

정규화 기법을 이용한 구조물의 system identification과 활용 사례들



박 현 우*

1. 서론

사용중인 구조물은 피로 취약부의 균열 또는 지진과 같은 과도하중에 의해 발생한 손상에 의해서 처음 설계 시공시 추구했던 역학적 특성에 변화가 발생하게 된다. 지진과 같은 예상치 못한 경우에 대해서 구조물이 충분히 견딜 수 있도록 적절하고 합리적인 설계, 시공이 필수적이다. 그렇지만 그 모든 경우에 대해서 구조물에 초기에 가졌던 건전성을 유지한다는 보장은 하기 힘들다. 일단 구조물에 손상이 발생하게 되었을 때 성수대교붕괴와 같은 재난을 막기 위해서는 사용중인 구조물에 대한 체계적이고 정기적인 검사가 필요하다.

근래들어 사장교와 현수교와 같이 구조물이 복잡해지고 대형화되면서 구조물 건전성 감시(structural health monitoring)가 토목공학에서 크게 대두되고 있다. 구조물 건전성 감시는 구조물의 상태를 지속적으로 감시함으로써 시스템의 건전성과 안전성을 유추해내는 학문으로 정의할 수 있다. 특히 구조물 건전성 감시의 한축을 맡고 있는 system identification (이하 SI)분야는 높은 정도의 계측과 대용량의 수치연산을 빠른 시간내에 가능케하는 센서와 컴퓨터

기술의 급속한 발전에 힘입어 많은 연구가 진행되어 왔다. 여기서는 SI의 학문적인 토대와 그 응용 사례에 대해 간략하게 소개한다.

2. SI의 ill-posedness

일반적으로 공학문제는 그림 1과 같이 세가지 범주로 분류할 수 있다. 첫번째가 입력과 시스템을 알고 있을 때 응답을 구하는 해석(analysis) 또는 전방향 문제(forward problem)로 대부분의 공학문제들이 이 범주에 속한다. 두번째는 시스템과 응답을 알고 있을 때 입력을 유추해내는 재구성문제(reconstruction problem)로 우주선 기체표면의 열 전달 상수를 구하는 문제와 의학분야의 이미지선 명화(image enhancement) 등이 여기에 해당된다.¹⁾ 세번째가 입력과 응답을 알고 있을 때 시스템을 유추해내는 SI로서 매우 다양한 공학부문에서 다루고 있는 문제이다. 두번째의 재구성문제와 세번째의 SI 문제는 역해석(inverse analysis) 문제로 부른다.

해석문제는 대부분 해의 유일성, 그리고 연속성이 잘 보장되는 문제임에 반해 역해석 문제는 일반적으로 해의 유일성과 연속성이 보장되지 않는 ill-

* 한국원자력연구소 종합안전평가팀 박사후연구원

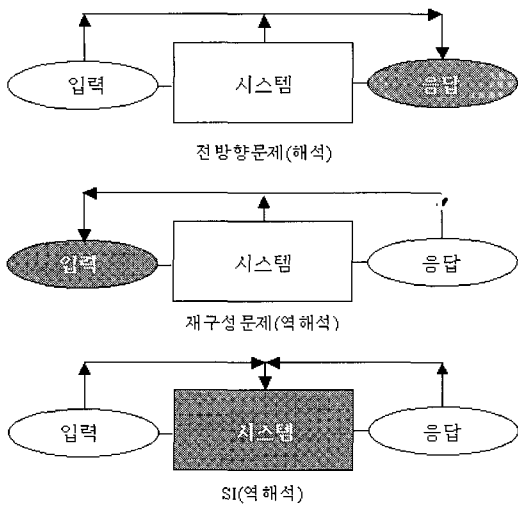


그림 1 공학문제의 세가지 범주

posedness를 가지게 된다.^{1)~7)} SI도 역해석문제가기 때문에, 이러한 ill-posedness에서 자유롭지 못하다. 역해석 문제의 ill-posedness에 대한 연구는 티코노프(A.N. Tikhonov)등에 의해서 다양하게 진행되어 왔다.¹⁾

SI를 위한 접근방법은 지배방정식으로부터 모델링된 대표적인 물성치를 추정하는 방법과 주어진 입력과 응답만을 가지고 지배방정식과는 상관없이 최적의 모델을 추정하는 방법이 있다. 전자는 물리 모델로부터 계산된 응답과 측정된 응답을 가장 근접하게 만드는 물성치들을 최적화를 이용해서 추정하는 최소자승법이 대표적이다. 후자의 경우는 ARMA, 인공신경망 등을 사용하여 측정된 응답을 가장 잘 맞출 수 있는 모델을 구성하게 되는데, 추정된 모델에서 구하는 미지값들이 물리량들과 직접적인 관련이 없다.

여기서는 물성치들을 직접 구해내는 최소자승법을 구조물의 SI에 적용한다.

그림 2과 같은 일반적인 탄성체에서 계산된 응답 \tilde{U}_i 와 측정된 응답 \bar{U}_i 의 자승오차를 최소화하는 물성치 \mathbf{x} 를 구하는 문제는 다음과 같은 최적화 문제로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{x}} \pi_E &= \sum_i \|\tilde{U}_i(\mathbf{x}) - \bar{U}_i\|_2^2 \\ \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{x}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

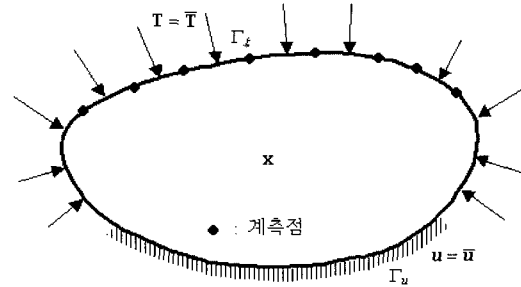


그림 2 일반적인 탄성체 문제와 계측점

일반적으로 식(1)이 비선형 최적화 문제이기 때문에 다음과 같이 선형화시킨 후 반복계산을 이용해서 물성치를 구하게 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\Delta \mathbf{x}} \pi_E &\approx \sum_i \|\mathbf{S}\Delta \mathbf{x} - (\bar{U}_i - \tilde{U}_i(\mathbf{x}_{k-1}))\|_2^2 \\ \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{x}_{k-1} + \Delta \mathbf{x}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, \mathbf{S} 는 각 반복단계에서 계산된 응답의 물성치에 대한 민감도 행렬이다. SI가 가지는 ill-posedness로는 계측치가 부족해서 발생하는 해의 비유일성 문제와 약간의 계측오차에 대해서도 추정된 물성치가 심하게 진동하는 해의 불연속성 문제가 있는데, \mathbf{S} 에 대한 특이치분해법(Singular value decomposition)으로 규명할 수 있다.³⁾

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}\mathbf{\Omega}\mathbf{V}^T \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{\Omega}$ 는 특이치 행렬로서 대각행렬이 되는데 각각의 대각항들을 특이치라고 부른다. SI문제에서 \mathbf{S} 의 특이치들의 분포를 보면 두가지의 전형적인 양상을 관찰할 수 있다.

첫째, 0의 값을 가지는 특이치가 존재하는 경우로, 이는 해의 비유일성문제 직접적으로 관계된다. 즉, 독립적인 정보를 가지고 있는 측정치의 개수가 구하려고 하는 물성치의 개수보다 작은 경우 민감도행렬의 특이치들이 0의 값을 가지게 되고 민감도행렬 \mathbf{S} 는 랭크가 부족한 행렬이 된다.

둘째, 특이치의 값들을 내림차순으로 나열을 했을 때 작은값을 가지는 특이치들이 점근적으로 0으로 가까이 가는 경우이다. 이는 해의 불연속성과

관계되는 문제로, SI모델의 정도를 높이기 위해서 구하고자하는 물성치의 개수를 늘릴 때 발생하는 문제이다. 이 경우 SI문제의 해가 수렴하기 위해서는 피카드의 조건(Picard condition)³⁾이라고 불리는 해의 정규조건을 만족시켜야 하는데, 일반적으로 계측오차가 포함되는 경우 피카드의 조건을 만족시킬 수 없게 된다.

실제 SI에서는 두가지의 불안정성이 혼재되어 나타나는 경우가 많기 때문에, 식(1)에 근거한 SI를 이용해서 추정된 물성치는 실제 물리적으로 의미있는 값을 가지기 위한 정규조건을 만족시키지 못한다. 그 대표적인 양상이 추정된 해의 진동 혹은 발산이다.

3. 정규화

SI와 같은 역해석 문제가 가지는 수치적 불안정성을 해결하기 위한 대표적인 방법이 바로 정규화(Regularization)이다.^{1)~4)} 정규화는 물성치 함수공간의 정규조건을 물리적인 또는 수학적인 추론으로부터 정의하고, 이 정규조건을 식(1)에 부과하는 기법이다.^{1)~2)} 물성치의 정규조건은 다음과 같은 리벡적분가능성(Lebesgue integrability)으로 나타낼 수 있고 정규조건으로부터 정규화함수를 얻을 수 있다.

$$\pi_R \equiv \int_V |\nabla' [x - x_0]|^p dV < \rho I^p, \rho \in \mathfrak{R} \quad (4)$$

정규조건은 미분연산차수인 r 과 놈의 차수인 p 에 의해서 결정되는데, 구하고자 하는 물성치들의 공간 분포특성에 따라서 각각 다르게 표현될 수 있다. 구체적인 예는 뒤쪽에 있는 활용사례들에 기술한다.

식(4)의 정규조건을 식(1)의 최적화문제에 부과하는 가장 대표적인 기법이 티코노프 정규화(Tikhonov regularization)이다.^{1)~4)} 티코노프 정규화에서는 식(4)를 약식의 형태로 식(1)에 부과하는 방법으로 이산화 과정을 거치면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min } \pi &= \pi_E + \lambda \pi_R \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_i \|\tilde{U}_i(\mathbf{x}) - \bar{U}_i\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{L}_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|_p^p \quad (5) \\ \text{subject to } &\mathbf{R}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned}$$

여기서 $\lambda(>0)$ 는 정규화 계수라 하고, 식(1)의 오차함수와 식(4)로부터 유도된 정규화함수의 비중을 조정하는 역할을 한다. 정규화 계수를 너무 크게 설정하면 식(4)의 정규조건이 과장되어 추정된 해가 실제와 많이 다를 수 있고 반대로 너무 작게 설정하면 식(1)이 가지는 수치적인 불안정성이 발생하게 된다.^{1),4)}

적절하게 결정된 정규화 계수는 계측오차로부터 파생되는 해의 진동성분을 제거하고 동시에 식(4)에서 정의된 정규조건을 추정된 해에 부과함으로써, 수치적인 안정성을 가지는 동시에 물리적으로 의미있는 해를 도출할 수 있다. 이를 위해서, 최적의 정규화 계수를 결정해야 하는데, 최적 정규화 계수의 결정 방법으로는 선형 역해석 문제에서 일반화된 교차타당성(Generalized cross validation)와 L-곡선법(L-curve method)등이 제안되어 있다.

식(5)와 같은 비선형 역해석 문제에 대해서는 식(5)를 선형화 시킨 후 일반화된 교차타당성이나 L-곡선법을 적용시킬 수도 있지만 일반적으로 적용시키기에는 한계가 있다.⁴⁾ 이런 이유로 최근 VRFS(Variable regularization factor scheme)과 기하평균방법(Geometric Mean Scheme)이라는 최적 정규화 계수 결정법이 제안된 바 있다.⁴⁾

4. 적용사례들

4.1 평면응력하의 유한체에서의 미지 함유체의 기하형상과 물성치 추정문제

구조물내의 균열이나 박리 등은 육안으로 관찰하는 것이 불가능하기 때문에 비파괴 기법을 이용해서 위치, 형태, 물성치를 간접적으로 추정하게 된다. SI관점에서 보면 그림 3과 같이 연속체 내부에 포함되어 있는 함유체의 미지 기하형상과 물성치를 외부 경계에서 계측된 응답으로부터 추정하는 문제로 정의할 수 있다.

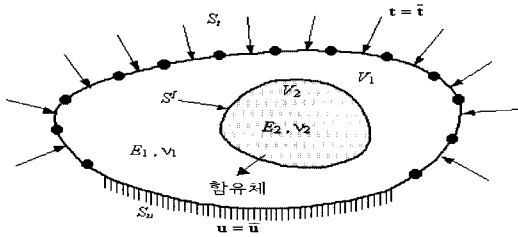


그림 3 유한체 내부 함유체의 미지형상과 물성치 추정

이 문제를 풀기 위한 접근 방법으로는 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 첫번째는 함유체의 구체적 기하형상과 물성치를 동시에 추정하는 접근방법^(5,6)이고 두번째는 연속체 모든 영역안의 물성치를 추정하여 함유체에 해당하는 부분의 물성치의 변화로부터 함유체의 위치와 물성치값을 동시에 얻는 접근방법⁽⁴⁾이다. 전자의 경우는 기하형상을 추정하기 때문에 비교적 복잡한 연산과정을 거치게 되지만 함유체의 구체적인 기하형상과 물성치를 알아낼 수 있는 장점이 있고, 후자의 경우는 구체적인 기하형상을 추정하기는 힘들으나 전자에 비해 간단한 연산과정으로도 평균적인 의미에서 효과적으로 함유체를 추정할 수 있는 장점이 있다.⁽⁴⁾

여기서는 전자의 방법을 이용한다. 기하형상과 물성치를 동시에 추정하는 SI에서는 기하형상과 물성치에 대해서 각각 정규조건을 정의하게 된다. 기하형상에 대한 정규조건은 다음과 같다.

$$\pi_R^G \equiv \int_{S_{inc}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s} \right)^2 ds < \rho^2 \quad (6)$$

χ 와 s 는 각각 함유체 경계와 경계면을 따라서 정의되는 공간 매개변수이다. 식(6)은 구하고자 하는 함유체의 기하형상이 매끄러우면서 연속이어야 (continuous and weakly smooth) 한다는 조건을 의미한다.^(5,6) 한편 물성치에 대한 정규조건은 다음과 같이 정의된다.

$$\pi_R^M \equiv \int_{V_{inc}} (x - x_0)^2 dV < \rho^2 \quad (7)$$

x 와 x_0 는 함유체의 물성치값과 기저값(baseline

value)이다. 식(7)은 구하고자 하는 함유체의 물성치가 조각연속(piecewise continuous) 함수들의 공간인 L_2 함수 공간에 존재해야 함을 의미한다.⁽¹⁾

식(1)에 식(6)과 식(7)의 정규조건을 티코노프 정규화를 이용해서 부과하게 되면 식(5)와 같은 형태의 최적화문제로 귀결된다.^(5,6) 최적의 정규화 계수는 VRFS를 이용하여 결정한다.

몇가지 예제를 통해서 적용된 정규화의 타당성을 살펴본다. 문제는 그림 4와 같은 평면응력상태의 정사각형 판 내에 미지 함유체의 형상을 추정하는 문제이다. 함유체의 기하형상은 그림 5와 같이 32개의 제어절점(control node)^(5,6)들을 이용하여 선형 보간하여 이산화하였고, 물성치는 영의계수와 포아송비로 설정하였다. 판의 영의 계수는 210GPa 이고 포아송비는 0.3이다. x, y 방향으로 각각 인장력을 발생시켰을 때 바깥경계면에서 발생한 정적변위를 계측응답으로 가정하였고 계측점은 각면에 등간격으로 총 32개이다. 계측응답은 경계요소법으로부터 외부경계는 256개의 2차요소를, 내부경계는 128개의 2차요소를 사용하여 수치적으로 모사하였다. SI모델에서는 변위를 계산하기 위해 경계요소법과 경계면변수화(Boundary parameterization)⁽⁶⁾를 사용하였고, 요소망은 그림 5와 같이 계측응답을 모사하는 경계요소망보다 1/4 정사각형 구성하였다.

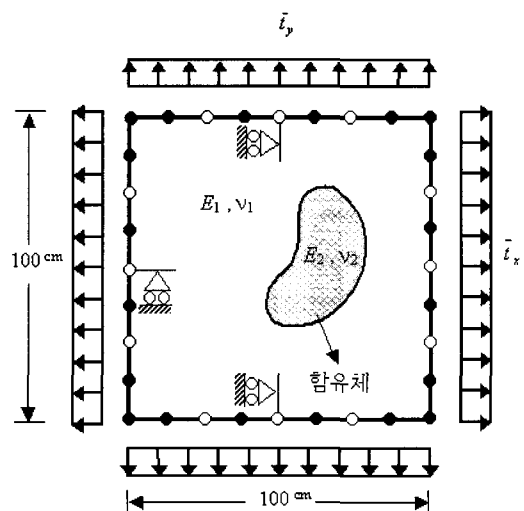


그림 4 평면응력하의 정사각형 판내의 함유체 추정

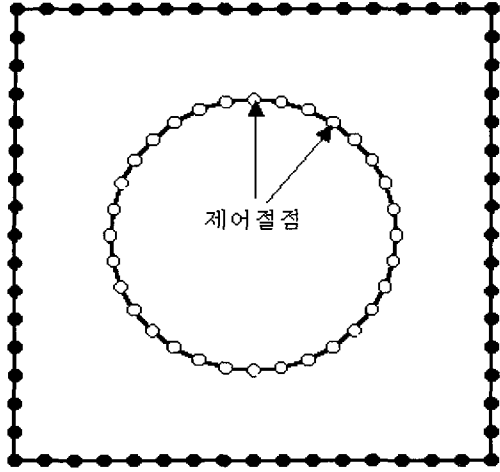


그림 5 경계요소모델의 초기 요소망

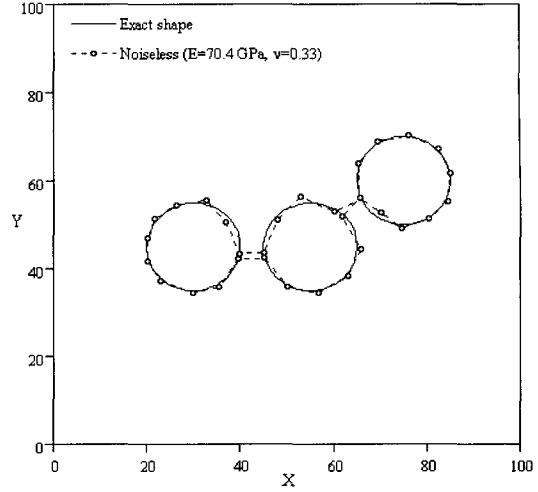


그림 7 서로 떨어진 세 개의 함유체의 추정

그림 6은 알루미늄($E=210\text{GPa}$, $\nu=0.34$)인 함유체가 배모양(pear-shaped)인 경우 추정된 제어절점들의 좌표와 물성치를 나타낸 그림이다. 오차에 커짐에 따라서 점차적으로 실제모양에서 벗어나기는 하지만 전체적인 면적과 형상을 매우 잘 추정하고 있음을 확인할 수 있다. 추정된 물성치의 크기도 정해와 크게 다르지 않음을 확인할 수 있다.

그림 7은 서로 떨어진 세 개의 알루미늄 원형 함유체를 추정한 결과이다. 오직 하나의 이어진 영역을 나타낼 수 있는 제어노드들만으로 복잡한 다중

함유체를 추정할 때 발생하는 모델링오차에 의한 불안정성을 정규화를 통해서 해결하는 동시에 정해에 거의 근접하는 결과를 보여주고 있다.

그림 8은 함유체가 평판내의 경사균열인 경우 추정된 결과이다. 3% 계측오차에 대해서 30번의 몬테카를로 모사(Monte Carlo simulation)을 수행했을 때의 평균을 보여주고 있다. 추정결과가 실제 균열형상과는 약간 틀리지만 균열폭과 기울어진 각도 중심은 정확하게 추정하고 있음을 확인할 수 있다.

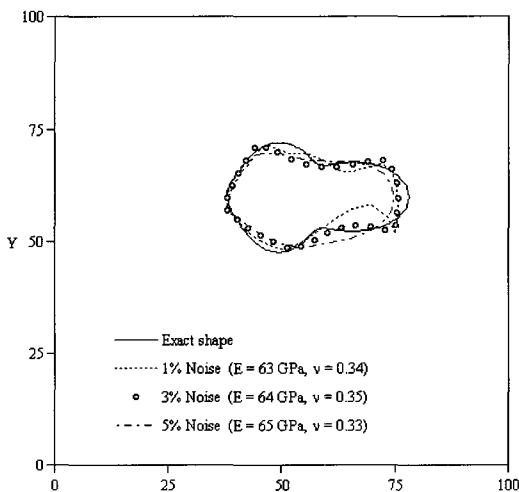


그림 6 오차에 따른 배모양 함유체의 추정결과

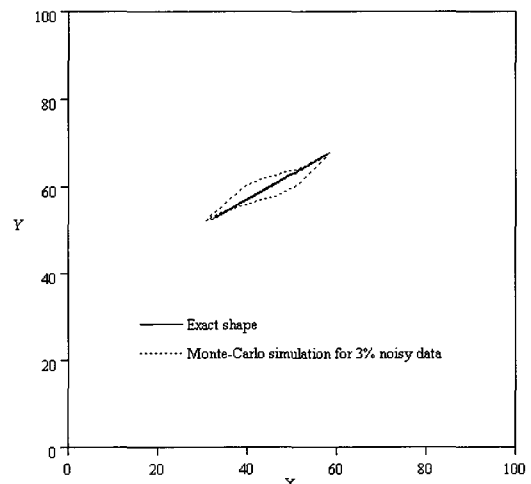


그림 8 함유체가 경사균열일 때의 추정결과

4.2 뼈대구조물의 손상진단 문제

SI를 이용한 구조물의 손상진단문제는 각부재 또는 부재집단 단위로 강성을 SI를 이용해서 추정하고 통계적인 기법을 적용하여 손상여부, 위치, 정도를 결정하게 된다. 따라서 신뢰성있는 손상진단기법을 위해서 안정적인 시스템확인기법이 필수적이다. 여기서는 뼈대구조물의 SI에 적합한 정규조건을 소개한다.

트러스나 프레임같은 뼈대구조물을 모델링할 때 각 부재의 성질은 부재 중심선을 따라서 표현하게 된다. 그 결과 부재의 역학적 특성은 부재의 도심축을 따라서 집중되어 있는 것으로 가정하게 된다. 전체 뼈대구조물의 강성물성치는 구조물체적에서 2차원 Dirac-delta 함수로 표현되는 각 부재들의 강성물성치의 집합으로 정의된다.¹⁾

$$x = \sum_{i=1}^n X_i \delta(\eta_i^x) \delta(\eta_i^y) \delta(\eta_i^z) \text{ in } V \quad (8)$$

식(8)에서 정의되는 뼈대구조물의 강성물성치를 나타내기 위한 정규조건으로 기존의 L_2 -놈을 사용한 정규조건은 부적절하기 때문에 다음과 같은 L_1 -놈을 사용한 정규조건을 적용해야 한다.¹⁾

$$\pi_R \equiv \int_V |x - x_0| dV < |\rho| \quad (9)$$

뼈대구조물의 강성물성치의 정규조건인 식(9)를 식(1)에 부과하기 위한 방법으로 티코노프 정규화 방법은 부적절하다. 왜냐하면 식(9)로부터 얻어지는 정규화 함수가 미분이 불가능한 점이 생기기 때문에 티코노프 정규화로부터 유도된 식(5)도 미분이 불가능한 점이 생긴다. 따라서 식(5)의 최적화 방법으로 사용하는 이차프로그래밍을 적용할 수 없게 된다. 이 문제를 해결하기 위해 심플렉스 방법에 기초한 L_1 -절단특이치분해법(L_1 -truncated singular value decomposition)¹⁾을 사용한다. 이 방법을 이용하면 식(9)의 정규조건을 식(1)에 부과하는 최적화 문제를 효과적으로 풀 수 있다.

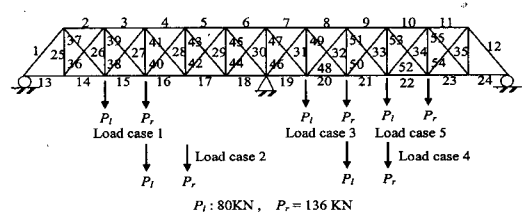
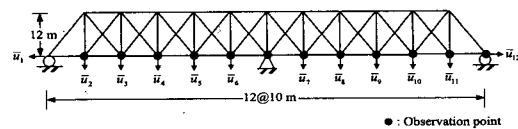


그림 9 이경간트러스의 기하형상, 지점 및 하중조건



Member	Area(cm ²)	Member	Area(cm ²)
Top	250	Vertical	200
Bottom	300	Diagonal	220

그림 10 계측점과 부재별단면적

이경간 연속트러스교에 발생한 손상부재를 추정하는 문제를 통해서 정규화의 타당성을 살펴본다.

그림 9에서 기하형상, 지점조건 그리고 12개의 계측점이 주어져 있다. 그림 10에 주어진 각각의 하중조건에 대해서 측정점이 이동단인 경우에는 수평변위를, 나머지 측정점들에서는 수직변위를 독립적으로 계측하였다. 계측오차는 5% 비례오차를 사용하였다. 통계적 손상진단^{1),7)}을 위해서 모두 30번의 몬테카를로 수치모사를 수행하였고, 손상여부를 판단하는 가설검정법에서 유의수준은 10%로 설정하였다. 손상은 하현재 16번과 21번의 단면적이 각각 70%, 30% 감소한 것으로 손상을 모사하였다.

그림 11에서는 몬테카를로 수치모사 결과 추정된 부재들의 강성계수의 평균과 표준편차가 나타나 있다. 실제손상이 발생한 부재들에 해당하는 강

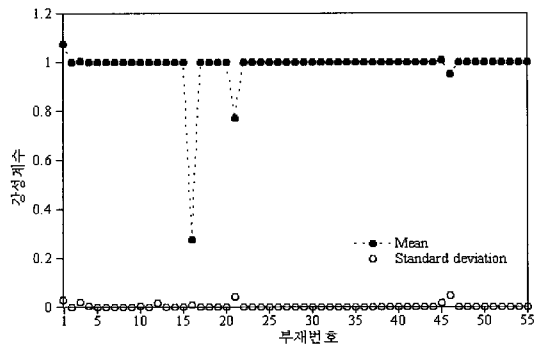


그림 11 추정된 강성계수의 평균과 분산

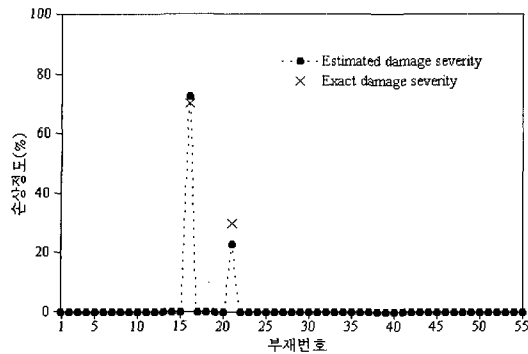


그림 12 추정된 각부재의 손상정도

성계수만이 정확하게 감소하고 있음을 알 수 있다.

오차에 대한 변동성을 나타내는 표준편차의 경우 해의 변동성을 증폭시키는 오차에 의한 해의 성분이 적절히 걸러지고 있기 때문에 매우 작게 나오고 있음을 알 수 있다.

그림 12에서는 SI에 의해서 추정된 결과를 이용해서 통계적 손상진단방법으로부터 추정된 손상도를 나타낸다. 실제손상부재의 위치와 손상도가 정확하게 추정되고 있음을 알 수 있다.

5. 맺음말

역해석 문제인 SI가 가지는 ill-posedness와 이에 대한 해결책으로서 정규화에 대해서 살펴보았다. 정규화는 여기서 보인 사례들처럼 주어진 문제에 대해 추정하고자 하는 물성치에 대한 정규조건을 합리적으로 설정하고 이를 적절한 알고리즘을 통해서 정규조건을 SI에 부과하는 기법이다.

적절한 정규화 기법을 통해서 SI가 가지는 ill-posedness를 효과적으로 해결하고 물리적으로 타당하고 수치적으로 안정된 해를 추정할 수 있게 된다. 보다 신뢰성 있는 구조물의 손상탐지분야 또는 구조물의 건전성평가를 위하여 이러한 기법들이 활용될 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. Park, H. W., "Regularization techniques in system identification for damage assessment of structures," *Ph.D. Thesis, Department of civil engineering*, Seoul National University, 2002
2. Bui, H. D., "Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction," *CRC Press*, Boca Raton, 1994
3. Hansen, P. C., "Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion," *SIAM*, Philadelphia, 1998
4. Park, H. W., Shin, S. B., and Lee, H. S., "Determination of an Optimal Regularization Factor in System Identification with Tikhonov Function for Linear Elastic Continua," *International J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 51, No. 10, 2001, pp.1211~1230
5. Lee, H. S., Kim, Y. H., Park, C. J., and Park, H. W., "A new spatial regularization scheme for the identification of geometric shapes of inclusions in finite bodies," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 7, 1999, pp.973~992
6. Lee, H. S., Park, C. J., and Park, H. W., "Identification of geometric shapes and material properties of inclusions in two dimensional finite bodies by boundary parameterization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 181, No. 1-3, 2000, pp.1~20
7. Yeo, I. H., Shin, S., Lee, H. S., and Chang, S. P., "Statistical Damage Assessment of Framed Structures from Static Responses," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 126, No. 4, 2000, pp.414~421