨강도제약조건에 대한 라그랑지승수 λ_1^{em} 을 계산하기 위해 사용된다.

$$\frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_5^{em}} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_5^{em}} - (\beta_5^{em} - \gamma_5^{em}) = 0 \quad (18)$$

3. 설계변수 갱신 절차

유도된 확장라그랑지함수는 Kuhn-Tucker 조건을 통하여 설계변수 수 만큼의 최적기준식으로 나타나며, 이 식으로부터 설계변수들을 갱신하게 된다. 갱신절차에 있어 설계변수뿐만 아니라, 그에 상응하는 라그랑지승수도 미지수이므로 방정식의 수에 비해 미지수의 수가 많아서 해를 구할 수 없게 된다. 그러나, 실제 공학 구조물에서 모든 라그랑지승수가 활성인 경우는 거의 없으므로 그 중 어떤 조합에 의한 라그랑지승수만이 활성이라고 가정하면 비활성인 라그랑지승수에 대한 조건식들은 영(zero)이 되므로 이러한 라그랑지승수의 활성조합에 의해 설계변수의 갱신이 가능하다.

3.1 활성제약조건에 의한 설계변수 갱신

각 제약조건에 대한 라그랑지승수의 활성유무에 따라 최적성조건식과 각 제약조건식으로부터 설계변수가 갱신된다.

3.1.1 처짐제약과 휨강도 제약을 만족하는 유효값이 x_2^{em} 의 계산

처짐제약과 휨강도제약조건에 대한 라그랑지승수 μ 와 λ_1^{em} 이 활성이라고 가정하면, 식(16)은 한계제약조건이 삭제되어 식(19)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2^{em}} - \frac{3\mu}{l_2} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{(x_2^{em})^4} \\ & - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2^{em}} + \mu \bar{u}_c^{em} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

또한, 휨강도에 대한 식(18)로부터 λ_1^{em} 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_1^{em} = \left[\frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_5^{em}} (M_{ur}^{em})^2 \right] \left[|M_{max}^{em}| \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_5^{em}} \right] \quad (20)$$

식(19)과 식(20)으로부터 유효값이 x_2^{em} 을 구하는 식(21)을 얻을 수 있다.

$$(x_{2dm}^{em})^4 = \frac{3\mu}{l_2} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{\frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2^{em}} - \bar{\lambda}_1 + \mu \bar{u}_c^{em}} \quad (21)$$

여기서,

$$\bar{\lambda}_1 = \left[\frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_5^{em}} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2^{em}} \right] \left[\frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_5^{em}} \right] \quad (22)$$

식(21)로부터 계산된 보요소의 유효값이 x_{2dm}^{em} 은 휨강도를 만족해야 하므로 식(22)의 x_2^{em} 항들은 휨강도제약조건식으로부터 계산된 유효값이 x_{2f}^{em} 으로 대체된다.

여기서, x_{2f}^{em} 은 요소 내의 절대최대모멘트 $|M_{max}^{em}|$ 을 이용하여 식(10)으로부터 식(23)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_{2f}^{em} = \sqrt{\frac{|M_{max}^{em}|}{\phi_m \left\{ f_{ps} A_p (d_p - 0.5a) / (x_2^{em})^2 + f_y x_1 x_5^{em} \left(1 - \frac{0.5a}{x_2^{em}} \right) \right\}}} \quad (23)$$

3.1.2 전단강도제약조건에 의한 유효값이의 계산

전단강도제약을 만족하는 보요소의 유효값이는 전단강도 제약조건으로부터 식(24)와 같이 나타낼 수 있다.

$$x_{2v}^{em} = \frac{|V_{max}^{em}|}{0.8(0.53+2.12)\sqrt{f_{ck}}x_1} \quad (24)$$

3.1.3 경간별 최대편심거리 x_{3s}^{em} 의 계산

각 경간에서의 긴장재 형상의 최대편심거리 x_{3s}^{em} 는 식(17)로부터 식(25)과 같이 구해진다.

$$x_{3s(new)}^{em} = x_{3s(old)}^{em} + \varepsilon_{x3s}^{em} \quad (25)$$

여기서,

$$\varepsilon_{x3s}^{em} = - \left(\sum_{e=1}^{N_e} F_{x3s}^{em} \right) \left/ \left(\sum_{e=1}^{N_e} F_{x3sd}^{em} \right) \right.$$

$$F_{x_{3s}^{em}} = \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_{3s}^{em}} + \frac{\mu}{l_2(x_2^{em})^3} \frac{\partial Q_2^{em}}{\partial x_{3s}^{em}}$$

$$- \lambda_1^{em} \frac{\left(|M_{max}^{em}| \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_{3s}^{em}} - M_{ur}^{em} \frac{\partial |M_{max}^{em}|}{\partial x_{3s}^{em}} \right)}{(M_{ur}^{em})^2}$$

$$F_{x_{3sd}^{em}} = \frac{\partial F_{x_{3s}^{em}}}{\partial x_{3s}^{em}}$$

3.1.4 철근비 x_5^{em} 의 계산

유효깊이 x_2^{em} 과 긴장재의 최대편심 x_{3s}^{em} 에 대하여 휨강도 제약조건으로부터 소요의 철근비를 계산한다.

$$|M_{max}^{em}| - M_{ur}^{em} = 0 \quad (26)$$

식(26)을 통해 계산된 철근비가 주어진 하한치보다 작을 경우 식(27)과 같이 하한치로 대체된다.

$$x_5^{em} = x_{5l}^{em} \quad (27)$$

그리고 식(26)로부터 계산된 철근비는 식(14)와 식(28)로 계산된 최대철근비 보다는 작아야 한다.

$$x_{5max} = \frac{3,825f_{ck}k_1}{f_y(6,000 + f_y)} - x_4^{em} \quad (28)$$

3.2 라그랑지승수의 개선

처짐에 대한 라그랑지승수 μ 는 처짐제약조건으로부터 계산된다. 처짐제약조건이 활성인 보 요소를 N_{em}^D , 나머지 요소들을 $N_{em}^L(N_{em} = N_{em}^D + N_{em}^L)$ 로 표현하면 중첩의 원리에 의하여 최대처짐 u_D 는 식(29)과 같이 표현된다.

$$u_D = \sum_{e=1}^{N_{em}^D} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{l_2(x_2^{em})^3} + \sum_{e=1}^{N_{em}^L} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{l_2(x_2^{em})^3} \quad (29)$$

식(29)에서 N_{em}^D 요소의 유효깊이를 식(21)로 대체하면 식(4)로부터 μ 를 개선하기 위한 식(30)을 구할 수 있다.

$$\mu_{new}^{\frac{3}{4}} = \frac{\sum_{N_{em}^D} \{(Q_1^{em} + Q_2^{em}) / [l_2(\bar{x}_2^{em})^{3/4}]\}}{\mathcal{A}_{al} - \sum_{N_{em}^L} \{(Q_1^{em} + Q_2^{em}) / [l_2(x_2^{em})^3]\}} \quad (30)$$

여기서,

$$\bar{x}_2^{em} = \frac{3}{l_2} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{\frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_2^{em}} - \lambda_1^{em} + \mu \bar{u}_c^{em}}$$

3.3 유효깊이 변화에 따른 알고리즘의 재정식화

본 절에서는 단면의 유효깊이가 경간별로 일정한 경우와 전체 경간에 걸쳐 일정한 경우에 대하여 다루고 있다. 유효깊이가 경간 내에서 일정한 경우 고려되는 유효깊이 수는 경간 수와 같고, 전경간이 일정한 경우에 대해서는 전체 경간에서 하나의 유효깊이만 고려된다.

3.3.1 경간별로 일정한 단면을 갖는 경우

단면의 유효깊이가 경간 내에서 일정한 경우의 정식화는 유효깊이에 대한 설계변수의 선택이 x_2^{em} 에서 x_2^m 로 변화되며, 유효깊이에 대한 설계변수의 수는 $N_m \times N_e$ 에서 N_m 개로 줄어들게 된다.

요소에 대한 최적기준식인 식(16)은 경간에 대하여 식(31)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e} & \left\{ \frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2^m} - \frac{3\mu(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{l_2(x_2^m)^4} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2^m} \right. \\ & - \lambda_2^{em} \frac{|V_{max}^{em}|}{(V_{ur}^{em})^2} \frac{\partial V_{ur}^{em}}{\partial x_2^m} + \mu \bar{u}_c^{em} \Big\} \\ & - (\beta_2^{em} - \gamma_2^{em}) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

전단강도 제약조건이 비활성일 경우 식(31)은 식(32)와 같이 표현된다.

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[\frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2^m} - \frac{3\mu}{l_2} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{(x_2^m)^4} \right. \\ \left. - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2^m} + \mu \bar{u}_c^{em} \right] = 0 \quad (32)$$

이로부터 처짐과 휨강도를 만족하는 경간 내의 유효깊이는 식(33)과 같이 표현된다.

$$(x_{2dm}^{em})^4 = \frac{3\mu}{l_2} \frac{\sum_{e=1}^{N_e} (Q_1^{em} + Q_2^{em})}{\sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2^m} - \bar{\lambda}_1 + \mu \bar{u}_c^{em} \right)} \quad (33)$$

요소에서 경간에 대한 식으로 전환되었으므로, 이때 필요한 최대모멘트는 요소 내의 절대최대모멘트 $|M_{max}^{em}|$ 에서 경간 내의 절대최대모멘트 $|M_{max}^{em}|$ 로 선택된다.

3.3.2 전경간이 일정한 단면을 갖는 경우

단면의 유효깊이가 전경간에 걸쳐 일정한 경우 유효깊이에 대한 설계변수의 선택은 x_2^{em} 에서 x_2 로 변화된다. 식(16)은 식(34)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2} - \frac{3\mu(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{l_2(x_2)^4} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2} - \lambda_2^{em} \frac{|V_{max}^{em}|}{(V_{ur}^{em})^2} \frac{\partial V_{ur}^{em}}{\partial x_2} + \mu \bar{u}_c^{em} \right\} - (\beta_2^{em} - \gamma_2^{em}) = 0 \quad (34)$$

식(34)로부터 처짐과 휨에 대한 라그랑지승수가 활성일 경우의 최적기준식은 식(35)와 같고, 이로부터 유효깊이는 식(36)과 같이 계산된다.

$$\sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \left[\frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2} - \frac{3\mu}{l_2} \frac{(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{(x_2)^4} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2} + \mu \bar{u}_c^{em} \right] = 0 \quad (35)$$

$$(x_{2dm})^4 = \frac{3\mu}{l_2} \frac{\sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} (Q_1^{em} + Q_2^{em})}{\sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{\partial \psi^{em}}{\partial x_2} - \lambda_1^{em} + \mu \bar{u}_c^{em} \right)} \quad (36)$$

휨강도제약조건을 만족하는데 필요한 모멘트는 전체

경간 내에서 절대최대모멘트 $|M_{max}|$ 가 되며, 이때의 유효깊이는 식(23)에서 요소내의 절대최대모멘트인 $|M_{max}^{em}|$ 을 $|M_{max}|$ 로 대체 후 계산된다.

4. 수치예

개발된 알고리즘의 신뢰성 및 효율성을 검증하기 위하여 3경간 연속보에 대하여 최적화문제를 수행하였다. 설계변수 중 유효깊이는 요소별로 변화하는 경우, 각 경간별로 일정한 경우 그리고 전경간에 대해 일정한 경우로 구분하였다.

처점제약조건에서의 허용처점은 $l/1000$ 로 하였으며, 목적함수와 설계변수의 수렴오차는 모두 1×10^{-5} 으로 하였다. 보의 폭과 긴장재의 면적은 각각 50cm와 400mm²으로 하였으며 d 와 d"은 각각 6cm와 5cm로 하였다.

Table 1은 본 연구에서 사용된 재료의 특성치와 경비자료(data)이며 모든 수치예제는 Pentium 120MHz PC에서 수행하였다.

4.1 3경간 PRC연속보

Fig. 2와 같이 경간의 길이가 각각 15m, 20m, 그리고 10m인 3경간 연속보에 활하중 20kgf/cm와 고정하중 15kgf/cm가 작용하고 있으며, 자중이 고려된 상태에서의 최적설계를 수행하였다.

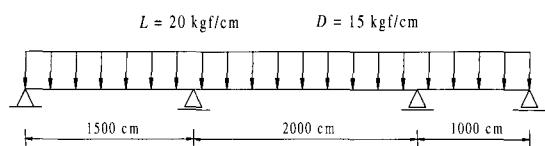


Fig. 2 A 3 span PRC beam(geometry and service loading)

Table 1 Material properties and cost data

Material properties			Actual costs	Relative costs*
Concrete	Steel	Tendon steel		
$f_{ck}=350\text{kgf}/\text{cm}^2$ $E_c=232,379\text{kgf}/\text{cm}^2$ $w_c=2.5\text{tonf}/\text{m}^3$	$f_y=4,000\text{kgf}/\text{cm}^2$ $E_s=2,000,000\text{kgf}/\text{cm}^2$	$f_{pu}=20,000\text{kgf}/\text{cm}^2$ $f_{py}/f_{pu}=0.91$	$c_c=49,100\text{won}/\text{m}^3$ $c_f=8,203\text{won}/\text{m}^2$ $c_s=2,128,244\text{won}/\text{m}^3$ $c_p=7,699,856\text{won}/\text{m}^3$	$c_{fc}=0.17$ $c_{sc}=43.35$ $c_{pc}=156.82$

* Relative costs of form, steel, and tendon standardizing the concrete

4.1.1 요소별로 변화하는 단면을 갖는 경우(Case I)

3경간 연속보에 대하여 유효깊이를 요소별로 변화시켜 최적설계를 수행하였다. 요소별로 유효깊이가 변화하는 경우 고려되는 설계변수는 요소내의 유효깊이, 철근비, 그리고, 경간 내에서 긴장재의 최대 편심이다.

Table 3은 동일한 초기치에 대하여 요소의 수를 4, 10, 20개로 변화시켰을 경우의 최적설계시간과 경간별 긴장재의 최대편심, 그리고, 경비를 보여주고 있다. 요소수 변화에 따라 설계변수와 구조해석 절점수의 증가로 인해 최적설계에 소요되는 시간은 증가되지만 좀 더 염밀한 설계로 인해 경비가 감소함을 알 수 있다.

Table 2는 경간별 요소수가 4개인 경우의 초기치

변화에 따른 최적결과를 나타낸 것이다. 유효깊이를 120cm에서 200cm로 변화시키고 긴장재의 최대편심을 18cm에서 30cm로 변화시켜가면서 수행한 결과, 설계변수의 초기치가 변화해도 목적함수는 거의 일정한 값으로 수렴하고 있음을 알 수 있다.

Table 4는 요소수가 10개인 경우에 대한 최적유효깊이, 소요 철근량, 각 경간에서의 최대편심, 그리고 지배제약을 나타낸 것이다. 유효깊이가 요소별로 변화하기 때문에 다양한 지배제약에 의해 설계가 이루어지고 있다

Fig. 3은 유효깊이가 요소별로 변화하는 10요소 3경간 PRC연속보의 단면력도와 단면의 기하학적 형상을 보여주고 있다.

Table 2 Optimum results of a 3 span PRC beam with different initial values

x_{20} (cm)	x_{3s0} (cm)	x_{50}	x_{3s1} (cm)	x_{3s2} (cm)	x_{3s3} (cm)	ϕ int. (won)	ϕ opt. (won)
120	18	0.005	14.1	23.9	14.1	2,930,679	2,460,882
120	20	0.005	14.1	23.9	14.1	2,931,292	2,460,882
120	30	0.005	14.1	23.9	14.1	2,934,352	2,460,881
150	18	0.005	14.1	23.9	14.1	3,553,756	2,460,881
150	20	0.005	14.1	23.9	14.1	3,554,368	2,460,882
150	30	0.005	14.1	23.9	14.1	3,557,429	2,460,882
200	18	0.005	14.1	23.9	14.1	4,592,218	2,460,883
200	20	0.005	14.1	23.9	14.1	4,592,831	2,460,883
200	30	0.005	14.1	23.9	14.1	4,595,890	2,460,882

Table 3 Optimum results according to number of elements

No. of elements	No. of design variables	CPU time(s)	x_{20} (cm)	x_{3s0} (cm)	x_{50}	x_{3s1} (cm)	x_{3s2} (cm)	x_{3s3} (cm)	ϕ int. (won)	ϕ opt. (won)
4	27	0.845	200	20	0.005	14.1	23.9	14.1	4,592,831	2,460,883
10	63	2.778	200	20	0.005	17.6	42.0	14.1	4,592,831	2,081,579
20	123	24.415	200	20	0.005	17.6	43.7	14.1	4,592,831	2,002,541

Table 4 Optimum design of a 3 span PRC beam in Case I (10 elements)

Span	Initial effective depth (cm)	Eccentricity of tendon(cm)	Effective depth(cm)									
			Required area of steel(cm^2)									
			Control constraints									
1	120	17.6	44.1	49.2	51.3	51.3	47.4	44.1	78.9	107.9	125.2	140.0
			13.34	23.81	25.46	25.46	22.04	6.18	10.09	25.53	42.23	59.24
			R_{lm}	R_{mm}	R_{mm}	R_{mm}	R_{mm}	R_{lm}	R_{dl}	R_{dm}	R_{dm}	R_{dm}
2	120	42.0	125.8	91.2	52.6	71.8	100.1	106.4	95.8	73.4	48.3	95.1
			67.45	53.22	27.04	15.05	16.75	16.28	19.59	20.33	20.13	35.27
			R_{dm}	R_{mm}	R_{lm}	R_{dm}	R_{dm}	R_{dm}	R_{dm}	R_{lm}	R_{dm}	R_{dm}
3	120	14.1	110.7	99.1	86.3	68.5	52.7	44.1	44.1	44.1	44.1	44.1
			29.53	21.44	12.48	8.23	5.87	5.01	5.01	5.01	5.01	5.01
			R_{dm}	R_{dm}	R_{dm}	R_{dl}	R_{dl}	R_{ll}	R_{ll}	R_{ll}	R_{ll}	R_{ll}

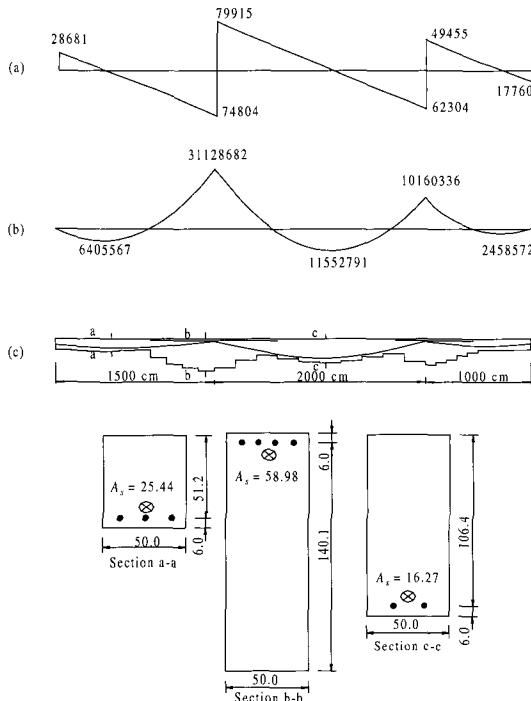


Fig. 3 A 3 span PRC beam in Case I (10 elements),
(a) S.F.D.(kgf) for optimum design, (b) B.M.D.
(kgf · cm) for optimum design, (c) Longitudinal
profile and cross-sections(cm, cm^2)

4.1.2 경간별로 일정한 단면을 갖는 경우(Case II)

Fig. 2의 3경간 PRC연속보를 각 경간별로 유효깊이가 일정하도록 하여 최적설계를 수행하였다. 이 경우 유효깊이에 대한 설계변수는 요소의 수에서 경간의 수로 줄어들게 되며, 다른 설계변수는 요소별로 유효깊이가

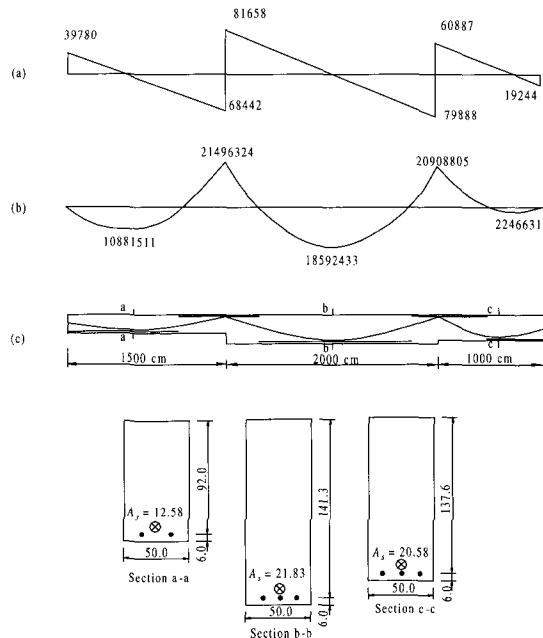


Fig. 4 A 3 span PRC beam in Case II (10 elements),
(a) S.F.D.(kgf) for optimum design, (b) B.M.D.
(kgf · cm) for optimum design, (c) Longitudinal
profile and cross-sections(cm, cm^2)

변화하는 경우와 동일하다.

Table 5는 10요소 3경간 연속보에 대한 최적결과이고 이때의 단면 형상과 단면력도, 그리고 단면형상을 Fig. 4에 나타내었다.

4.1.3 전경간이 일정한 단면을 갖는 경우(Case III)

전경간이 일정한 유효깊이를 갖는 경우의 최적화 문

Table 5 Optimum design of a 3 span PRC beam in Case II (10 element)

Span	Effective depth(cm)	Eccentricity of tendon(cm)	Required area of steel(cm^2)									
			Control constraints									
1	92.0	38.0	A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	A_{s4}	A_{s5}	A_{s6}	A_{s7}	A_{s8}	A_{s9}	A_{s10}
			12.43	12.43	12.58	12.48	12.48	12.43	12.43	12.43	27.02	53.82
2	141.3	62.6	R_{ml}	R_{ml}	R_{mm}	R_{mm}	R_{ml}	R_{ml}	R_{ml}	R_{ml}	R_{mm}	R_{mm}
			A_{sl1}	A_{sl2}	A_{sl3}	A_{sl4}	A_{sl5}	A_{sl6}	A_{sl7}	A_{sl8}	A_{sl9}	A_{sl0}
3	137.6	60.8	R_{dm}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dm}	R_{dm}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}
			A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	A_{s4}	A_{s5}	A_{s6}	A_{s7}	A_{s8}	A_{s9}	A_{s10}
			27.96	20.83	20.58	20.58	20.58	20.58	20.58	20.58	20.58	20.58

Table 6 Optimum design of a 3 span PRC beam in Case III (10 elements)

Span	Effective depth(cm)	Eccentricity of tendon(cm)	Required area of steel(cm^2)									
			Control constraints									
1	130.6	57.3	A_{s1}	A_{s2}	A_s	A_{sl}	A_s	A_{sf}	A_{sl}	A_s	A_{sl}	A_{s10}
			19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	21.27	41.60
2	130.6	57.3	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dm}	R_{dm}
			A_{s11}	A_{s12}	A_{s13}	A_{s14}	A_{s15}	A_{s16}	A_{s17}	A_{s18}	A_{s19}	A_{s20}
3	130.6	57.3	41.60	19.31	19.31	19.31	21.27	21.27	19.39	19.31	19.31	25.54
			R_{dm}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dm}	R_{dm}	R_{dl}	R_{dl}	R_{dm}	R_{dm}
			A_{s21}	A_{s22}	A_{s23}	A_{s24}	A_{s25}	A_{s26}	A_{s27}	A_{s28}	A_{s29}	A_{s30}
			28.54	20.80	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31	19.31
			R_{dm}	R_{dm}	R_{dl}							

제는 유효깊이에 대한 설계변수의 수가 전체 경간에 대하여 하나로 축소되며, 다른 설계변수의 수는 이전과 동일하다.

Table 6은 10요소 3경간 PRC연속보에 대한 유효깊이와 소요철근량, 그리고 설계영역을 보여주고 있다. 전경간의 유효깊이가 일정한 경우, 전경간 내의 최대 전단력과 모멘트에 의해 유효깊이가 결정되므로, 단면력이 상대적으로 작은 요소에서는 철근비가 하한치 (R_{dl})로 설계되고 있다. 그리고 각 경간에서의 긴장재의 최대 편심은 동일하게 설계되고 있다.

Fig. 5는 전경간이 일정한 단면을 갖는 경우에 대한 10요소 3경간 PRC연속보의 단면력도와 단면형상을 나타내고 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 철근콘크리트 구조물과 같이 설계변수와 제약조건의 수가 많은 최적설계문제에서 높은 효율성을 보이는 이산형연속체최적기준방법을 이용하여 PRC연속보의 경비최소화 문제를 수행하였다. 특히, 기존의 연구와 달리 경간별 긴장재의 최대편심을 설계변수화하였고, 요소의 수와 유효깊이의 변화에 대한 제한을 두지 않았으며, 이에 따라 설계변수의 수와 제약조건의 수가 상당히 증가함에도 불구하고 최적해에 빠르게 수렴함을 보였다. 이는 최적설계 과정에서 알고리즘상의 모든 문제가 설계변수에 대해 명시적으로 표현되기 때문에 재설계 과정에서 요구되는 시간을 크게 절약할 수 있으므로 그 효율성이 매우 좋으며, 단면의 유효깊이 변화를 다양화하여 각 경우에서의 최적설계를

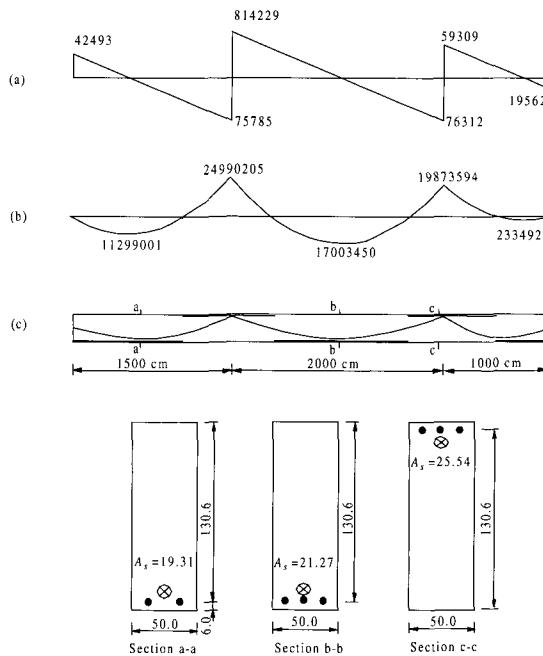


Fig. 5 A 3 span PRC beam in Case III(10 elements),
(a) S.F.D.(kgf) for optimum design, (b) B.M.D. (kgf · cm) for optimum design, (c) Longitudinal profile and cross-sections(cm, cm^2)

수행함으로써 실제 설계시의 예비설계단계에서 사용할 수 있도록 하였다.

참 고 문 헌

- Zhou, M., and Rozvany, G. I. N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large

- Systems Part I : Theory", *Structural Optimization*, Vol. 5, 1992, pp.12~25
2. Zhou, M., and Rozvany, G. I. N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large Systems Part II: Algorithm", *Structural Optimization*, Vol. 6, 1993, pp.250~262
3. Han, S. H., Adamu, A., and Karihaloo, B. L., "Minimum Cost Design of Multispan Partially Prestressed Concrete T-Beams Using DCOC", *Structural Optimization*, Vol. 12, 1996, pp.75 ~86
4. 한상훈, 조홍동, 이상근., "이산성 연속형 최적설계기준을 이용한 PPC 구조의 최적설계프로그램 개발", 한국전산구조공학회논문집, Vol. 10, No. 4, 1997, pp. 315~325
5. 조홍동, "DCOC를 이용한 PRC구조물의 최적설계", 박사학위논문, 충북대학교 2000, pp. 1~155
6. 조홍동, 한상훈, "DCOC를 이용한 철근 콘크리트 보의 최소경비설계", 한국전산구조공학회논문집, Vol. 13, No. 4, 2000, pp. 417~425
7. Zhou, M., and Rozvany, G. I. N., "An Improved Approximation Technique for the DCOC Method of Sizing Optimization", *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 5, 1996, pp.763~769