

## Takagi-Sugeno 퍼지모델에 기반한 반복학습제어 시스템: 이차원 시스템이론을 이용한 접근방법

### Takagi-Sugeno Fuzzy Model-Based Iterative Learning Control Systems: A Two-Dimensional System Theory Approach

추준욱, 이연정, 최봉열  
(Jun-Uk Chu, Yun-Jung Lee, and Bong-Yeol Choi)

**Abstract :** This paper introduces a new approach to analysis of error convergence for a class of iterative learning control systems. Firstly, a nonlinear plant is represented using a Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy model. Then each iterative learning controller is designed for each linear plant in the T-S fuzzy model. From the view point of two-dimensional(2-D) system theory, we transform the proposed learning systems to a 2-D error equation, which is also established in the form of T-S fuzzy model. We analyze the error convergence in the sense of induced  $L_2$ -norm, where the effects of disturbances and initial conditions on 2-D error are considered. The iterative learning controller design problem to guarantee the error convergence can be reduced to the linear matrix inequality problem. This method provides a systematic design procedure for iterative learning controller. A simulation example is given to illustrate the validity of the proposed method.

**Keywords :** iterative learning control, Takagi-Sugeno fuzzy model, two-dimensional systems

#### I. 서론

Arimoto[1]가 기본적인 개념을 제안한 이후 반복학습제어 시스템에 대한 다양한 연구가 진행되고 있다. 이러한 연구들은 새로운 학습방법을 제안하며 그에 대한 오차 수렴성을 해석함으로써 그 타당성을 보인다. 따라서 오차 수렴성 해석은 반복학습제어에서 가장 중요한 논점이며 지금까지 많은 발전이 있어왔다. 이러한 발전으로 대상 시스템에 대한 가정들이 극복되었으며 실제 시스템에 대한 적용성이 높아졌다. 초창기의 연구들[2][3]은  $\lambda$ -노름 관점에서 오차의 수렴성을 보였다. 그러나  $\lambda$ -노름의 사용은 다분히 임시 변통적이며 증명 과정을 복잡하게 했다. 또한  $\lambda$ -노름 관점에서 오차가 단조감소적 수렴을 보장하더라도  $L_\infty$ -노름 관점에서는 큰 오버슈 현상이 관찰되었다[4]. 다른 한편으로  $L_2$ -노름과 같이 오차를 에너지 관점에서 해석한 연구들이 있다[5]-[9]. 이러한 연구들은 최적제어 또는 적응제어 이론과의 접목을 시도하고 있다. 오차 수렴성을 해석하기 위해 방법론적으로 성능지수 최소화법이나 리아프노프 방법을 응용하고 있다. 대상 시스템의 변수들에 대하여 물리적 특성이 고려되어야 할 경우,  $L_2$ -노름 관점에서의 수렴성 해석이 바람직하다. 또한 초기오차나 외란의 영향에 대한 반복학습 제어기의 견실성 해석에도 유용하게 사용되고 있다. 그러나 각각의 연구들은 비선형 시스템을 위해 설정된 반복학습 문제에 따라 초기조건, Lipschitz condition, 또는 상태변수의 고차 미분 등과 같은 가정들을 여전히 사용하고 있다.

이상의 연구들과 더불어 언급할 수 있는 것으로 이차원 시스템이론 관점에서 반복학습 시스템을 해석한 연구들이 있다. 이차원 시스템 이론은 Roesser[10]에 의해 소개된 이후로 여러 분야에서 응용되어왔다. 반복학습제어는 그 중 한 분야로서 Geng[11]에 의해 도입되었으며 많은 연구가 있어왔다[12]-[14]. 반복학습과정의 변수들은 두개의 독립변수 즉, 시간과 반복횟수에 의존적이다. 시간 축으로 학습대상 시스템의 동적변화가 일어나며 반복횟수 축으로 학습이 이루어진다는 점에서 이차원 시스템으로 간주할 수 있다. 이러한 연구들에서는 이차원 변수를 가진 대상 시스템과 반복학습 제어기를 이차원 오차방정식으로 변환하고 이차원 시스템 이론을 근거로 오차 수렴성을 해석한다. 즉, 반복학습제어 문제가 상태변수와 제어입력의 오차방정식으로 다루어진다는 점에서 이차원 추종제어 문제로 볼 수 있다. 그러나 이 과정에서 대상 시스템을 선형 시스템으로 제한하는데 이는 오차 수렴성 증명에서 선형 이차원 시스템에 대한 안정성 이론을 이용하기 때문이다. 이에 대하여 Kurek[15]은 비선형 이차원 시스템의 안정성 해석에 대한 연구 결과를 발표하였다. 여기서 일차원 리아프노프 방법의 일반화된 형태로 이차원 리아프노프 안정성 정리를 제안하였으며 반복학습 시스템에 적용될 수 있음을 언급하였다. 그러나 반복학습 제어기의 설계 문제에서 오차 수렴성을 보장하는 이차원 리아프노프 후보함수의 결정이 쉽지 않다.

이상에서 살펴본 바와 같이 여러 연구들에도 불구하고 비선형 시스템에 대한 반복학습의 오차 수렴성 해석은 많은 제한을 가지고 있다. 이는 대상 시스템이 가지는 비선형성에 의한 것으로 본 논문에서는 비선형 반복학습 시스템의 오차 수렴성 해석을 위한 새로운 접근방법을 제시한다. 비선형 시스템의 반복학습 과정을 이차원 오차 방정식으로 표현하고

접수일자: 2001. 8. 18., 수정완료: 2002. 2. 7.

추준욱, 이연정, 최봉열: 경북대학교 전자공학과

(chu@palgong.knu.ac.kr/yjlee@palgong.knu.ac.kr/bychoi@ee.knu.ac.kr)

$L_2$ -노음 관점에서 오차 수렴성을 보장하는 반복학습 제어기의 설계 방법을 제안한다. 이 과정에서 대상 시스템이 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지모델로 표현됨을 가정하고 국부적 선형 시스템의 퍼지추론으로 나타낸다[16][17]. 이러한 T-S 퍼지 모델의 도입은  $L_2$ -노음 관점에서 오차 수렴성을 보장하는 반복학습 제어기의 설계 문제를 선형 행렬부등식 문제로 간략화 시킬 수 있다. 이와 같이 이차원 오차에 대한 동력학을 T-S 퍼지모델로 표현하고  $L_2$ -노음 관점에서 해석하는 것은 반복학습 시스템의 비선형성 해석을 간단하고 명료하게 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 지금까지의 이차원 시스템에 대한 연구결과를 간단히 살펴본다. 3장에서는 T-S 퍼지모델을 기반으로 반복학습 제어기를 제안하고  $L_2$ -노음 관점에서의 이차원 오차 수렴성 문제를 설정한다. 4장에서는 제안한 퍼지 반복학습제어기가 설정된 이차원 오차 수렴성을 보장할 조건을 제시한다. 또한 자세한 설명을 위한 예제를 5장에서 다루며 마지막으로 6장에서 결론을 맺는다.

**II. 이차원 시스템 이론**

이 장에서는 안정성 이론을 중심으로 간단히 이차원 시스템을 살펴보고 선형 시스템의 반복학습제어와 관련된 내용을 정리한다. Roesser[10]는 다음 형태의 선형 이차원 시스템을 제안하였다.

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (1)$$

여기서  $i$ 와  $j$ 는 음이 아닌 정수이며 수평과 수직좌표를 나타낸다.  $x^h(i, j)$ 는 수평좌표 방향으로 동적 변화를 가지는 수평 상태변수이며 같은 의미에서  $x^v(i, j)$ 는 수직 상태변수이다. 그리고  $u(i, j)$ 는 입력을 의미하며  $A_1, A_2, A_3, A_4$  그리고  $B_1, B_2$ 는 적당한 차원을 가지는 행렬이다. 또한 초기조건은 다음과 같이 주어진다.

$$x^h(0, j), x^v(i, 0), \quad i, j=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

정의 1[18]: 이차원 점근 안정

유한한 초기조건에 대하여 영입력 응답의 노음이 다음을 만족할 때 (1)의 이차원 시스템은 점근 안정하다.

$$\|x_i\| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty \quad (3)$$

여기서  $\|x_i\|$ 는 이차원 시스템의 상태 벡터에 대한 노음으로 다음과 같다.

$$\|x_i\| = \sup_{r=0,1,\dots,i} \|x(i-r, r)\|$$

정리 1[19]: 점근 안정을 위한 필요충분 조건

(1)의 이차원 시스템이 양 단위원  $T^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1|$

$= |z_2| = 1\}$ 에서 두번째 종류의 진성 특이점(nonessential singularity of the second kind)을 갖지 않고 (1)의 이차원 특성 방정식

$$\begin{vmatrix} z_1 I - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 \end{vmatrix} \quad (4)$$

이 중원판  $U^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$  이외에서 영이 아니면 필요충분 조건으로 점근 안정하다.

이상의 결과를 바탕으로 다음의 반복학습 제어문제를 다룬다. 시간  $t=0, 1, \dots, T$ 과 반복횟수  $k=0, 1, \dots$ 에 대하여 선형 시스템의 원하는 상태궤적과 제어입력을 각각  $x_d(t, k)$ 와  $u_d(t, k)$ 라 하자. 역모델을 이용한 반복학습 제어기를 사용한다고 가정하면 이차원 시스템 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t+1, k) &= Ax(t, k) + Bu(t, k) \\ u(t, k+1) &= u(t, k) + \hat{B}^+(e(t+1, k) - \hat{A}e(t, k)) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} e(t+1, k) &= x_d(t+1, k) - x(t+1, k), \\ e(t, k) &= x_d(t, k) - x(t, k) \end{aligned}$$

이다.  $\hat{B}$ 은 행렬  $B$ 의 추정치를 나타내며  $\hat{B}^+$ 은 행렬  $\hat{B}$ 의 일 반화된 역행렬을 의미한다. 제어입력 오차를  $\delta u(t, k) = u_d(t, k) - u(t, k)$ 라 두면 (5)의 이차원 오차 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} e(t+1, k) \\ \delta u(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -\hat{B}^+(A - \hat{A}) & I - \hat{B}^+B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t, k) \\ \delta u(t, k) \end{bmatrix} \quad (6)$$

이차원 오차의 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} e(0, k) \\ \delta u(t, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_d(t, k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

다음 정리를 통해 반복학습제어의 오차 수렴조건을 제시한다.

정리 2[11]: (7)의 초기조건을 가지는 (6)의 이차원 오차 시스템이 정리 1을 만족한다면 전 시간 구간에 대하여 상태 궤적 오차가 0으로 수렴한다. 즉,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(t, k) = 0, \quad \forall t. \quad (8)$$

**III. Takagi-Sugeno 퍼지모델 기반의 반복학습제어 시스템**

2장에서 살펴본 바와 같이 반복학습 시스템은 이산시간  $t$ 와 반복횟수  $k$ 를 독립변수로 하는 이차원 시스템으로 해석될 수 있다. 그러나 비선형 시스템에 대한 반복학습과정은 (6)과 같은 형태의 선형 이차원 오차방정식으로 표현될 수 없으며 수렴성 증명을 위해 정리 2를 이용할 수 없다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서는 이차원 변수를 가진

T-S 퍼지모델을 기반으로 비선형 이산 시스템에 대한 반복 학습 제어를 설계한다. 반복학습 과정을 비선형 이차원 오차방정식으로 정리하고  $L_2$ -노름 관점에서 오차의 수렴성을 해석한다. 여기서 초기오차와 외란의 영향이 함께 고려된다.

먼저 T-S 퍼지모델로 표현가능한 대상시스템에 대하여 퍼지모델의  $i$ 번째 규칙은 다음과 같다[16][17].

$$\begin{aligned} & \text{if } x_1(t, k) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t, k) \text{ is } M_{in} \\ & \text{then } x(t+1, k) = A_i x(t, k) + B_i u(t, k) + w(t, k) \quad (9) \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

여기서  $x(t, k) = [x_1(t, k), \dots, x_n(t, k)]^T$ 는 상태변수를,  $u(t, k) = [u_1(t, k), \dots, u_m(t, k)]^T$ 는 제어입력을, 그리고  $w(t, k) = [w_1(t, k), \dots, w_n(t, k)]^T$ 는 크기가 한정된 외란을 의미한다.  $M_{in}$ 는 퍼지집합을 나타내고  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 이며  $r$ 은 퍼지규칙의 개수이다. 위의 퍼지모델 출력은

$$x(t+1, k) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(x(t, k))(A_i x(t, k) + B_i u(t, k) + w(t, k))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(x(t, k))} \quad (10)$$

이다. 여기서

$$\omega_i(x(t, k)) = \prod_{q=1}^n M_{iq}(x_q(t, k))$$

이며

$$\omega_i(x(t, k)) \geq 0, \sum_{i=1}^r \omega_i(x(t, k)) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

을 가정한다. (10)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$x(t+1, k) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t, k))(A_i x(t, k) + B_i u(t, k) + w(t, k)) \quad (11)$$

여기서

$$h_i(x(t, k)) = \frac{\omega_i(x(t, k))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(x(t, k))}$$

이며 다음을 만족한다.

$$h_i(x(t, k)) \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i(x(t, k)) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (12)$$

원하는 상태궤적  $x_d(t, k)$ 와 제어입력  $u_d(t, k)$ 는 (9)로부터 다음을 만족한다.

$$x_d(t+1, k) = \sum_{i=1}^r h_i(x_d(t, k))(A_i x_d(t, k) + B_i u_d(t, k)) \quad (13)$$

(9)의 대상시스템에 대하여 다음과 같은 제어규칙을 가진 퍼지 반복학습 제어가 사용된다고 하자.

*Control Rule 1 :*

$$\begin{aligned} & \text{if } x_1(t, k) \text{ is } M_{11} \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t, k) \text{ is } M_{1n} \\ & \text{then } u(t, k+1) = u(t, k) \\ & \quad + \hat{B}^{-1} \{ (x_d(t+1, k) - x(t+1, k)) - \hat{A}_1 (x_d(t, k) - x(t, k)) \}, \quad (14) \\ & \qquad \qquad \qquad l = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

퍼지 반복학습 제어기의 출력은 다음과 같다.

$$u(t, k+1) = u(t, k) + \sum_{l=1}^r h_l(x(t, k)) \hat{B}_l^{-1} \{ (x_d(t+1, k) - x(t+1, k)) - \hat{A}_l (x_d(t, k) - x(t, k)) \} \quad (15)$$

반복학습 시스템의 오차 수렴성을 해석하기 위해 이차원 오차변수로서 상태궤적 오차와 제어입력 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} e(t, k) &= x_d(t, k) - x(t, k), \\ \delta u(t, k) &= u_d(t, k) - u(t, k) \end{aligned} \quad (16)$$

이제 다음과 같이  $e(t, k)$ 와  $\delta u(t, k)$ 에 관련된 이차원 추종 성능을 고려하자.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \begin{bmatrix} e(t, k) \\ \delta u(t, k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t, k) \\ \delta u(t, k) \end{bmatrix} \leq \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) \\ & + \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) + \rho^2 \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \begin{bmatrix} x_d(t, k) \\ u_d(t, k) \\ w(t, k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_d(t, k) \\ u_d(t, k) \\ w(t, k) \end{bmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

여기서  $[x_d(t, k), u_d(t, k), w(t, k)]^T$ 는 외부신호로서 원하는 상태궤적  $x_d(t, k)$ 과 원하는 제어입력  $u_d(t, k)$ , 그리고 외란  $w(t, k)$ 을 포함한다.  $e(0, k)$ 는 매 반복에서의 초기 상태오차를,  $\delta u(t, 0)$ 는 첫 번째 반복에서의 입력오차를 의미한다.  $Q_1, Q_2, P_1$ , 그리고  $P_2$ 는 양의 정부호 행렬이며  $\rho^2$ 는 감쇠비를 나타낸다. (17)의 의미는 유도된  $L_2$ -노름 관점(in the sense of the  $L_2$ -induced norm)에서 이차원 오차를 해석하는 것이다. 즉, 이차원 오차에 대한 외부신호의 영향이 설정된  $\rho^2$ 보다 작게 유지할 수 있음을 보이는 것이다. 또한 이산시간과 반복횟수에 대한 초기오차의 영향도 함께 고려한 것이다.

본 연구의 목적은 (17)과 같은 이차원 추종성능을 보장할 수 있는 퍼지 반복학습 제어를 설계하는 것이다. (11), (13), (15), 그리고 (16)을 이용하여 이차원 오차방정식을 유도함으로써 이차원 추종성능을 검증한다. 먼저 상태궤적 오차에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e(t+1, k) &= x_d(t+1, k) - x(t+1, k) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t, k))(x_d(t+1, k) - A_i x(t, k) - B_i u(t, k) - w(t, k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) (A_j x_d(t,k) + B_j u_d(t,k) \\
 &\quad - A_i x(t,k) - B_i u(t,k) - w(t,k)) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) (A_j x_d(t,k) - A_i x(t,k) \\
 &\quad + A_j x_d(t,k) - A_i x_d(t,k) + B_j u_d(t,k) - B_i u(t,k) \\
 &\quad + B_j u_d(t,k) - B_i u_d(t,k) - w(t,k)) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) \{A_i e(t,k) + (A_j - A_i) x_d(t,k) \\
 &\quad + B_j \delta u(t,k) + (B_j - B_i) u_d(t,k) - w(t,k)\}
 \end{aligned} \tag{18}$$

또한 제어입력 오차는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 \delta u(t, k+1) &= u_d(t, k+1) - u(t, k+1) \\
 &= u_d(t, k) - u(t, k) - \sum_{i=1}^r h_i(x(t,k)) \hat{B}_i^+ (e(t+1, k) - \hat{A}_i e(t, k)) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) h_l(x(t,k)) \{ \delta u(t, k) \\
 &\quad - \hat{B}_i^+ (A_i e(t, k) + (A_j - A_i) x_d(t, k) + B_j \delta u(t, k) + (B_j - B_i) u_d(t, k) \\
 &\quad - w(t, k)) + \hat{B}_i^+ \hat{A}_i e(t, k) \} \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) h_l(x(t,k)) \left\{ (I - \hat{B}_i^+ B_i) \delta u(t, k) \right. \\
 &\quad \left. - \hat{B}_i^+ (A_i - \hat{A}_i) e(t, k) - \hat{B}_i^+ (A_j - A_i) x_d(t, k) \right. \\
 &\quad \left. - \hat{B}_i^+ (B_j - B_i) u_d(t, k) + \hat{B}_i^+ w(t, k) \right\}
 \end{aligned} \tag{19}$$

(18)과 (19)를 정리하면 이차원 오차방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} e(t+1, k) \\ \delta u(t, k+1) \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) h_l(x(t,k)) \\
 &\quad \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ -\hat{B}_i^+ (A_i - \hat{A}_i) & I - \hat{B}_i^+ B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t, k) \\ \delta u(t, k) \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{bmatrix} A_j - A_i & B_j - B_i & -I \\ -\hat{B}_i^+ (A_j - A_i) & -\hat{B}_i^+ (B_j - B_i) & \hat{B}_i^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t, k) \\ u_d(t, k) \\ w(t, k) \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned} \tag{20}$$

(20)을 간략화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_{11}(t, k) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) h_l(x(t,k)) \\
 &\quad (\bar{A}_{il} \bar{X}(t, k) + \bar{B}_{ijl} \bar{W}(t, k))
 \end{aligned} \tag{21}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \bar{X}(t, k) &= \begin{bmatrix} e(t, k) \\ \delta u(t, k) \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_{11}(t, k) = \begin{bmatrix} e(t+1, k) \\ \delta u(t, k+1) \end{bmatrix}, \\
 \bar{W}(t, k) &= \begin{bmatrix} x_d(t, k) \\ u_d(t, k) \\ w(t, k) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{il} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ -\hat{B}_i^+ (A_i - \hat{A}_i) & I - \hat{B}_i^+ B_i \end{bmatrix}, \\
 \bar{B}_{ijl} &= \begin{bmatrix} A_j - A_i & B_j - B_i & -I \\ -\hat{B}_i^+ (A_j - A_i) & -\hat{B}_i^+ (B_j - B_i) & \hat{B}_i^+ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(21)은 (12)의 성질을 이용하여 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_{11}(t, k) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) h_l(x(t,k)) \\
 &\quad (\bar{A}_{il} \bar{X}(t, k) + \bar{B}_{ijl} \bar{W}(t, k)) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) h_l(x(t,k)) \\
 &\quad \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \bar{X}(t, k) + \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \bar{W}(t, k) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) h_l(x(t,k)) \\
 &\quad (\bar{A}_{il} \bar{X}(t, k) + \bar{B}_{ijl} \bar{W}(t, k)) \\
 &\quad + 2 \sum_{i < j}^r h_i(x(t,k)) h_j(x_d(t,k)) h_l(x(t,k)) \\
 &\quad \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \bar{X}(t, k) + \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \bar{W}(t, k) \right)
 \end{aligned} \tag{22}$$

또한 (21)로부터 (17)의 이차원 추종성능은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) &\leq \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) \\
 + \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) + \rho^2 &\sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \bar{W}^T(t, k) \bar{W}(t, k)
 \end{aligned} \tag{23}$$

여기서

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} > 0, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} > 0.$$

#### IV. 퍼지 반복학습 제어기의 설계

이 장에서는 (14)로 구성된 퍼지 반복학습 제어기가 (23)의 이차원 추종성능을 만족하기 위한 충분조건을 제시하고 설계과정을 정리한다. 3장에서는 T-S 퍼지모델로 표현가능한 비선형 시스템 (9)와 퍼지 반복학습 제어기 (14)로부터 이차원 오차방정식 (21)을 유도하였다. 따라서 퍼지 반복학습 제어기의 설계변수 행렬  $\hat{A}_i$ 과  $\hat{B}_i$ 은 이차원 오차방정식의 행렬  $\bar{A}_{il}$ 와  $\bar{B}_{ijl}$ 에 포함되어 있으며 이차원 추종성능을 보장하는 퍼지 반복학습 제어기를 설계하는 것은 (21)의 이차원 오차방정식이 (23)의 부등식을 만족할 조건을 찾는 것이다. 더불어 감쇠비  $\rho^2$ 를 최소화함으로써 이차원 추종성능을 향상시킬 수 있다. 다음 정리를 통해 그 결과를 나타낸다.

정리 3 : (21)의 이차원 오차방정식에 대하여 다음 두 개의 선형행렬 부등식을 만족하는 공통된  $Q = Q^T > 0$ 와  $P = P^T > 0$ 가 존재한다면 (14)의 퍼지 반복학습 제어기는 설정된  $\rho^2$ 에 대하여 (23)의 이차원 추종성능을 만족한다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \bar{A}_{il}^T P \bar{A}_{il} + Q - P & \bar{A}_{il}^T P \bar{B}_{ijl} \\ \bar{B}_{ijl}^T P \bar{A}_{il} & \bar{B}_{ijl}^T P \bar{B}_{ijl} - \rho^2 I \end{bmatrix} < 0 \\
 i = l = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, r
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \right)^T P \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \right) + Q - P \quad \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \right)^T P \left( \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \right) \\ \left( \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \right)^T P \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \right) \quad \left( \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \right)^T P \left( \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \right) - \rho^2 I \end{array} \right] < 0$$

,  $i < l \leq r, j = 1, \dots, r$

증명 : 먼저 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \left( \bar{X}_{11}^T(t, k) P \bar{X}_{11}(t, k) - \bar{X}^T(t, k) P \bar{X}(t, k) \right) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^K \left( \bar{X}_{11}^T(0, k) P \bar{X}_{11}(0, k) - \bar{X}^T(0, k) P \bar{X}(0, k) \right. \\ &\quad + \bar{X}_{11}^T(1, k) P \bar{X}_{11}(1, k) - \bar{X}^T(1, k) P \bar{X}(1, k) \\ &\quad \left. + \dots + \bar{X}_{11}^T(T, k) P \bar{X}_{11}(T, k) - \bar{X}^T(T, k) P \bar{X}(T, k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^K \left( \begin{bmatrix} e(1, k) \\ \delta u(0, k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(1, k) \\ \delta u(0, k+1) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad - \begin{bmatrix} e(0, k) \\ \delta u(0, k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(0, k) \\ \delta u(0, k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} e(2, k) \\ \delta u(1, k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(2, k) \\ \delta u(1, k+1) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} e(1, k) \\ \delta u(1, k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(1, k) \\ \delta u(1, k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \dots \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} e(T+1, k) \\ \delta u(T, k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(T+1, k) \\ \delta u(T, k+1) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} e(T, k) \\ \delta u(T, k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(T, k) \\ \delta u(T, k) \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{k=0}^K \left( -e^T(0, k) P_1 e(0, k) + e^T(T+1, k) P_1 e(T+1, k) \right. \\ &\quad + \delta u^T(0, k+1) P_2 \delta u(0, k+1) - \delta u^T(0, k) P_2 \delta u(0, k) \\ &\quad + \delta u^T(1, k+1) P_2 \delta u(1, k+1) - \delta u^T(1, k) P_2 \delta u(1, k) \\ &\quad \left. + \dots + \delta u^T(T, k+1) P_2 \delta u(T, k+1) - \delta u^T(T, k) P_2 \delta u(T, k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^K \left( -e^T(0, k) P_1 e(0, k) + e^T(T+1, k) P_1 e(T+1, k) \right. \\ &\quad + (du^T(0, 1) P_2 \delta u(0, 1) - \delta u^T(0, 0) P_2 \delta u(0, 0)) \\ &\quad + (du^T(0, 2) P_2 \delta u(0, 2) - \delta u^T(0, 1) P_2 \delta u(0, 1)) \\ &\quad + \dots + (du^T(0, K+1) P_2 \delta u(0, K+1) \\ &\quad - \delta u^T(0, K) P_2 \delta u(0, K)) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (\delta u^T(T, 1) P_2 \delta u(T, 1) - \delta u^T(T, 0) P_2 \delta u(T, 0)) \\ &\quad + \delta u^T(T, 2) P_2 \delta u(T, 2) - \delta u^T(T, 1) P_2 \delta u(T, 1) \\ &\quad + \dots + \delta u^T(T, K+1) P_2 \delta u(T, K+1) \\ &\quad \left. - \delta u^T(T, K) P_2 \delta u(T, K) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^K \left( -e^T(0, k) P_1 e(0, k) + e^T(T+1, k) P_1 e(T+1, k) \right) \\ &\quad + \sum_{t=0}^T \left( -\delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) + \delta u^T(t, K+1) P_2 \delta u(t, K+1) \right) \end{aligned}$$

이제 (22), (23), 그리고 (25)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) + \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) \\ &\quad - \sum_{k=0}^K e^T(T+1, k) P_1 e(T+1, k) - \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, K+1) P_2 \delta u(t, K+1) \\ &\quad + \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \left( \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) + \bar{X}_{11}^T(t, k) P \bar{X}_{11}(t, k) \right. \\ &\quad \left. - \bar{X}^T(t, k) P \bar{X}(t, k) \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) + \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) + \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \\ &\quad \left( \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) + \bar{X}_{11}^T(t, k) P \bar{X}_{11}(t, k) - \bar{X}^T(t, k) P \bar{X}(t, k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) + \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) + \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \\ &\quad \left\{ \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) + \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. h_i(x(t, k)) (\bar{A}_{il} \bar{X}(t, k) + \bar{B}_{ijl} \bar{W}(t, k)) \right)^T P \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. h_j(x(t, k)) (\bar{A}_{il} \bar{X}(t, k) + \bar{B}_{ijl} \bar{W}(t, k)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \bar{X}^T(t, k) P \bar{X}(t, k) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) + \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) + \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \\ &\quad \left\{ \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) + \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. h_j(x(t, k)) \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \bar{X}(t, k) + \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \bar{W}(t, k) \right) \right)^T P \right. \\ &\quad \left. \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) h_i(x(t, k)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \bar{X}(t, k) + \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \bar{W}(t, k) \right) \right) - \bar{X}^T(t, k) P \bar{X}(t, k) \right\} \\ &\leq \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) + \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) \\ &\quad + \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) h_i(x(t, k)) \\ &\quad \left\{ \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) + \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \bar{X}(t, k) + \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \bar{W}(t, k) \right)^T \right. \\ &\quad \left. P \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \bar{X}(t, k) + \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \bar{W}(t, k) \right) - \bar{X}^T(t, k) P \bar{X}(t, k) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) + \sum_{t=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) \\ &\quad + \sum_{k=0}^K \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) h_i(x(t, k)) \\ &\quad \left\{ \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) + \bar{X}^T(t, k) \bar{A}_{il}^T P \bar{A}_{il} \bar{X}(t, k) \right. \\ &\quad - \bar{X}^T(t, k) P \bar{X}(t, k) + \bar{X}^T(t, k) \bar{A}_{il}^T P \bar{B}_{ijl} \bar{W}(t, k) \\ &\quad + \bar{W}^T(t, k) \bar{B}_{ijl}^T P \bar{A}_{il} \bar{X}(t, k) + \bar{W}^T(t, k) \bar{B}_{ijl}^T P \bar{B}_{ijl} \bar{W}(t, k) \\ &\quad \left. - \rho^2 \bar{W}^T(t, k) \bar{W}(t, k) + \rho^2 \bar{W}^T(t, k) \bar{W}(t, k) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^T \sum_{i < l} \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) h_l(x(t, k)) \\
 &\left\{ \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) + \bar{X}^T(t, k) \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \right)^T P \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \right) \bar{X}(t, k) \right. \\
 &- \bar{X}^T(t, k) P \bar{X}(t, k) + \bar{X}^T(t, k) \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \right)^T P \left( \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \right) \bar{W}(t, k) \\
 &+ \bar{W}^T(t, k) \left( \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \right)^T P \left( \frac{\bar{A}_{il} + \bar{A}_{li}}{2} \right) \bar{X}(t, k) \\
 &+ \bar{W}^T(t, k) \left( \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \right)^T P \left( \frac{\bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli}}{2} \right) \bar{W}(t, k) \\
 &\left. - \rho^2 \bar{W}^T(t, k) \bar{W}(t, k) + \rho^2 \bar{W}^T(t, k) \bar{W}(t, k) \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) + \sum_{i=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) \\
 &+ \sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^T \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) h_l(x(t, k)) \\
 &\begin{bmatrix} \bar{X}(t, k) \\ \bar{W}(t, k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{il} P \bar{A}_{il} + Q - P & \bar{A}_{il} P \bar{B}_{ijl} \\ \bar{B}_{ijl}^T P \bar{A}_{il} & \bar{B}_{ijl}^T P \bar{B}_{ijl} - \rho^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}(t, k) \\ \bar{W}(t, k) \end{bmatrix} \\
 &+ 2 \sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^T \sum_{i < l} \sum_{j=1}^r h_i(x(t, k)) h_j(x_d(t, k)) h_l(x(t, k)) \begin{bmatrix} \bar{X}(t, k) \\ \bar{W}(t, k) \end{bmatrix}^T \\
 &\left[ \begin{pmatrix} \bar{A}_{il} + \bar{A}_{li} \\ 2 \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \bar{A}_{il} + \bar{A}_{li} \\ 2 \end{pmatrix} + Q - P \quad \begin{pmatrix} \bar{A}_{il} + \bar{A}_{li} \\ 2 \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli} \\ 2 \end{pmatrix} \right. \\
 &\left. \begin{pmatrix} \bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli} \\ 2 \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \bar{A}_{il} + \bar{A}_{li} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli} \\ 2 \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \bar{B}_{ijl} + \bar{B}_{jli} \\ 2 \end{pmatrix} - \rho^2 I \right] \\
 &\begin{bmatrix} \bar{X}(t, k) \\ \bar{W}(t, k) \end{bmatrix} + \rho^2 \sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^T \bar{W}^T(t, k) \bar{W}(t, k)
 \end{aligned}$$

(24)의 조건을 이용하면 설정된  $\rho^2$ 에 대하여 다음과 같은 이차원 추종성능을 획득할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^T \bar{X}^T(t, k) Q \bar{X}(t, k) \leq \sum_{k=0}^K e^T(0, k) P_1 e(0, k) \\
 &+ \sum_{i=0}^T \delta u^T(t, 0) P_2 \delta u(t, 0) + \rho^2 \sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^T \bar{W}^T(t, k) \bar{W}(t, k) \quad (27)
 \end{aligned}$$

이상의 해석을 바탕으로 제안한 반복학습 제어기의 설계 과정을 정리하면 다음과 같다.

단계 1 : T-S 퍼지모델로 표현가능한 비선형 대상 시스템에 대하여 퍼지모델 (9)를 구한다.

단계 2 : 퍼지 반복학습 제어기 (14)를 구성한다. 여기서 후건부 선형행렬  $\hat{A}_i$ 과  $\hat{B}_i$ 을 선택한다.

단계 3 : (9)와 (14)로부터 이차원 오차방정식 (21)의  $\bar{A}_{il}$ 와  $\bar{B}_{ijl}$ 을 구하고 감쇠비  $\rho^2$ 를 설정한다.

단계 4 : (24)의 선형행렬 부등식을 만족하는 해  $Q = Q^T > 0$ 와  $P = P^T > 0$ 가 존재함을 검사한다.

단계 5 : 선형행렬 부등식을 만족하는 해가 존재한다면 단계 2-4를 반복함으로써 감쇠비  $\rho^2$ 를 최소화한다.

선형행렬 부등식을 만족하는 해가 존재하지 않으면 단계

2-4를 반복하여  $\hat{A}_i$ 과  $\hat{B}_i$  그리고  $\rho^2$ 를 재설정한다.

단계 6 : 반복학습 제어기를 구축한다.

**V. 예제**

이상의 결과를 예제를 보임으로써 설명한다. 다음의 비선형 이산 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1(t) + T_s x_2(t) \\ -T_s x_1(t) - 0.1T_s x_1^3(t) + (1 - T_s)x_2(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ T_s + 0.13T_s x_2^3(t) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (28)
 \end{aligned}$$

여기서,  $T_s = 0.01$ . 이때 외란은 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1T_s \sin(t/20) \\ 0.1T_s \cos(t/20) \end{bmatrix}$$

위의 비선형 이산 시스템은 이차원 T-S 퍼지모델로 표현 가능하며 다음과 같다[16].

$$\begin{aligned}
 R_1 : & \text{if } x_1(t, k) \text{ is } F_1^1 \text{ and } x_2(t, k) \text{ is } F_2^1 \\
 & \text{then } x(t+1, k) = A_1 x(t, k) + B_1 u(t, k) + w(t, k) \\
 R_2 : & \text{if } x_1(t, k) \text{ is } F_1^1 \text{ and } x_2(t, k) \text{ is } F_2^2 \\
 & \text{then } x(t+1, k) = A_2 x(t, k) + B_2 u(t, k) + w(t, k) \\
 R_3 : & \text{if } x_1(t, k) \text{ is } F_1^2 \text{ and } x_2(t, k) \text{ is } F_2^1 \\
 & \text{then } x(t+1, k) = A_3 x(t, k) + B_3 u(t, k) + w(t, k) \\
 R_4 : & \text{if } x_1(t, k) \text{ is } F_1^2 \text{ and } x_2(t, k) \text{ is } F_2^2 \\
 & \text{then } x(t+1, k) = A_4 x(t, k) + B_4 u(t, k) + w(t, k)
 \end{aligned} \quad (29)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 F_1^1(x_1(t, k)) &= 1 - \frac{x_1^2(t, k)}{2.25}, \quad F_1^2(x_1(t, k)) = \frac{x_1^2(t, k)}{2.25}, \\
 F_2^1(x_2(t, k)) &= 0.5 + \frac{x_2^3(t, k)}{6.75}, \quad F_2^2(x_2(t, k)) = 0.5 - \frac{x_2^3(t, k)}{6.75}, \\
 x_1(t, k) &\in [-1.5 \ 1.5], \quad x_2(t, k) \in [-1.5 \ 1.5], \\
 A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -T_s & 1 - T_s \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.43875T_s \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -T_s & 1 - T_s \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.56125T_s \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -1.225T_s & 1 - T_s \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.43875T_s \end{bmatrix}, \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -1.225T_s & 1 - T_s \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.56125T_s \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

이산시간  $t \in [0 \ 500]$ 와 반복횟수  $k$ 에 대하여 원하는 상태 제적을 설정한다.

$$\begin{aligned}
 x_{1d}(t, k) &= -0.75 \cos(t/100) + 0.75 \\
 x_{2d}(t, k) &= 0.75 \sin(t/100) \quad (30)
 \end{aligned}$$

또한 다음의 퍼지 반복학습 제어기가 사용됨을 가정하자.

$$\begin{aligned}
 R_1: & \text{ if } x_1(t, k) \text{ is } F_1^1 \text{ and } x_2(t, k) \text{ is } F_2^1 \\
 & \text{ then } u(t, k+1) = u(t, k) + \hat{B}_1^+ (e(t+1, k) - \hat{A}_1 e(t, k)) \\
 R_2: & \text{ if } x_1(t, k) \text{ is } F_1^1 \text{ and } x_2(t, k) \text{ is } F_2^2 \\
 & \text{ then } u(t, k+1) = u(t, k) + \hat{B}_2^+ (e(t+1, k) - \hat{A}_2 e(t, k)) \\
 R_3: & \text{ if } x_1(t, k) \text{ is } F_1^2 \text{ and } x_2(t, k) \text{ is } F_2^1 \\
 & \text{ then } u(t, k+1) = u(t, k) + \hat{B}_3^+ (e(t+1, k) - \hat{A}_3 e(t, k)) \\
 R_4: & \text{ if } x_1(t, k) \text{ is } F_1^2 \text{ and } x_2(t, k) \text{ is } F_2^2 \\
 & \text{ then } u(t, k+1) = u(t, k) + \hat{B}_4^+ (e(t+1, k) - \hat{A}_4 e(t, k))
 \end{aligned} \tag{31}$$

위의 반복학습 제어기를 이차원 추종성능을 만족하도록 설계한다는 것은 (31)의 제어규칙에서 설계된  $\hat{A}_i$ 과  $\hat{B}_i$ 과 설정된 감쇠비  $\rho^2$ 에 대하여 (24)의 선형행렬부등식의 해가 존재함을 보이는 것이다. 위의 예제에 대하여 먼저 감쇠비를  $\rho^2 = 0.0001$ 로 설정하고 (31)의 제어규칙에서  $\hat{A}_i$ 과  $\hat{B}_i$ 을 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -0.9T_s & 1-0.9T_s \end{bmatrix}, \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2T_s \end{bmatrix}, \\
 \hat{A}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -0.9T_s & 1-0.9T_s \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8T_s \end{bmatrix}, \\
 \hat{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -1.3475T_s & 1-1.17T_s \end{bmatrix}, \hat{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2T_s \end{bmatrix}, \\
 \hat{A}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -1.3475T_s & 1-1.17T_s \end{bmatrix}, \hat{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8T_s \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{32}$$

(32)로부터 이차원 오차방정식 (21)의  $\bar{A}_{ij}$ 와  $\bar{B}_{ij}$ 을 구한다. 다음으로 (24)의 선형행렬부등식의 해  $Q = Q^T > 0$ 와  $P = P^T > 0$ 가 존재함을 확인한다.

$$\begin{aligned}
 Q &= 1.0e-010 \times \begin{bmatrix} 0.59263018 & 0.01997647 & 0 \\ 0.01997647 & 0.61516686 & 0 \\ 0 & 0 & 0.88142086 \end{bmatrix}, \\
 P &= 1.0e-006 \times \begin{bmatrix} 0.15200711 & 0.04294118 & 0 \\ 0.04294118 & 0.13721272 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00397877 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{33}$$

이상의 설계방법의 타당성을 보이기 위해 (28)의 비선형 이산 시스템을 대상으로 모의 실험 결과를 도시한다. 상태백

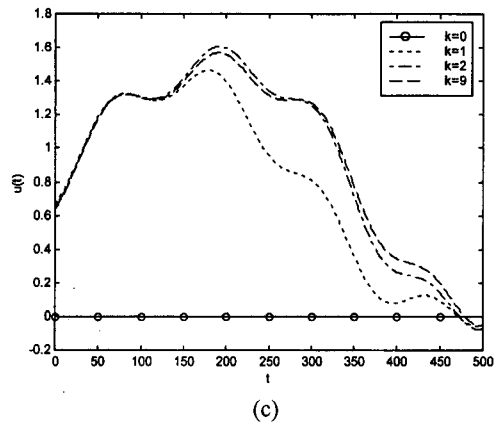
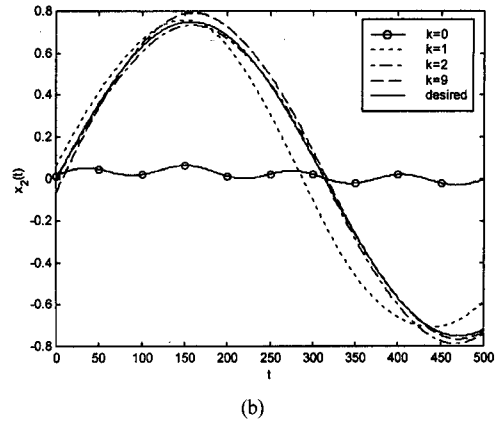
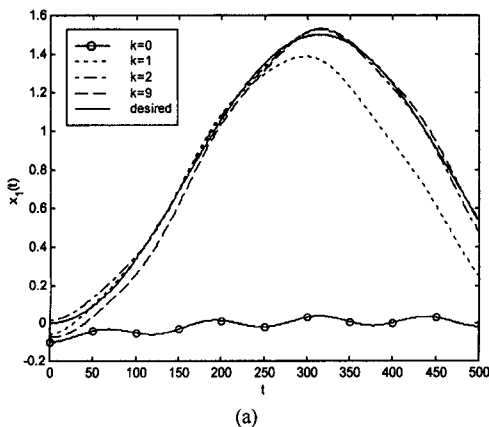


그림 1. 상태궤적과 제어입력궤적 (a)  $x_1(t)$  (b)  $x_2(t)$  (c)  $u(t)$ .  
Fig. 1. State trajectories and control input trajectories. (a)  $x_1(t)$  (b)  $x_2(t)$  (c)  $u(t)$ .

터의 초기조건  $x(0, k) = [x_1(0, k) \ x_2(0, k)]^T$ 은 매 반복횟수에서 구간  $[-0.1 \ 0.1]$ 의 임의의 값을 가진다. 또한 제어입력은  $u(t, 0) = 0, t \in [0 \ 500]$ 의 초기조건을 가정한다. 그림 1에서 이산시간  $t \in [0 \ 500]$ 와 반복횟수  $k \in [0 \ 9]$ 에 대한 반복학습 결과를 도시한다. 상태궤적과 제어입력궤적이 이차원 추종성능을 만족함을 확인할 수 있다.

### VI. 결론

대상 시스템의 비선형성이 T-S 퍼지모델로 표현될 수 있으며 반복학습제어 시스템이 이차원 시스템으로 간주될 수 있다는 사실로부터 새로운 반복학습 알고리즘을 제안하였다. 제안된 반복학습제어 시스템에 대해 이차원 오차 방정식을 유도함으로써 반복학습제어 문제를 상태변수와 제어입력의 이차원 추종제어 문제로 변환할 수 있었다. 이로써 이차원 오차에 대한 외란과 초기오차의 영향이 유도된  $L_2$ -노름 관점에서 해석될 수 있었다. T-S 퍼지모델에 기반한 반복학습 알고리즘은 이차원 추종성능을 보장하는 반복학습 제어기의 설계문제를 선형 행렬 부등식 문제로 간략화 시켰다. 따라서 비선형 시스템을 대상으로 한 기존 연구들에 비하여 제안된 설계방법은 반복학습 제어기의 체계적인 설계과정을 제공한다. 예제를 통하여 설계방법을 설명하였으며 제안된 반복학습 제어기의 이차원 추종성능을 확인할 수 있었다.

## 참고문헌

- [1] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering operation of robots by learning," *Journal of Robotic Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 123-140, 1984.
- [2] G. Heinzinger, D. Fenwick, B. Paden, and F. Miyazaki, "Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 1, pp. 110-114, 1992.
- [3] H. S. Ahn, C. H. Choi, and K. B. Kim, "Iterative learning control for a class of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 29, no. 6, pp. 1575-1578, 1993.
- [4] H. S. Lee and Z. Bien, "A note on convergence property of iterative learning controller with respect to sup norm," *Automatica*, vol. 33, no. 8, pp. 1591-1593, 1997.
- [5] T. Y. Kuc, J. S. Lee, and K. Nam, "An iterative learning control theory for a class of nonlinear dynamics systems," *Automatica*, vol. 28, no. 6, pp. 1215-1221, 1992.
- [6] J. A. Frueh and M. Q. Phan, "Linear quadratic optimal learning control," *INT. J. Control*, vol. 73, no. 10, pp. 832-839, 2000.
- [7] M. French and E. Rogers, "Non-linear iterative learning by an adaptive lyapunov technique," *INT. J. Control*, vol. 73, no. 10, pp. 840-850, 2000.
- [8] D. H. Owens and G. Munde, "Error convergence in an adaptive iterative learning controller," *INT. J. Control*, vol. 73, no. 10, pp. 851-857, 2000.
- [9] C. Ham, Z. Qu, and J. Kaloust, "Nonlinear learning control for a class of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 37, pp. 419-428, 2001.
- [10] R. P. Roesser, "A discrete state-space model for linear image processing," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-20, no. 1, pp. 1-10, 1975.
- [11] Z. Geng, R. Carroll, and J. Xie, "Two-dimensional model and algorithm analysis for a class of iterative learning control systems," *INT. J. Control*, vol. 52, no. 4, pp. 833-862, 1990.
- [12] J. J. Lee and J. W. Lee, "Design of iterative learning controller with VCR servo system," *IEEE Trans. Consumer Electronics*, vol. 39, no. 1, pp. 13-24, 1993.
- [13] J. E. Kurek and M. B. Zaremba, "Iterative learning control synthesis based 2-D system theory," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 1, pp. 121-125, 1993.
- [14] S. S. Saab, "A discrete-time learning control algorithm for a class of linear time-invariant systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, no. 6, pp. 1138-1142, 1995.
- [15] J. E. Kurek, "Stability of nonlinear parameter-varying digital 2-D systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, no. 8, pp. 1428-1432, 1995.
- [16] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stabilizability, control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 1-13, 1996.
- [17] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 14-23, 1996.
- [18] A. R. E. Ahmed, "On the stability of two-dimensional discrete systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, no. 3, pp. 551-552, 1980.
- [19] D. Goodman, "Some stability properties of two-dimensional linear shift-invariant digital filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-24, no. 4, pp. 201-206, 1977.



## 추준욱

1974년 1월 17일생. 1998년 영남대학교 전기공학과 졸업. 2000년 경북대학교 전자공학과 석사. 2000년~현재 경북대학교 전자공학과 박사과정. 관심분야는 학습제어, 퍼지제어, 신경회로망

## 이연정

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제8권, 제2호, 참조.

## 최봉열

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제7권, 제7호, 참조.