시변 파라메터를 갖는 선형시스템의 균형화된 모델 간략화

A Balanced Model Reduction for Linear Parameter Varying Systems

류 석 환
(Seog Hwan Yoo)

Abstract : This papaer deals with a model reduction problem for linear systems with time varying parameters. For this problem, a controllability Grammian and an observability Grammian are introduced and computed by solving linear matrix inequalities. Using the controllability/observability Grammian, a balanced state space realization for linear parameter varying systems is obtained. From the balanced state space realization, a reduced model can be obtained by truncating not only states but also time varying parameters and an upper bound of the model reduction error is derived as well.

Keywords : linear parameter varying systems, controllability Grammian, observability Gramian, model reduction error, linear matrix inequality

I. 서론

제어시스템을 설계할 때 전체 제어시스템의 제어성능과 외란 혹은 모델 불확실성에 대한 견실성을 향상시키기 위해서 플랜트의 수학적인 모델을 가능한 정확하게 표현할 필요가 있으며 따라서 결과의 플랜트 상태공간 모델은 차원이 높게 모델 되어진다. 최근 급속히 발전한 견실제어 기법을 사용하여 견실한 제어시스템을 설계하는 것이 많은 제어 공학자나 기술자에게 중요한 관심사가 되어왔다. 특히 상태공간 모델에 기반한 견실제어기 설계기법은 플랜트의 상태공간 모델에 주파수 가중함수를 포함한 소위 일반화한 플랜트 (generalized plant) 모델로부터 제어기를 설계하는 경우가 많다. 일반화한 플랜트 모델은 시스템의 차수가 상당히 크므로 제어기를 설계하기가 복잡하고, 제어기를 설계하여도 제어기의 차수는 주로 플랜트 모델의 차수와 동일한 차수의 제어기가 설계되므로 실제 제어기를 구현하기가 복잡하여진다. 이런 이유로 선형시불변 시스템에 대한 여러 가지의 차수축소 방법이 연구되었다[1]-[6].

상태공간에서 모델된 시스템의 차수를 축소하기 위한 통상적인 방법으로는 균형화된 상태공간 모델에서의 절삭법(balance and truncate)[1], 최적 Hankel 노옴 근사[2]-[4], 특이섭동형 근사[6] 등이 있다. 그러나 대부분의 모델 차수 축소 앨고리즘은 선형 시불변 시스템에 국한되어 발전되었다. 최근 견실제어 설계기법 중에서도 플랜트에 시변 파라메터를 갖는 시스템에 대한 설계기법이 많이 연구되었다[9]-[11]. 제어기는 주로 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequality) 해를 이용하여 합성하며 플랜트의 차수가 높을 경우 선형행렬 부등식의 해를 구하는데 기하급수적으로 시간이 많이 소요되므로 시변 파라메터를 갖는 플랜트의 모델 차수 축소에 대한 연구가 필요하다. 또한 제어성능의 향상을 위해 제어기에도 플랜트와 동일한 시변 파라메터를 포함하는 소위 이득계획(gain scheduling) 제어기의 설계에 관한 연구결과가 많이 제시되었다[10][11]. 이 경우에서도 제어기를 간편하게 구현하기 위해서는 시변 파라메터를 갖는 시스템의 모델 근사에 대한 연구가 필요하다.

최근 G.D. Wood[7]는 선형행렬 부등식의 해를 이용하여 연속형 시스템에서 시변 파라메터를 갖는 선형시스템의 모델 근사화에 관한 연구결과를 제시하였으나 시변 파라메터의 수는 축소하지 않고 상태변수의 수만 축소하였다. C. L. Beck[8]는 이산형 시스템에서 불확실성을 포함한 선형시스템의 경우에 대해서 모델 간략화를 연구하였으며 균형화된 상태공간 모델에서 상태변수와 불확실한 요소의 일부를 절삭하였을 때의 오차한계를 제시하였다. 본 연구에서는 연속형 시변 파라메터를 갖는 선형시스템을 균형화하고 상태변수 뿐만 아니라 시변 파라메터의 일부를 제거하는 간략화된 모델을 생성하는 방법을 제시하고 그때의 모델근사 오차의 상한치를 제시한다.

R^n은 n차원 실 벡터공간(real vector space)이고 $R^{n\times m}$은 $n\times m$차 실수행렬을 나타낸다. 0 은 영행렬을 I는 단위행렬을 의미하고 문맥상 쉽게 차원을 알 수 있는 경우 차원을 표시하지 않는다. A^T는 행렬 A의 전치행렬을 나타내고 블록행렬에서 (i,j)블록에서의 $*$는 (j,i)블록에 표시된 행렬의 전치행렬을 의미한다. $diag(A,B)$는 행렬 A와 행렬 B로 구성된 대각행렬이고 $tr(A)$는 행렬A의 trace를 의미하고 $\|\cdot\|_2$는 L_2 노옴을 나타낸다. 입력이 $u(t)$, 출력이 $y(t)$, 시변 파라메터가 $\Theta(t)$인 시변 파라메터 시스템 G에서 $\|G\|_{i,2}=sup_{\|\Theta(t)\|\le 1} sup_{u(t)\in L_2^+}\frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}$를 의미한다.

접수일자 : 2001. 9. 22., 수정완료 : 2002. 2. 15.
류석환 : 대구대학교 정보통신공학부(shryu@taegu.ac.kr)
※ 이 논문은 2000학년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의한 논문임.

II. 가관측성/가제어성 그래미안

다음의 안정한 시변 파라메터 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))u(t)\\ y(t) &= (C+\Delta C(t))x(t)+(D+\Delta D(t))u(t)\end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n$는 상태변수, $u(t)\in R^m$는 제어입력, $y(t)\in R^p$는 출력이고 A, B, C, D는 적절한 차원의 상수행렬이고 $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C(t)$, $\Delta D(t)$는 시변 파라메터를 포함하는 행렬이다. 시변 파라메터 행렬 $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C(t)$, $\Delta D(t)$를 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta B(t)\\ \Delta C(t) & \Delta D(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}\Theta(t)[\,H J\,] \tag{2}$$
$$\Theta(t)=diag(\theta_1(t)I_{r_1},\ \theta_2(t)I_{r_2},\cdots,\ \theta_s(t)I_{r_s}),$$

$$\Theta(t)^T\Theta(t)\le I \tag{3}$$

여기에서 $\Theta(t)$는 노움이 유계된 시변 파라메터 행렬이고, $F\in R^{n\times r}$, $G\in R^{p\times r}$, $H\in R^{r\times n}$, $J\in R^{r\times m}$는 상수행렬이고 $r=r_1+\cdots+r_s$이다.

(2)를 이용하여 시스템 (1)을 다시 쓰면

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Fw(t)+Bu(t)\\ z(t) &= Hx(t)+Ju(t)\\ y(t) &= Cx(t)+Gw(t)+Du(t)\\ w(t) &= \Theta(t)z(t)\end{aligned} \tag{4}$$

이 된다. 시변파라메터 시스템 (4)를 간략화한 형태로 다음과 같이 표기한다.

$$G=\left[\begin{array}{c|cc} A & F & B\\ \hline H & 0 & J\\ C & G & D\end{array}\right] \tag{5}$$
$$w(t)=\Theta(t)z(t)$$

보조정리 1 : (가관측성/가제어성 그래미안)

1) (6)에서 정의한 선형행렬부등식 $L_o<0$를 만족하는 양한정 행렬 $Q=Q^T>0$, $R=R^T>0$, $R=diag(R_1,\cdots,R_s)$, $R_i\in R^{r_i\times r_i}$ $(i=1,\cdots,s)$이 존재하면 모든 $t\ge 0$에서 $u(t)\equiv 0$일 때 $\int_0^\infty y(t)^Ty(t)dt<x(0)^TQx(0)$를 만족한다.

$$L_o=\begin{bmatrix}A^TQ+QA+C^TC & * & *\\ RH & -R & *\\ G^TC+F^TQ & 0 & G^TG-R\end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

2) (7)에서 정의한 선형행렬부등식 $L_c<0$를 만족하는 양한정 행렬 $P=P^T>0$, $S=S^T>0, S=diag(S_1,\cdots,S_s)$, $S_i\in R^{r_i\times r_i}$ $(i=1,\cdots,s)$이 존재하면 $x(-\infty)=0$에서 $x(0)=x_0$가 되게 하는 모든 $u(t)$는 $\int_{-\infty}^0 u(t)^Tu(t)dt > x_0^TP^{-1}x_0$를 만족한다.

$$L_c=\begin{bmatrix}PA^T+AP+BB^T & * & *\\ HP+JB^T & JJ^T-S & *\\ SF^T & 0 & -S\end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

증명 : 1) 리아푸노프 함수 $V(x,t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}V(x,t) &= x(t)^TQx(t)\\ &\quad+\int_0^t(z(t)^TRz(t)-w(t)^TRw(t))dt>0\end{aligned} \tag{8}$$

시스템 (5)는 선형행렬 부등식 (6)을 만족하므로 $\Theta(t)^T\Theta(t)\le I$인 모든 $\Theta(t)$에 대해서 안정하고 따라서 $0<V(\infty)<\infty$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y(t)^Ty(t)dt &= \int_0^\infty(y(t)^Ty(t)+\dot{V}(x,t))dt\\ &\quad-V(\infty)+V(0)\\ &\le\int_0^\infty\begin{bmatrix}x(t)\\ w(t)\end{bmatrix}^T\overline{L_o}\begin{bmatrix}x(t)\\ w(t)\end{bmatrix}dt+x(0)^TQx(0)\\ &< x(0)^TQx(0)\end{aligned} \tag{9}$$

여기에서

$$\overline{L_o}=\begin{bmatrix}A^TQ+QA+H^TRH+C^TC & *\\ G^TC+F^TQ & G^TG-R\end{bmatrix}$$

이다. Schur 보수정리에 의해 $\overline{L_o}<0\Leftrightarrow L_o<0$이므로 식(9)의 마지막 부등식을 얻는다.

2) 리아푸노프 함수 $V(x,t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}V(x,t) &= x(t)^TP^{-1}x(t)\\ &\quad+\int_0^t(z(t)^TS^{-1}z(t)-w(t)^TS^{-1}w(t))dt\end{aligned} \tag{10}$$

$V(-\infty)=-\int_{-\infty}^0 z(t)^TS^{-1}(I-\Theta(t)^T\Theta(t))z(t)dt\le 0$ 이므로

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-\infty}^0(u(t)^Tu(t)-u(t)^Tu(t)+\dot{V}(x,t))dt\\ &\quad-V(0)+V(-\infty)\\ &\le\int_{-\infty}^0 u(t)^Tu(t)dt+\int_{-\infty}^0\begin{bmatrix}P^{-1}x(t)\\ w(t)\\ u(t)\end{bmatrix}^T\overline{L_c}\begin{bmatrix}P^{-1}x(t)\\ w(t)\\ u(t)\end{bmatrix}dt\\ &\quad-x(0)^TP^{-1}x(0)\end{aligned} \tag{11}$$

여기에서

$$\overline{L_c}=\begin{bmatrix}PA^T+AP+PH^TS^{-1}HP & * & *\\ F^T & -S^{-1} & *\\ J^TS^{-1}HP+B^T & 0 & J^TS^{-1}J-I\end{bmatrix}$$

이다. Schur 보수정리를 사용하면 $\overline{L_c}<0\Leftrightarrow L_c<0$임을 알 수 있고 따라서 (11)로부터

$$\int_{-\infty}^0 u(t)^Tu(t)dt>x(0)^TP^{-1}x(0)$$

을 얻는다. ■

보조정리 1에서 정의된 양한정 행렬 Q와 P를 시변 파라메터 시스템의 가관측성 그래미안, 가제어성 그래미안 이라고 정의한다. 그러나 Q와 P가 선형행렬부등식의 해로 정의가 되므로 유일하지는 않다.

III. 균형화 된 상태공간구현과 모델 간략화

선형행렬부등식 (6)과 (7)의 해인 양한정 행렬 Q, R, P, S를 이용하여 $PQ=T\Sigma T^{-1}$, $SR=W\Pi W^{-1}$를 만족하는 상사변환행렬 T와 W를 구하면 T, W는 (12)와 (13)을 만족한다.

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = T^T Q T = T^{-1} P T^{-T} \quad (12)$$
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$$

$$\begin{aligned}\Pi = & \ diag(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_s) = diag(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r) \\ & = W^T R W = W^{-1} S W^{-T}\end{aligned} \quad (13)$$
$$tr(\Phi_1) \geq tr(\Phi_2) \geq \cdots \geq tr(\Phi_s)$$

변환행렬 T, W를 이용하여 시스템 (5)를 (14)와 같이 좌표변환 한다.

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} T^{-1}AT & T^{-1}FW & T^{-1}B \\ \hline W^{-1}HT & 0 & W^{-1}J \\ CT & GW & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} A_b & F_b & B_b \\ \hline H_b & 0 & J_b \\ C_b & G_b & D_b \end{array}\right] \quad (14)$$

여기에서 $w_b(t) = \Theta_b(t) z_b(t)$, $\Theta_b(t) = W^{-1}\Theta(t) W$이다.

이 경우 좌표변환 된 시스템의 상태공간구현 역시 다음의 선형행렬부등식을 만족한다.

$$L_o = \begin{bmatrix} A_b^T\Sigma + \Sigma A_b + C_b^T C_b & * & * \\ \Pi H_b & -\Pi & * \\ G_b^T C_b + F_b^T \Sigma & 0 & G_b^T G_b - \Pi \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$L_c = \begin{bmatrix} \Sigma A_b^T + A_b \Sigma + B_b B_b^T & * & * \\ H_b \Sigma + J_b B_b^T & J_b J_b^T - \Pi & * \\ \Pi F_b^T & 0 & -\Pi \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

이러한 이유로 시스템 (14)를 시변 파라메터 시스템 (5)의 균형화 된 상태공간 구현이라고 정의한다. 시변 파라메터 시스템 (5)가 위의 방법을 통하여 이미 균형화 되었다고 가정하고 다음과 같이 분할된 시스템으로 표현한다.

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_{11} & A_{12} & F_{11} & F_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & F_{21} & F_{22} & B_2 \\ \hline H_{11} & H_{12} & 0 & 0 & J_1 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 & J_2 \\ C_1 & C_2 & G_1 & G_2 & D \end{array}\right] \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1(t) & 0 \\ 0 & \Theta_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

여기에서 $A_{11} \in R^{k\times k}$, $A_{12} \in R^{k\times(n-k)}$, $A_{21} \in R^{(n-k)\times k}$, $A_{22} \in R^{(n-k)\times(n-k)}$, $B_1 \in R^{k\times m}$, $B_2 \in R^{(n-k)\times m}$, $C_1 \in R^{p\times k}$, $C_2 \in R^{p\times(n-k)}$, $F_{11} \in R^{k\times v}$, $F_{12} \in R^{k\times(r-v)}$, $F_{21} \in R^{(n-k)\times v}$, $F_{22} \in R^{(n-k)\times(r-v)}$, $H_{11} \in R^{v\times k}$, $H_{12} \in R^{v\times(n-k)}$, $H_{21} \in R^{(r-v)\times k}$, $H_{22} \in R^{(r-v)\times(n-k)}$, $J_1 \in R^{v\times m}$, $J_2 \in R^{(r-v)\times m}$, $G_1 \in R^{p\times v}$, $G_2 \in R^{p\times(r-v)}$, $\Theta_1(t) \in R^{v\times v}$, $\Theta_2(t) \in R^{(r-v)\times(r-v)}$ 이다.

균형화 된 시스템 (17)로부터 상태변수의 차수가 k이고 시변 파라메터 $\Theta(t)$의 차수가 v로 차수축소 된 간략화 모델을 다음과 같이 정의한다.

$$G_r = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & F_{11} & B_1 \\ \hline H_{11} & 0 & J_1 \\ C_1 & G_1 & D \end{array}\right] \quad (18)$$

여기에서 $w_1(t) = \Theta_1(t) z_1(t)$이다.

간략화된 시스템 (18)은 상태변수의 수가 n에서 k로 줄었을 뿐만 아니라 시변 파라메터 행렬의 차수도 r에서 v로 줄었다.

정리 2 :

(1) 간략화된 시스템 (18)은 안정하고 균형화 되었다.

(2) 모델 간략화 오차는 다음과 같이 유계된다.

$$\| G - G_r \|_{i,2} \leq 2\left(\sum_{j=k+1}^{n} \sigma_j + \sum_{j=v+1}^{r} \pi_j\right)$$

증명 : (1) $\Sigma = diag(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $\Pi = diag(\Pi_1, \Pi_2)$, $\Sigma_1 \in R^{k\times k}$, $\Pi_1 \in R^{v\times v}$라 정의하면 간략화된 시스템 (18)은 선형행렬 부등식 (15)와 (16)을 만족하며 해는 Σ_1, Π_1임을 쉽게 알 수 있다.

(2) 오차 시스템 G_e를 다음과 같이 표현한다.

$$G_e = \left[\begin{array}{c|cc} \overline{A_e} & \overline{F_e} & \overline{B_e} \\ \hline \overline{H_e} & 0 & \overline{J_e} \\ \overline{C_e} & \overline{G_e} & 0 \end{array}\right] \quad (19)$$

여기에서

$$\overline{A_e} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \ \overline{F_e} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \ \overline{B_e} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$\overline{H_e} = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ 0 & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \ \overline{J_e} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \ \overline{C_e} = [-C_1 \ C_2 \ C_2],$$

$$\overline{G_e} = [-G_1 \ G_1 \ G_2], \ w_e = \begin{bmatrix} \Theta_1(t) & 0 \\ 0 & \Theta(t) \end{bmatrix} z_e$$

이다.

일반성을 잃지 않고 다음의 두가지 경우를 생각한다.

Case 1 : 상태변수 1개만 절삭하는 경우($k=n-1$, $v=r$) 이 경우 $v=r$이므로 F_{12}, F_{22}, H_{21}, H_{22}, J_2, G_2는 공행렬(empty matrix)이므로 오차 시스템 G_e는 다음과 같이 표시된다.

$$G_e=\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & 0 & 0 & F_{11} & 0 & B_1 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 & F_{11} & B_1 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & F_{21} & B_2 \\ \hline H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & H_{11} & H_{12} & 0 & 0 & J \\ -C_1 & C_1 & C_2 & -G & G & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \overline{A_e} & \overline{F_e} & \overline{B_e} \\ \hline \overline{H_e} & 0 & \overline{J_e} \\ \overline{C_e} & \overline{G_e} & 0 \end{array}\right] \quad (20)$$

여기에서 $w_e=\Theta_e(t)z_e=\begin{bmatrix}\Theta(t) & 0\\ 0 & \Theta(t)\end{bmatrix}z_e$ 이다.

오차 시스템 (20)에서 변환 행렬 M을 이용하여 좌표변환을 하면 G_e는 다음과 같이 표현된다.

$$G_e=\left[\begin{array}{c|cc} A_e & F_e & B_e \\ \hline H_e & 0 & J_e \\ C_e & G_e & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} M^{-1}\overline{A_e}M & M^{-1}\overline{F_e} & M^{-1}\overline{B_e} \\ \hline \overline{H_e}M & 0 & \overline{J_e} \\ \overline{C_e}M & \overline{G_e} & 0 \end{array}\right] \quad (21)$$

여기에서

$$M=\begin{bmatrix} I & I & 0\\ I & -I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},\ A_e=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12}/2\\ 0 & A_{11} & -A_{12}/2\\ A_{21} & -A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\ B_e=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\\ B_2\end{bmatrix},$$

$$F_e=\begin{bmatrix} F_{11}/2 & F_{11}/2\\ F_{11}/2 & -F_{11}/2\\ 0 & F_{21}\end{bmatrix},\ H_e=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{11} & 0\\ H_{11} & -H_{11} & H_{12}\end{bmatrix},\ J_e=\begin{bmatrix}J\\ J\end{bmatrix},$$

$$C_e=[0\ \ -2C_1\ \ C_2],\ G_e=[-G\ \ G]$$

이다.

시스템 (21)에서 다음의 선형행렬 부등식을 만족하는 $\Sigma_e=\Sigma_e^T>0$, $\Pi_e=\Pi_e^T>0$, $\Pi_e\Theta_e(t)=\Theta_e(t)\Pi_e$가 존재하면 $\|G_e\|_{i,2}\le\gamma$를 만족한다[11].

$$L=\begin{bmatrix} \Sigma_eA_e^T+A_e\Sigma_e+B_eB_e^T+\gamma^{-2}\Sigma_eC_e^TC_e\Sigma_e & * & * \\ H_e\Sigma_e+J_eB_e^T & J_eJ_e^T-\Pi_e & * \\ \Pi_eF_e^T+\gamma^{-2}\Pi_eG_e^TC_e\Sigma_e & 0 & \gamma^{-2}\Pi_eG_e^TG_e\Pi_e-\Pi_e \end{bmatrix}<0 \quad (22)$$

$\Sigma=diag(\Sigma_1,\sigma_n)$이라 정의하고 $\Sigma_e=diag(\Sigma_1,\sigma_n^2\Sigma_1^{-1},2\sigma_n)$, $\Pi_e=\begin{bmatrix}\Pi+\sigma_n^2\Pi^{-1} & \Pi-\sigma_n^2\Pi^{-1}\\ \Pi-\sigma_n^2\Pi^{-1} & \Pi+\sigma_n^2\Pi^{-1}\end{bmatrix}$, $\gamma=2\sigma_n$이라 두면 L은 다음을 만족한다.

$$L=\begin{bmatrix}U_1^T & 0 & 0\\ 0 & U_2^T & 0\\ 0 & 0 & U_2^T\end{bmatrix}L_c\begin{bmatrix}U_1 & 0 & 0\\ 0 & U_2 & 0\\ 0 & 0 & U_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}V_1^T & 0 & 0\\ 0 & V_2^T & 0\\ 0 & 0 & V_2^T\end{bmatrix}L_o\begin{bmatrix}V_1 & 0 & 0\\ 0 & V_2 & 0\\ 0 & 0 & V_2\end{bmatrix}<0 \quad (23)$$

여기에서

$$U_1=\begin{bmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},\ U_2^T=\begin{bmatrix}I\\ I\end{bmatrix},\ V_1=\begin{bmatrix}0 & \sigma_n\Sigma_1^{-1} & 0\\ 0 & 0 & -I\end{bmatrix},$$

$$V_2^T=\begin{bmatrix}\sigma_n\Pi^{-1}\\ -\sigma_n\Pi^{-1}\end{bmatrix}$$

이다. 따라서 $\|G_e\|_{i,2}\le 2\sigma_n$이다.

Case 2 : 시변 파라메터 1개만 절삭하는 경우 ($k=n$, $v=r-1$)

이 경우 $k=n$이므로 A_{12}, A_{21}, A_{22}, F_{21}, F_{22}, H_{12}, H_{22}는 공행렬이다. 따라서 G_e는

$$G_e=\left[\begin{array}{cc|cccc} A & 0 & F_{11} & 0 & 0 & B \\ 0 & A & 0 & F_{11} & F_{12} & B \\ \hline H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 \\ 0 & H_{11} & 0 & 0 & 0 & J_1 \\ 0 & H_{21} & 0 & 0 & 0 & J_2 \\ -C & C & -G_1 & G_1 & G_2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \overline{A_e} & \overline{F_e} & \overline{B_e} \\ \hline \overline{H_e} & 0 & \overline{J_e} \\ \overline{C_e} & \overline{G_e} & 0 \end{array}\right] \quad (24)$$

여기에서 $w_e=\Theta_e(t)z_e=\begin{bmatrix}\Theta_1(t) & 0\\ 0 & \Theta(t)\end{bmatrix}z_e$ 이다.

오차 시스템 (24)에서 변환 행렬 M을 이용하여 좌표변환을 하여 G_e를 다음과 같이 표현한다.

$$G_e=\left[\begin{array}{c|cc} A_e & F_e & B_e \\ \hline H_e & 0 & J_e \\ C_e & G_e & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} M^{-1}\overline{A_e}M & M^{-1}\overline{F_e} & M^{-1}\overline{B_e} \\ \hline \overline{H_e}M & 0 & \overline{J_e} \\ \overline{C_e}M & \overline{G_e} & 0 \end{array}\right] \quad (25)$$

여기에서

$$M=\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix},\ A_e=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix},\ B_e=\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_e=\begin{bmatrix} F_{11}/2 & F_{11}/2 & F_{12}/2 \\ F_{11}/2 & -F_{11}/2 & -F_{12}/2 \end{bmatrix},\ H_e=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{11} \\ H_{11} & -H_{11} \\ H_{21} & -H_{21} \end{bmatrix},$$

$$J_e=\begin{bmatrix} J_1 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix},\ C_e^T=\begin{bmatrix} 0 \\ -2C^T \end{bmatrix},\ G_e^T=\begin{bmatrix} -G_1^T \\ G_1^T \\ G_2^T \end{bmatrix}$$

이다.

$\Pi=diag(\Pi_1,\pi_r)$이라 분할하고 $\gamma=2\pi_r$, Σ_e, Π_e를 (26)과 같이 정의하면 (22)의 선형행렬부등식은 (27)을 만족한다.

$$\Sigma_e=\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \pi_r^2\Sigma^{-1} \end{bmatrix},\ \Pi_e=\begin{bmatrix} \Pi_1+\pi_r^2\Pi_1^{-1} & \Pi_1-\pi_r^2\Pi_1^{-1} & 0 \\ \Pi_1-\pi_r^2\Pi_1^{-1} & \Pi_1+\pi_r^2\Pi_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi_r \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} L= & \begin{bmatrix} U_1^T & 0 & 0 \\ 0 & U_2^T & 0 \\ 0 & 0 & U_2^T \end{bmatrix} L_c \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_2 \end{bmatrix} \\ & +\begin{bmatrix} V_1^T & 0 & 0 \\ 0 & V_2^T & 0 \\ 0 & 0 & V_2^T \end{bmatrix} L_o \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_2 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

여기에서

$$U_1=[I\ \ 0],\ U_2=\begin{bmatrix} I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},\ V_1=[0\ \ \pi_r\Sigma^{-1}],$$

$$V_2=\begin{bmatrix} \pi_r\Pi_1^{-1} & -\pi_r\Pi_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 $\|G_e\|_{i,2}\le 2\pi_r$을 얻는다. ■

정리 2에서 균형화된 절삭법을 사용하였을 때 간략화된 모델의 모델오차 상한치를 제시하였다. 그러나 실제 모델 간략화를 수행하는 과정에서 선형시불변 시스템의 경우에와는 달리 선형행렬부등식 (6)과 (7)의 해가 유일하지 않기 때문에 많은 어려움이 예상된다. 모델 오차의 상한치를 줄이기 위해서 PQ, RS의 고유치중 상대적으로 크기가 적은 고유치를 최소화하는 P,Q,R,S를 구하는 것이 바람직 하지만 이것은 볼록 최적화문제가 아니므로 최적해를 구하기가 아주 어렵다. 따라서 본 연구에서는 반복적으로 준최적해를 구하는 한가지 방법을 제시한다.

Step 1 : $i=0$이라 두고 (6)과 (7)을 만족하는 P_i,Q_i,R_i,S_i를 구한다.

Step 2 : $i=i+1$이라 두고 선형행렬 부등식 (7)의 제약조건하에서

$$\begin{aligned} J &= tr((P_{i-1}Q_{i-1})^{-1}P_iQ_{i-1})+tr((R_{i-1}S_{i-1})^{-1}R_{i-1}S_i) \\ &= tr(P_{i-1}^{-1}P_i)+tr(S_{i-1}^{-1}S_i) \end{aligned}$$

를 최소화하는 P_i,S_i를 구한다.

Step 3 : 선형행렬 부등식 (6)의 제약조건하에서

$$J=tr(Q_{i-1}^{-1}Q_i)+tr(R_{i-1}^{-1}R_i)$$

를 최소화하는 Q_i,R_i를 구한다.

Step 4 : 만족할만한 해를 얻을 때까지 Step 2로 가서 반복한다.

검토 : $tr(PQ)+tr(RS)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2+\sum_{j=1}^{r}\pi_j^2$이므로 Step 2와 Step 3에서의 가치함수는 크기가 작은 σ_i와 π_j의 가중치를 크게하여 크기가 작은 σ_i와 π_j를 더욱 더 줄이기 위해 사용되었으며 적절한 반복법은 앞으로 많은 연구가 필요하다.

IV. 수치예

이 절에서는 가상적인 선형 시변 파라메터를 갖는 시스템에 대해서 본 연구에서 제시한 방법을 사용하여 간략화된 모델을 구한다. 시변 파라메터 시스템 (5)가 다음과 같다고 가정한다.

$$A=\begin{bmatrix} -2.6 & -0.6 & -0.7 & 0.6 \\ 0.4 & -3.4 & -0.5 & 0.2 \\ 0.1 & -0.1 & -3 & 0 \\ 0.5 & -0.4 & -0.7 & -2.6 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix},\ C^T=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ H^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ G=[0\ \ 1],\ J=\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ D=0,$$

$$\Theta(t)=\begin{bmatrix} \theta_1(t) & 0 \\ 0 & \theta_2(t) \end{bmatrix}$$

Step 1에서 제약조건 (6)과 (7)에서 $tr(P_0+Q_0)+tr(R_0+S_0)$를 최소화하는 P_0,Q_0,R_0,S_0를 구하여 초기화하고 4회 반복을 수행후 준최적해 P,Q,R,S를 얻어 (12)와 (13)의 변환행렬을 얻은 후 균형화하여 $\Sigma=diag(0.563, 0.0435, 0.00246, 0.00020)$, $\Pi=diag(0.931, 0.103)$를 얻었다.

균형화된 시스템의 시변 파라메터 행렬은 $\Theta_b(t)=W^{-1}\Theta(t)W=diag(\theta_2(t),\theta_1(t))$이다. Σ의 정보로부터 시변 파라메터 시스템을 2차계로 근사화하여 다음의 시스템을 얻는다.

$$G_r=\left[\begin{array}{cc|ccc} -3.01 & -1.29 & 0.146 & 0.264 & 1.39 \\ 0.033 & -2.61 & -0.420 & -0.757 & 0.0535 \\ \hline 1.23 & 0.427 & 0 & 0 & 0.156 \\ 0.416 & 0.139 & 0 & 0 & 0 \\ 0.932 & 0.170 & 0.641 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (28)$$

여기에서 $w_1(t)=\Theta_b(t)z_1(t)$이다. 이 경우 모델오차의 상한치는 0.00532로 예측되며, 참고로 $\theta_1(t)=\theta_2(t)=1$일 때 모델 오차의 크기를 그림1에 나타낸다. 또한 상태변수 2개와 시변 파라메터 1개를 절삭한 경우의 차수축소된 근사화 모델은 다음과 같다.

$$G_r=\left[\begin{array}{cc|cc} -3.01 & -1.29 & 0.146 & 1.39 \\ 0.033 & -2.61 & -0.420 & 0.0535 \\ \hline 1.23 & 0.427 & 0 & 0.156 \\ 0.932 & 0.170 & 0.641 & 0 \end{array}\right] \quad (29)$$

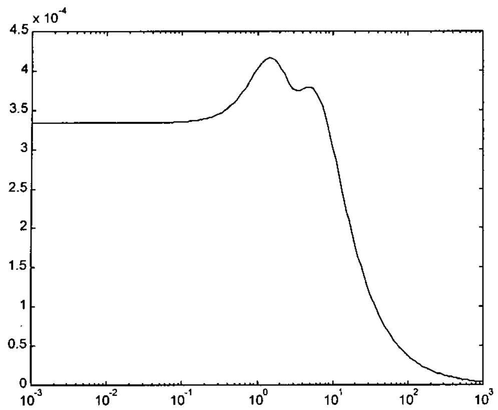

그림 1. 모델오차($k=2, v=2$)
Fig. 1. Model Error($k=2, v=2$)

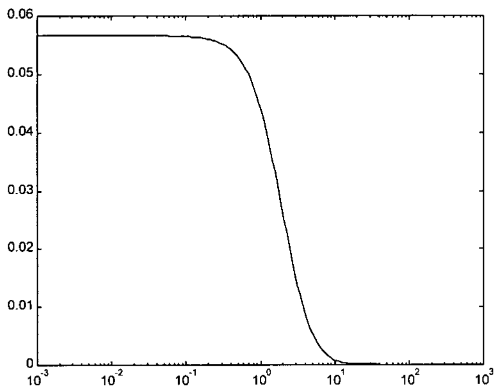

그림 2. 모델오차($k=2, v=1$)
Fig. 2 Model Error($k=2, v=1$)

이 경우 간략화된 시스템은 시변 파라메터 $\theta_1(t)$가 절삭되어 $\theta_2(t)$에만 영향을 받으며, 모델오차의 상한치는 0.2113이다. 참고로 $\theta_2(t)=1$이라 가정했을 때 모델 오차의 크기를 그림 2에 나타낸다.

V. 결론

본 연구에서는 노움이 유계된 시변 파라메터를 갖는 선형 시스템의 모델 간략화의 한가지 방법을 제시하였다. 이를 위하여 가제어성/가관측성 그래미안을 정의하고 균형화된 상태공간 구현을 통하여 절삭법을 수행하였다.

이 연구의 주요 기여도는 상태변수 뿐만 아니라 시변 파라메터의 개수를 축소하는 방법을 제시하였고 그때의 모델 오차의 상한치를 선형행렬 부등식의 해를 이용하여 구하였다. 간략화된 모델의 오차 상한치를 줄이기 위해서는 최적화 문제의 해를 구하여야 한다. 그러나 이경우의 최적화문제는 볼록최적화문제가 아니므로 아직까지는 최적해를 구하는 방법이 없다. 수치 예에서는 준 최적해를 구하여 간략화를 수행하였으므로 모델 오차의 상한치는 실제 모델의 오차보다 훨씬 큰 값으로 예측되었다.

참고문헌

[1] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Modern reduction via balanced state space representations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-27, no. 2, pp. 382-387, 1982.

[2] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞-error bounds," *Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, 1984.

[3] G. A. Latham and B. D. O. Anderson, "Frequency weighted optimal Hankel norm approximation of stable transfer functions," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 5, no. 4, pp. 229-236, 1985.

[4] B. D. O. Anderson, "Weighted Hankel norm approximation: Calculation of bounds," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 7, no. 4, pp. 247-255, 1986.

[5] D. G. Meyer, "Fractional balanced reduction : Model reduction via fractional epresentations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-35, pp. 1341-1345, 1990.

[6] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems," *Int. J. Control*, vol. 50, pp. 1379-1405, 1989.

[7] G. D. Wood, P. J. Goddard, and K. Glover, "Approximation of linear parameter varying systems," *Proceedings of the 35th CDC*, pp. 406-411, Kobe, Japan, Dec. 1996.

[8] C. L. Beck, J. Doyle, and K. Glover, "Model reduction of multidimensional and uncertain systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-41, no. 10, pp. 1466-1477, 1996.

[9] L. Xie, M. Fu, and de Souza, C. E., "H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-37, pp. 1253-1256, 1992.

[10] P. Apkarian and P. Gahinet, "A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-40, no. 5, pp.853-864, 1995.

[11] I. Emre Kose and F. Jabbari, "Disturbance attenuation for systems with real parametric uncertainty," *Proceedings of American Control Conference*, Albuquerque, NM, June 1997.

류 석 환

1956년 1월 3일생, 1975년 서울대 전기공학과 졸업(공학사), 1979년 동대학원 전기공학과 졸업(공학석사), 1989년 University of Florida 전기공학과 졸업(공학박사). 1991년-현재 대구대학교 정보통신공학부 교수, 주관심분야는 견실제어이론, 제어이론의 응용.