Lie-군상에서의 Bézier 곡선과 Bézier곡면의 생성방법

임 장 환[†] · 김 태 은[††]

요 약

본 논문에서는 벡터공간 R^n에서 정의된 Bézier곡선과 Bézier곡면을 Lie군(Lie group)에서 확장하는 일반적인 새로운 생성방법을 제시한다. 이 방법에 의해서 생성된 Bézier곡선과 Bézier곡면은 Lie군의 성질에 의해서 Lie군에서 미분 가능한 구조를 갖는다. 이 방법은 공간상에서 움직이는 물체에 대한 부드러운 움직임을 묘사하거나 궤도생성에 사용할 수 있다.

Generation Method of Bézier Curves and Surfaces on Lie Groups

Jang-Hwan Im[†] · Tae-Eun Kim[††]

ABSTRACT

The goal of this paper is to generalize the concept of Bézier curves and surfaces defined on the vector space R^n to Lie groups, which is a new generation method of curves (called Bézier curves) on Lie groups. The defined Bézier curves and surfaces are always smooth because of the properties of Lie groups. We apply this method to smooth motion interpolation or smooth trajectory generation for moving rigid body in space.

키워드 : 베이지어곡선(Bézier curve), 회전(Rotation), 리군(Lie group)

1. 서 론

컴퓨터 애니메이션에 있어서 공간상의 움직이는 물체에 대한 유연하면서도 자연스러운 표현방법을 할 수 있는 툴(tool)의 개발은 매우 중요한 과제중의 하나이다. 공간상의 물체의 움직임은 이동과 회전으로 나누어지는데, 공간상의 물체의 이동은 공간상의 하나의 미분 가능한 곡선(smooth curve)으로 표시되고, 연속적인 회전은 $SO(3)$(rotation group)상의 하나의 곡선으로 표시된다. 물체의 공간상의 유연한 이동을 표시하는 수단으로는 B-spline, Hermite, Bézier 등 잘 알려진 방법들이 사용되고 있다. 하지만 연속적인 회전을 표시하는 곡선을 $SO(3)$상에서 결정하는 것은 상대적으로 어려운 기술로 인식되고 있다. 본 논문에서는 벡터공간 R^n에서 정의되는 Bézier 곡선의 수학적인 성질을 이용하여 $SO(3)$상에서 곡선을 생성하는 새로운 방법을 소개한다. 공간상의 회전을 표시하는 수학적인 방법으로는 $SO(3)$ 외에 $SU(2)$, 쿼터니온(S^3)이 이용된다. 이들 모두 수학적으로 Lie군이라는 특징을 가지고 있다. 본 논문에서 제시하는 곡선 생성방법은 일반적인 모든 Lie군에 적용되는 방법이다. 다음 우리는 벡터공간상에서 정의되는 Bézier곡선으로부터 일반적인 Lie 군상으로 Bézier의 개념을 확장하는 방법을 제시한다.

벡터공간 R^n에서 정의되는 Bézier곡선은 P. Bézier에 의해서 고안된 방법으로 기하학적인 모델링에 하나의 전기를 마련하였다[5]. Bézier곡선은 구현하기 쉽고 또한 수학적으로도 간단히 표시되는 장점이 있다. 공간상의 움직이는 물체의 부드러운(smooth)움직임을 나타내기 위해서는, 특히 부드러운 회전을 표시하기 위해서는, 다양체(manifold) 또는 Lie군상에서 부드러운 곡선(smooth curve)을 묘사하는 기술이 필요하다. 이러한 시도는 처음으로 Shoekmake에 의해서 Lie군인 쿼터니온(S^3)에서 부드러운 곡선을 얻어내는 방법이 제시되었다[9]. 또한 Lie군의 1변수 부분군(1-parameter subgroup)의 궤적(orbit)을 이용하여 다양체에서 부드러운 곡선을 얻어내는 방법도 제시되었다[11]. 일반적으로 다양체에서 곡선을 생성했을 때 생성된 곡선의 미분가능성은 물체의 부드러운 동작을 의미하므로 하나의 중요한 문제가 된다[6, 10]. 본 논문에서 제시하는 방법은 Lie군의 성질을 이용하여, 미분 가능한 곡선과 곡면(smooth curve and surface)을 구하는 방법을 제시한다.

먼저 벡터공간 R^n상에서 정의되는 Bézier곡선과 곡면을 살

† 정 회 원 : 중앙대학교 첨단영상대학원 교수
†† 정 회 원 : 남서울대학교 공학부 멀티미디어학과 교수
논문접수 : 2001년 9월 3일, 심사완료 : 2001년 12월 21일

퍼보고, 이들로부터 (R^n, +)가 Lie-군이라는 사실을 이용하여, 다시 Bézier 곡선과 곡면을 정의하고, 이들이 서로 같음을 이용하여 일반적인 Lie군에서 Bézier곡선과 곡면을 유도한다. 벡터공간 R^n상에서, 주어진 $n+1$개의 점 P_i, $i=0,\cdots,n$에 대하여 n차 Bézier곡선은 식 (1)과 같이 정의된다.

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)P_i, \quad t \in [0,1] \tag{1}$$

이 때, 점 P_i을 제어점(control point)라 부르고, $B_{i,n}(t)$는 n차 Bernstein 다항식으로 식 (2)와 같이 정의된다.

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i(1-t)^{n-i} \tag{2}$$

n차 Bézier 곡선을 $C_n(P_0,\cdots,P_n)$이라 표시하면, 벡터공간 R^n의 성질에 의해서 식 (3)과 같은 관계식이 유도된다.

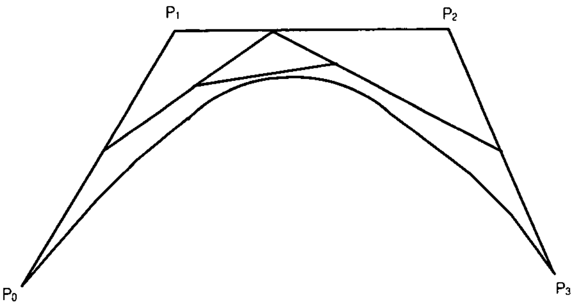
$$C_n(P_0,\cdots,P_n) = (1-t)\,C_{n-1}(P_0,\cdots,P_{n-1}) + t\,C_{n-1}(P_1,\cdots,P_n) \tag{3}$$

고정된 $t=t_0$에 대하여 $P_i=P_{0,i}$라 놓으면, n차 Bézier곡선의 한 점 값 $C(t_0)=P_{n,0}(t_0)$은 식 (4)와 같이 재귀적 알고리즘을 사용하여 구할 수 있다.

$$P_{k,i}(t_0) = (1-t_0)P_{k-1,i}(t_0) + t_0P_{k-1,i+1}(t_0), \quad k=1,\cdots,n-k, \quad i=0,\cdots,n-k \tag{4}$$

관계식 (4)를 De Casteljau 알고리즘이라고 부른다.

주어진 점들 P_i에 대하여 Bézier곡선과 De Casteljau알고리즘은 동치관계인데, 이것은 R^n이 벡터공간이기 때문이다. 본 논문에서 제시하는 방법은, 일반적인 Lie군상에서 두 방법이 같다고 할 수는 없기 때문에, 본 논문에서는 Lie군상에서 Bézier 곡선을 확장할 때에 이 두 방법을 따로 분리해서 생각한다.



(그림 1) Bézier곡선과 De Casteljau 알고리즘, $n=3$

지금부터는 R^n이 벡터공간이 아닌, (R^n, +) 이 Lie군이라는 가정 하에서 위 Bézier곡선을 유도하고, 우리는 이 방법을 일반적인 Lie 군에 적용하고자 한다. 먼저 R^n은 잘 알려진 바와 같이 n차원 다양체(manifold)이다. 이 때 (R^n, +)는 하나의 군(group)이고, 다음 두 연산자

$$+ : R^n \times R^n \to R^n : (x_1,\cdots,x_n) + (y_1,\cdots,y_n) = (x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$
$$- : R^n \to R^n : -(x_1,\cdots,x_n) = (-x_1,\cdots,-x_n)$$

는 무한 번 미분가능이다. 즉, $(R^n,+)$는 n차원 Lie군이다. 이 때, 1변수 부분군(1-parameter subgroup of $(R^n,+)$)은 임의의 영이 아닌 벡터 $P_i \in R^n$에 대하여 식 (5)와 같이 주어진다.

$$\alpha_i : (R,+) \to (R^n,+) : \alpha_i(t) = tP_i. \tag{5}$$

여기서 $\alpha_{i,n}(t) = \alpha_i(B_{i,n}(t))$라 정의하자. 주어진 $n+1$개의 점 P_i, $i=0,\cdots,n$에 대하여 n차 Bézier곡선은 Lie군 $(R^n,+)$ 상에서 식 (6)과 같이 정의된다.

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)P_i, \quad t \in [0,1] \tag{6}$$

여기서 $\sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n}(t)$의 기호 $\sum$는 Lie군 $(R^n,+)$의 +연산자의 $n+1$번의 합을 의미한다. 또한 P_i가 영벡터이면, $\alpha_i(t)=0$인 항등원에 대응된다.

다음은 Bézier 곡면에 대하여 알아보자. $(m+1)(n+1)$개의 제어점 $P_{i,j}$에 대하여, Bézier곡면은 식 (7)과 같이 정의된다.

$$S(t,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_{i,n}(t)B_{j,m}(s)P_{i,j}, \quad t,s \in [0,1]. \tag{7}$$

이번에도 $(R^n,+)$가 Lie-군이라는 가정 하에서 Bézier 곡면을 다시 정의할 수 있다. 주어진 원소 $P_{i,j} \in R^n$에 대하여 α: $(R,+) \to (R^n,+) : \alpha^{ij}(t) = tP_{i,j}$은 1변수 부분군이고, 2변수 함수 $\alpha^{ij}(t,s) = \alpha^{ij}(ts)$라 정의하자. 여기서 $\alpha_{i,j(t,s)} = \alpha^{i,j}(B_{i,n}(t), B_{j,m}(s))$정의하면,

$$S(t,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{i,j}(t,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_{i,n}(t)B_{j,m}(s)P_{i,j}$$

단, $t,s \in [0,1]$.

2. Lie군상에서 Bézier곡선과 Bézier곡면

Lie군에 대한 정의와 성질은 일반적으로 잘 알려졌기 때문에, 본 논문에서는 필요한 부분만 간단히 정의하고, 자세한 내용은 참고문헌 [1-3, 8, 12]를 참조한다. $(G,*)$을 하나의 Lie 군(Lie group)이라고 하자. 하나의 smooth homomorphism $\alpha:(R,+) \to (G,*)$을 Lie 군 $(G,*)$의 1변수 부분군(1-parameter subgroup of $(G,*)$)이라고 한다. 임의의 $g \in G$에 대하

여, 하나의 1변수 부분군 $\alpha:(R,+)\to(G,*)$가 존재하여 $\alpha(1)=g$을 만족하면, Lie군 $(G,*)$을 path connected라고 한다.

본 논문에서는 Lie군 $(G,*)$이 항상 path connected일 경우만 생각한다. 그러면 앞의 서론의 경우를 확장하여 다음과 같이 Bézier곡선, De Casteljau알고리즘 그리고 Bézier곡면을 정의할 수 있다.

2.1 Bézier곡선

$(G,*)$을 하나의 Lie군(Lie group)이라고 하자. 주어진 $n+1$개의 원소 $p_i\in G$, $i=0,\cdots,n$에 대하여, $\alpha_i(t)$을, $i=0,\cdots,n$, $\alpha_i(1)=p_i$을 만족하는 1변수 부분군들이라고 하자. $\alpha_{i,n}(t)=\alpha_i(B_{i,n}(t))$라 놓으면, Lie군 $(G,*)$상에서의 하나의 Bézier 곡선은 식 (8)과 같이 정의한다 :

$$C(t)=\alpha_{0,n}(t)*\alpha_{1,n}(t)*\cdots*\alpha_{n,n}(t)=\prod_{i=0}^{n}\alpha_{i,n}(t) \qquad (8)$$

이 때 정의된 Bézier곡선 $C(t)$는 Lie군 $(G,*)$의 성질에 의하여 무한번 미분가능한 곡선 (smooth curve)이다.

2.2 De Casteljau 알고리즘.

주어진 두 원소 $p,q\in G$에 대하여 $\alpha_p(t)$, $\alpha_q(t)$을 $\alpha_p(1)=p$, $\alpha_q(1)=q$을 만족하는 1변수 부분군들이라고 하자. 이 때 p, q을 있는 곡선을

$$C[p,q](t)=\alpha_p(1-t)*\alpha_q(t),\ t\in[0,1]$$

라고 정의하자. 여기서 곡선 $C[p,q](t)$는 두 점 $p,q\in G$에 대한 Bézier곡선이다. 주어진 $n+1$개의 원소 p_i, $i=0,\cdots,n$에 대하여 G상에 식 (9)와 같은 곡선을 정의하자.

$$C_{k,i}(t)=C[C_{k-1,i}(t),\ C_{k-1,i+1}(t)](t) \qquad (9)$$

그러면 벡터공간 R^n상에서의 De Casteljau 알고리즘과 같이 식 (10)과 같이 하나의 곡선을 정의할 수 있다.

$$C(t)=C[C_{n-1,i}(t),C_{n-1,i+1}(t)],$$
$$k=1,\cdots,n-k,\ i=0,\cdots,n-k \qquad (10)$$

2.3 Bézier곡면

주어진 $(m+1)(n+1)$개의 원소 $p_{i,j}\in G$에 대하여, $\alpha^{i,j}(t)$가 $\alpha^{i,j}(1)=p_{i,j}$을 만족하는 1변수 부분군이라고 하자. 이 때, $\alpha_{i,j}(t,s)=\alpha^{i,j}(ts)$라 정의하고 또한 $\alpha_{i,j}(t,s)=\alpha^{i,j}(B_{i,n}(t), B_{j,m}(s))$라 정의하자. 그러면 Lie 군 G상에서의 Bézier곡면은 다음과 같이 정의한다 :

$$S(t,s)=\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{m}\alpha_{i,j}(t,s),\ t,s\in[0,1].$$

이때 정의된 Bézier곡면 $S(t,s)$도 Lie군 G의 성질에 의하여 하나의 다양체 구조를 갖는다.

2.4 변환군(Transformation Group)

Bézier곡선과 곡면 그리고 De Casteljau 알고리즘을 구성하기 위해서는 주어진 하나의 원소 $p\in G$에 대하여, p을 지나는 1변수 부분군을 찾아 내야 한다. 여러 가지 방법 중에서 본 논문은 Lie대수를 사용하여 1변수 부분군을 찾는 방법을 소개한다. 그러기 위해서 먼저 변환군(transformation group) 개념을 도입하고 또한 Lie대수개념, 마지막으로 Lie군과 이에 대응하는 Lie대수를 연결하는 함수 exp와 log함수에 대하여 설명한다. 하나의 함수 $f:X\to Y$에 대하여 함수 값은 보통 $f(x)$, $x\in X$로 표시하나, 기하학에서는 $f(x)$대신 x^f도 종종 사용한다. 본 논문에서도 편의상 두 기호를 $f(x)$, x^f 같이 사용한다.

하나의 변환군(transformation group) (W,G,w)은 하나의 집합 X, 하나의 군 G 그리고 하나의 함수 $w:X\times G\to X$로 구성되며 다음 조건을 만족한다 :

(1) $((x,g_1)^w,g_2))^w=(x,g_1g_2)^w$, $x\in X$, $g_1,g_2\in G$

(2) $(x,e)^w=x$, $x\in X$, $e\in G$: 항등원,

이 때 함수 w을 집합 X에서의 군 G의 작용(action)이라고 부른다. 보통 함수 w가 분명하게 주어졌으면, 보통 기호 w가를 생략한다. 그러면, 식 (1)은 : $(x^{g_1})^{g_1}=x^{(g_1g_2)}$, 식 (2) : $x^e=x$으로 표시된다. 만약 X가 위상공간(topological space), G가 위상군(topological group), 그리고 함수 $w:X\times G\to X$가 연속이면 (W,G,w)을 위상 변환군(topological transformation group)이라고 C^∞부른다. 만약 X가 C^∞다양체이고, G가 Lie군, 그리고 함수 $w:X\times G\to X$가 C^∞미분가능이면, (W,G,w)을 Lie변환군(Lie transformation group)이라고 부른다.

2.5 Lie 대수 (Lie Algebra)

$T(R^n)=\{f:R^n\to R: f: C^\infty \text{ 미분가능}\}$이라고 정의하자. $f,g\in T(R^n)$, $\lambda\in R$에 대하여, $f+g$, fg, λf가 정의되고, 이들 또한 $T(R^n)$에 속하므로, $T(R^n)$은 하나의 실수 R상에서의 결합대수이다[7. Ch.1]. $T(R^n)$ 상에서 하나의 데리베이션(derivation)은 하나의 함수 $D:T(R^n)\to T(R^n)$로 다음 조건을 만족한다[8].

(1) R-Linear : $D(af+bg)=aD(f)+bD(g)$, $a,b\in R$

(2) *Leibnizian* : $D(fg)=D(f)g+fD(g)$,

$T(D)$을 $T(R^n)$상의 모든 데리베이션 집합이라고 하자. 만약 $X,T\in T(D)$, $\lambda\in R$에 대하여,

합 : $X+Y=(f\to X(f)+Y(f))$, $f\in T(R^n)$
스칼라 곱 : $\lambda X=(f\to\lambda X(f))$, $\lambda\in R$, $f\in T(R^n)$

은 다시 $T(D)$에 속하게 된다. 따라서 $T(R^n)$은 실수 R상의 벡터공간이다. 또한 $X, Y\in T(D)$에 대하여 $[X,Y]=XY-YX\in T(D)$을 만족한다. 연산자 [ ]를 브라켓(bracket)이라 부른다. 브라켓 연산자 [ ]는 $T(D)$ 상에서 다음조건을 만족한다.

(1) $R-bilinearity$: $[zX+bY,Z]=a[X,Y]+b[Y,Z]$.
(2) $Skew-symmetry$: $[X,Y]=-[Y,X]$.
(3) $Jacobi\ identity$: $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

이때 $T(D)$을 $T(R^n)$상에서의 데리베이션의 Lie 대수라고 부르고, $T(D)=L(R^n)$ 으로 표시한다. 또한 하나의 Lie군 G의 Lie대수를 $L(G)$로 표시한다. 다음 이론은 Lie군 G의 1변수 부분군과 G의 Lie대수 관계를 나타낸다[1].

정리 1 : (R^n, G, w)가 하나의 Lie 변환군 이라고 하자. Lie 군 G의 모든 1변수 부분군들의 미분값을 $L(G)$라 하면, $L(G)$는 Lie 대수 $L(R^n)$의 부분대수이고 또한 Lie G의 Lie 대수이다.

위 이론을 자세히 설명하면 다음과 같다 : (R^n, G, w)가 하나의 Lie 변환군이라고 하면, Lie 군 G의 1변수 부분군 $\gamma(t)$는 R^n상에서 다음 형태의 작용함수 w을 유도한다.

$w: R\times R^n\to R^n$:
$w(t,x_1,\cdots,x_n)=(\alpha_1(t, x_1,\cdots,x_n),\cdots,\alpha_n(t, x_1,\cdots,x_n))$.

여기서 α_i, $i=1,\cdots,n$는 C^∞ 함수이다. 주어진 $f\in T(R^n)$와 1변수 부분군 $\gamma(t)$에 대하여 우리는 f의 미분값을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\gamma: \frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}\bigg|_{t=0}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial\alpha_n}{\partial t}\bigg|_{t=0}$$

따라서 식 (11)과 같은 벡터장(vector field)을 얻게 된다.

$$V=\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}\bigg|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\alpha_n}{\partial t}\bigg|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (11)$$

따라서 모든 벡터장의 집합이 $L(G)$가 된다.

여기서 우리는 log : $G\to L(G)$와 exp : $L(G)\to G$ 함수를 유도할 수 있고[2, 3, 12], $g\in G$에 대하여 식 (12)와 같은 1변수 부분군을 얻을 수 있다.

$$\gamma(t)=\exp(t\log g). \qquad (12)$$

다음 3절에서는 2절에서 정의한 방법을 쿼터니온 S^3과 회전군 $SO(3)$에 적용하여 물체의 부드러운 회전을 얻는데 적용한다.

3. 응용 : 쿼터니온(S^3), 회전군 $SO(3)$

3.1 쿼터니온(S^3)

쿼터니온 S^3의 기본성질과 또한 S^3가 Lie군이라는 사실은 잘 알려져 있다[1, 4, 6, 7, 9]. 따라서 본 논문에서는 S^3에서 1변수 부분군을 유도하는 과정을 2절에서 설명한 방법을 이용하여 유도하려고 한다.

하나의 쿼터니온 $q=(w,x,y,z)\in S^3$에 대하여,

$$\theta=\cos^{-1}w\in[0,\pi],\ (a,b,c)=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\in S^2$$

이라고 놓으면, $q=(\cos\theta, \sin\theta\cdot(a,b,c))$라 표시된다. 단 $\theta\in[0,\pi]$, $(a,b,c)\in S^2$. 함수

$$\phi: S^3\to SO(3): \phi(q)(p)=qp\bar{q},\ p\in R^3 \qquad (13)$$

는 C^∞ 함수이므로, Lie군 S^3는 R^3에서 함수 ϕ을 통하여 C^∞ 작용을 하게된다. 따라서 정리 1에 의해서 벡터장을 얻게 된다.

보조정리 2 : $\theta\in R$, $(a,b,c)\in S^2$라 하면, $\gamma(t)=(\cos\theta t, \sin\theta t(a,b,c))$는 S^3의 1변수 부분군이다.

(증명) 보조정리 1은 직접 계산에 의해서 간단히 증명된다.

정리 3 : S^3의 1변수 부분군 $\gamma_x(t)=(\cos t, \sin t(1,0,0))$, $\gamma_y(t)=(\cos t, \sin t(0,1,0))$, $\gamma_z(t)=(\cos t, \sin t(0,0,1))$에 대하여 다음을 만족한다.

(1) 1변수 부분군 $\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)$는 다음의 벡터장을 유도한다.

$$X=-2z\frac{\partial}{\partial y}+2y\frac{\partial}{\partial z},$$
$$Y=2z\frac{\partial}{\partial y}-2x\frac{\partial}{\partial z},$$
$$Z=-2y\frac{\partial}{\partial x}+2x\frac{\partial}{\partial y}.$$

(2) $L(S^3)=\langle X,Y,Z\rangle=\{aX+bY+cZ\mid a,b,c,\in R\}$로 다음 조건을 만족한다.

$$[X,Y]=-2Z,\ [Y,Z]=-2X,\ [Z,X]=-2Y.$$

(3) 하나의 쿼터니온 $(\cos\theta, \sin\theta(a,b,c))$에 대한 1변수 부분군 $\gamma(t)=(\cos\theta t, \sin\theta t(a,b,c))$은 다음의 벡터장을 유도한다.

$\theta(aX+bY+cZ)$

(증명) (1) 1변수 부분군 $\gamma_x(t) = (\cos t, \sin T(1,0,0))$은 함수 ϕ에 관한 식 (13)에 의해서 다음의 작용함수 w을 유도한다.

$w: R \times R^3 \to R^3$:

$w(t,x,y,z) = (\alpha(t,x,y,z), \beta(t,x,y,z), \delta(t,x,y,z))$

단, $\alpha(t,x,y,z) = x\beta(t,x,y,z) = 2\cos 2t$, $\delta(t,x,y,z) = -z\sin 2t$.

식 (11)을 이용하면 벡터장 $X = -2z\frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial z}$을 얻게 된다. 벡터장 X도 같은 방법으로 구할 수 있다.

(2) $[X, Y]$을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[X,Y] &= \left(-2z\frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2z\frac{\partial}{\partial x} - 2x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &\quad - \left(2z\frac{\partial}{\partial x} - 2x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-2y\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= 4y\frac{\partial}{\partial x} - 4x\frac{\partial}{\partial y} = -2Z\end{aligned}$$

나머지도 같은 방법으로 구할 수 있다.

(3) (1)번의 경우와 같이 유도된다.

위 정리 3에 의해서 log와 exp함수를 정의할 수 있다.

$$\log : S^3 \to R^3 : \log(w,(x,y,z)) = \frac{\cos^{-1} w}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z) = \frac{\cos^{-1} w}{\sqrt{1-w^2}}(x,y,z),$$

$$\exp : R^3 \to S^3 : \exp(x,y,z) = \left(\cos\|(x,y,z)\|, \frac{\sin\|(x,y,z)\|}{\|(x,y,z)\|}(x,y,z)\right)$$

따라서 하나의 쿼터니온 $q = (\cos\theta, \sin\theta(a,b,c)) \in S^3$, $C(1) = q$을 만족하는 1변수 부분군 $C(t)$은 식 (14)와 같이 주어진다.

$$C(t) = \exp(t\log q) = (\cos\theta t, \sin\theta t(a,b,c)) \tag{14}$$

3.2 회전군($SO(3)$)

회전군 $SO(3)$의 기본성질과 또한 $SO(3)$가 Lie군이라는 사실은 잘 알려져 있다[1, 4, 11]. 참고문헌[4]에 의해서 식 (15)가 성립된다.

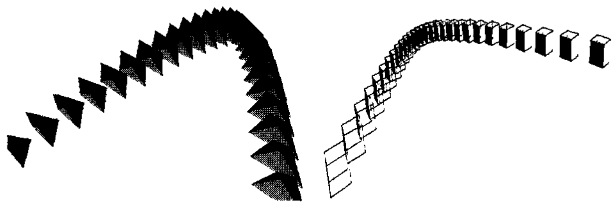
$$\log : SO(3) \to R^3 : \log R = \frac{\phi}{2\sin\phi}(R - R^T)$$

$\exp : R^3 \to SO(3)$:

$$\begin{aligned}\exp(x,y,z) &= I + \frac{\sin\|(x,y,z)\|}{\|(x,y,z)\|}\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1-\cos\|(x,y,z)\|}{\|(x,y,z)\|^2}\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

따라서 하나의 $R \in SO(3)$에 $C(1) = q$을 만족하는 1변수 부분군 $C(t)$는 식 (16)과 같이 주어진다.

$$C(t) = \exp(t\log R) \tag{16}$$



(그림 2) 쿼터니온에서의 Bézier곡선의한 회전변환

4. 결 론

본 논문에서는 일반적인 Lie군상에서 Bézier곡선과 Bézier곡면을 생성하는 새로운 알고리즘을 제시하였다. 이 방법의 장점은 수학적으로 명확하게 표현되고, 생성된 곡선과 곡면은 Lie군의 성질에 의해서 미분가능성의 테스트 없이 항상 미분 가능한 곡선과 곡면을 얻을 수 있다. 특히, 회전을 표시하는 $SO(3)$, S^3, $SU(2)$와 공간상의 물체의 일반적인 움직임을 묘사하는 $< R^3, SO(3) >$ (the euclidean group)[3]이 모두 Lie군이므로, 본 논문에서 제시한 방법은 일반적인 모든 경우에 적용을 할 수 있는 장점이 있다.

참 고 문 헌

[1] Betten, D. Topologische Transformationsgruppen, Lecture Note, Tübingen WS 1972/73.

[2] Helgason, S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, 1978.

[3] Hilgert, J., Need, K.-H. Lie-Gruppen und Lie-Algebren, Vieweg, 1991.

[4] Faugeras, O. Three Dimensional Compter Vision. MIT Press, 1999.

[5] Foley, van Dam, Feiner, Hughes. Computer Graphics, Addison Wesley Publishing Company, 1997.

[6] Kim, M-J., Kim, M-S., Shin, S. Y. A General Construction Scheme for Unite Quaternion Curves with Simple Hight Order Derivatives, (Proc. of SIGGRAPH '95), pp.369 376, 1995.

[7] Kim, M-J, Kim, Myung-Soo. A Compact Differential Formula for the First Derivatives of a Unit Quaternion Curve, J. of Visulation and Computer Animation, Vol.7, No.1, pp. 43-58, 1996.

[8] O'neil, B. Semi Riemannian Geometry with Application to Relativity, Academic Press, 1983.

[9] Shoemake, K. Animating rotation with quaternion curves, Computer Graphics(Pro. of SIGGRAPH'85), pp.245 254, 1985.

[10] Park, F. C., Ravani, B. Smooth Invariant Interpolation of Rotations, ACM Transation on Graphics, Vol.16, No.3, pp. 277-295, 1997.

[11] Pobegailo, AP. C^n interpolation on smooth manifolds with one parameter transformations, Computer Aided Design, Vol.28, No.12, pp.973 979, 1996.

[12] Varadarajan, V. S. Lie groups, Lie Algebras, and Their Representations, Springer-Verlag, 1984.

임 장 환

e-mail : jhim@cau.ac.kr

1986년 중앙대학교 이과대학 수학과 졸업(학사)

1988년 중앙대학교 일반대학원 수학과 졸업 (석사)

1996년 독일 Kiel대학 수학과 졸업(이학박사)

2000년~현재 중앙대학교 첨단영상대학원 연구교수 재직

관심분야 : 3D 컴퓨터비젼(IBM), 컴퓨터그래픽스, 사영기하학

김 태 은

e-mail : tekim@nsu.ac.kr

1989년 중앙대학교 공과대학 전기공학과 졸업 (학사)

1992년 중앙대학교 일반대학원 전자공학과 정보공학전공 졸업(공학석사)

1997년 중앙대학교 일반대학원 전자공학과 정보공학전공 졸업(공학박사)

1995년 삼성전자 휴먼테크 논문대상 은상수상

1997년~현재 남서울대학교 공학부 멀티미디어학과 조교수 재직

관심분야 : 3D영상처리, 컴퓨터비젼, 가상현실, 멀티미디어시스템