VSI와 VSS 관리도의 경제적 효율 비교[1)]

박창순[*] · 이재헌[**] · 김영일[***]
[*]중앙대학교 응용통계학과, [**]광주대학교 산업정보공학과, [***]중앙대학교 정보시스템학과

Comparison for the Economic Performance of Control Charts with the VSI and VSS Features

Changsoon Park[*] · Jaeheon Lee[**] · Youngil Kim[***]
[*]Dept. of Applied Statistics, Chung-Ang University
[**]Dept. of Industrial Information Engineering, Kwangju University
[***]Dept. of Information System, Chung-Ang University

Keywords: VSI, VSS, VSR, Economic Design, Markov Chain

Abstract

Variable sampling interval(VSI) and variable sample size(VSS) control charts vary the sampling rate for the next sample depending on the current chart statistic. This paper develops EWMA charts with the VSI and VSS features, and investigates the effectiveness of these charts in context of an economic model. The economic properties of these charts are evaluated by using Markov chain methods. The model contains cost parameters which allow the specification of the costs associated with sampling, false alarms, and operating off target. This economic model can be used to quantify the cost saving that can be obtained by using control charts with the VSI and VSS features instead of with the fixed sampling rate(FSR) feature, and can also be used to gain insight into the way that control charts with the VSI and VSS features should be designed to achieve optimal economic performance. The economic performance of $\overline{X}$ charts with the VSI and VSS features is also considered.

1. 서 론

관리도(control chart)는 1931년 미국의 Bell 연구소의 Shewhart에 의하여 최초로 제안된 후 많은 연구와 발전을 거듭하여 공정모수의 변화를 탐지하는 통계적 공정관리

1) This work was supported by grant No. 1999-2-104-001-2 from the interdisciplinary research program of the KOSEF.

에서 중요한 도구로 사용되고 있다. 관리도를 사용하기 위해서는 표본추출간격(sampling interval), 표본크기(sample size), 그리고 관리한계(control limit) 등을 지정하여야 하는데, 이러한 모수를 선정하는 과정을 관리도의 설계(design)라고 한다. 관리도의 설계는 통계적인 특성을 고려하여 설계하는 통계적 설계(statistical design)와 생산라인에서 발생하는 비용과 손실로 표현된 비용함수를 고려하여 설계하는 경제적 설계(economic design)로 크게 구분된다.

이와 같은 관리도의 설계에서의 전통적인 방법은 고정된 표본추출간격과 표본크기를 사용하는 것이다. 이를 고정추출비(fixed sampling rate; FSR) 관리도라 한다. 그러나 최근 들어 공정에서 얻어지는 데이터를 기초하여 표본추출간격과 표본크기를 변화시키는 것에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다. 기본적인 아이디어는 공정에서 추출된 데이터를 살펴볼 때 공정변화의 징후가 있는 경우와 그렇지 않은 경우로 분리하여, 변화의 징후가 있는 경우에는 표본추출비를 증가시켜 표본추출간격을 작게 하거나 더 많은 수의 표본을 추출하여 예상되는 공정변화를 더 빠르고 정확하게 탐지하자는 것이다. 만일 징후가 없는 경우에는 상대적으로 큰 표본추출간격으로 또는 작은 수의 표본을 추출하여 공정을 관리하는 것이다.

표본추출비에서 표본추출간격을 달리하는 관리도를 변량추출간격(variable sampling interval; VSI) 관리도라 한다. 이 관리도는 공정변화의 징후가 있는 경우에는 짧은 표본추출간격을 사용하고, 그렇지 않은 경우에는 긴 표본추출간격을 사용하는 것이다. VSI $\overline{X}$ 관리도 대한 연구로는 Reynolds et al.(1988), Reynolds와 Arnold (1989), Chengalur-Smith et al.(1989), Runger와 Pignatiello(1991), Reynolds et al. (1996), 그리고 Reynolds(1996a) 등이 있다. VSI CUSUM 관리도는 Reynolds(1989, 1995, 1996b)와 Reynolds et al.(1990) 등이 연구하였으며, VSI EWMA 관리도는 Saccucci et al.(1992), Arnold et al.(1993), 그리고 Reynolds(1995, 1996a, 1996b) 등이 연구하였다.

표본추출비를 달리하는 다른 방법으로 표본크기를 변화시키는 관리도를 변량표본크기(variable sample size; VSS) 관리도라 한다. 이 관리도는 공정변화의 징후가 있는 경우에는 많은 크기의 표본을 추출하고, 그렇지 않은 경우에는 작은 크기의 표본을 추출하여 공정을 관리하는 것이다. VSS $\overline{X}$ 관리도에 대한 연구로는 Prabhu et al.(1993), Costa (1994), Park과 Reynolds(1994), 그리고 Zimmer et al.(1998) 등이 있다. Annadi et al.(1995)는 VSS CUSUM 관리도에 대하여 연구하였으며, Reynolds(1996b)는 VSS CUSUM과 EWMA 관리도의 효율을 VSI CUSUM과 EWMA 관리도와 각각 비교하였다.

이전 시점의 관리 통계량에 따라 표본추출간격과 표본의 크기를 모두 변화시키는 관리도를 변량추출비(variable sampling rate; VSR) 관리도라 한다.(이를 VSSI 또는 VSSVSI 관리도라고도 한다.) 이 관리도의 기본 개념은 VSI와 VSS 관리도의 개념을 통합한 것이다. VSR $\overline{X}$ 관리도에 대한 연구로는 Phabhu et al.(1994, 1997), Costa (1997, 1999), 그리고 Park과 Reynolds(1999) 등이 있다. VSR CUSUM 관리도는 Rendtel(1990)과 Arnold와 Reynolds(1994, 2001) 등이 연구하였으며, VSR EWMA 관

리도는 Arnold et al.(1993)과 Reynolds와 Arnold(2001) 등이 연구하였다.

이상에서 언급한 VSI, VSS, 그리고 VSR 관리도의 기존 연구를 살펴보면 관리도의 통계적 설계와 특성에 관한 것이 대부분이었다. 관리도의 통계적 설계에서는 관리상태(in-control)에서의 평균신호시간(average time to signal; ATS)을 고정시킨 후 이상상태(out-of-control)에서의 ATS를 최소화하는 것이 주된 목적이기 때문에, 관리도의 효율에 생산공정에서 발생하는 비용은 전혀 고려되지 않는다. 그러나 실제 생산공정에서 발생하는 비용에 따라 관리도의 관리모수(control parameter)들이 영향을 받는 것을 고려하는 경제적 설계 또한 매우 중요한 연구 분야라 생각한다.

본 논문은 VSI와 VSS를 사용한 관리도의 경제적 특성에 관한 것으로, EWMA 관리도와 Shewhart의 $\overline{X}$ 관리도에서 VSI와 VSS 방법을 사용한 절차의 경제적 모형을 개발하고 이에 대한 경제적 특성에 대하여 연구하였다. 본 논문에서는 2가지 표본추출간격과 표본크기를 설정하고 현재 얻어진 표본통계량으로부터 다음 시점의 표본추출간격과 표본크기를 선택하였다. 관리도의 설계에 필요한 관리모수로는 공정의 이상상태 판단 기준인 관리한계, 다음 시점의 표본추출간격 또는 표본크기를 결정하는 분계선(threshold limit), 2가지 표본추출간격 또는 표본크기, 그리고 EWMA 관리도의 통계량에 사용되는 가중치(weight) 등이 있다. 이와 같은 관리모수를 설정하기 위하여 표본추출비용, 오경보(false alarm)로 인한 비용, 그리고 공정의 이상상태동안의 품질비용 등의 비용모수(cost parameter)가 포함된 경제적 모형을 고려하였다.

2. VSI와 VSS EWMA 관리도

2.1 관리도의 절차

먼저 시점 t에서의 품질특성치 X_t는 평균이 μ_t이고, 분산이 σ^2인 정규분포를 따른다고 가정하고, 이상원인(special cause)에 의하여 공정평균 μ_t가 목표치 μ_0에서 변화하는 것을 탐지하는 공정관리를 고려하자. 이 때 H_t는 시점 $t-1$과 t간의 표본추출간격, N_t는 시점 t에서의 표본크기를 나타낸다고 하자. 전통적인 FSR EWMA 관리도에서 표본추출간격과 표본크기 (H_t, N_t)는 (h_f, n_f)로 고정되지만, VSI와 VSS 관리도에서 이들은 이전 시점인 $t-1$에서 계산된 관리 통계량에 따라 변화하게 된다.

시점 t에서의 표본평균을 $\overline{X}_t$, 이를 표준화시킨 평균을 $Z_t = \sqrt{N_t}\,(\overline{X}_t - \mu_0)/\sigma$라 할 때, Z_t를 이용한 공정관리의 목표치는 0이라 할 수 있다. 또한 통계량 D_t를 $D_t = rZ_t + (1-r)D_{t-1}$이라 하자. 여기서 r $(0 < r \le 1)$은 가중치이며, $D_0 = 0$으로 가정한다. 이 때, 표준화시킨 EWMA 관리도의 통계량을 $E_t = D_t / \sqrt{r/(2-r)}$로 정의하면, E_t는

$$E_t = \frac{r}{\sqrt{r/(2-r)}} Z_t + (1-r)E_{t-1} \quad (1)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $r=1$인 경우

EWMA 관리도는 Shewhart의 $\overline{X}$ 관리도가 됨을 쉽게 알 수 있다.(EWMA 관리도에서 표준화된 통계량 E_t를 사용하는 이유는 $\overline{X}$ 관리도의 통계량을 표준화하였으므로 서로의 비교를 위해서임.) 이 때 공정평균의 변화를 탐지하는 EWMA 관리도의 절차는 EWMA 통계량 E_t가 미리 설정된 관리한계 $\pm c$를 벗어날 경우 이상상태라는 신호를 주게되며, 시점 t에서의 H_t와 N_t 값은 이전 통계량 E_{t-1}에 의하여 결정된다.

표본추출간격을 나타내는 함수 H_t는 2가지 값을 사용하는 것이 최적의 통계적 성질을 갖는다는 사실이 여러 연구에서 알려져 있지만(Reynold와 Arnold(1989), Reynolds (1989, 1995) 등을 참조), 경제적인 측면에서는 연구된 바가 없다. 그러나 경제적인 측면에서도 유사한 특성이 예상되어 본 논문에서는 2가지 표본추출간격, 즉 h_1과 h_2를 사용하고자 한다. 이 h_1과 h_2는 공정에서 가능한 최소의 추출간격 $h_{\min}$과 최대의 추출간격 $h_{\max}$ 사이에서 결정됨을 가정한다. VSI EWMA 관리도에서 표본크기 N_t는 n_f로 고정시키지만, 표본추출간격 H_t는 이전 시점의 통계량 E_{t-1}에 따라

$$H_t = \begin{cases} h_1 & \text{만일 } |E_{t-1}| < c_I \\ h_2 & \text{만일 } c_I \le |E_{t-1}| < c \end{cases}$$

로 설정하여 사용한다. 여기서 $h_{\min} \le h_2 \le h_1 \le h_{\max}$이며, c_I는 2가지 표본추출간격을 결정짓는 영역의 분계선을 나타낸다.

표본크기를 나타내는 함수 N_t의 최적성질에 대해서는 밝혀진 것이 없지만, 간편성을 위하여 2가지 표본크기, 즉 n_1과 n_2만을 사용한다. n_1과 n_2도 공정에서 가능한 최소의 표본크기 $n_{\min}$과 최대의 표본크기 $n_{\max}$ 사이에서 결정됨을 가정한다. 이 때 $n_{\min}$은 보통 1로 설정하지만 분산의 추정을 위하여 2로 설정할 수도 있으며, 공정의 다른 제약에 의하여 최소값과 최대값이 결정될 수 있다. VSS EWMA 관리도에서 표본추출간격 H_t는 h_f로 고정시키지만, 표본크기 N_t는 이전 시점의 통계량 E_{t-1}에 따라

$$N_t = \begin{cases} n_1 & \text{만일 } |E_{t-1}| < c_S \\ n_2 & \text{만일 } c_S \le |E_{t-1}| < c \end{cases}$$

로 설정하여 사용한다. 여기서 $n_{\min} \le n_1 \le n_2 \le n_{\max}$이며, c_S는 2가지 표본크기를 결정짓는 영역의 분계선을 나타낸다.

공정탐지의 시작과 이상원인의 신호 후 처음 출발은 시작에 대한 어떤 문제나 이상원인 제거 후 잘못 조정된 점이 없는가를 알아보기 위하여, VSI 관리도에서는 짧은 추출간격 h_2를 사용하고 VSS 관리도에서는 큰 표본크기 n_2를 사용하기로 가정한다.

2.2 관리도의 경제적 모형

관리도의 경제적 설계에서 하나의 공정 주기(cycle)는 관리상태와 이어지는 이상상태를 합하여 정의할 수 있다. 이 때 관리도의 효율은 공정 주기에서 발생하는 비용모수가

포함된 단위시간당 기대비용으로 측정할 수 있다(Lorenzen과 Vance(1986)를 참조).

공정에서 공정평균은 목표치 μ_0에서 시작되며, 이상원인이 발생하여 평균이 변화할 때까지는 μ_0로 유지됨을 가정하자. 이 때 확률변수 T_0는 이상원인이 발생할 때까지의 시간, 즉 관리상태의 길이이며, T_1은 이상원인 발생 후 이를 탐지하여 신호를 줄 때까지의 시간, 즉 이상상태의 길이로 정의한다. 관리상태에서 발생할 수 있는 비용은 표본추출비용과 오경보로 인한 비용이 있으며, 이상상태에서 발생할 수 있는 비용은 표본추출비용과 이상상태 동안의 품질비용을 들 수 있다. 단위시간당 기대비용 L은 주기당 기대비용을 주기당 기대시간으로 나누어 다음과 같이 정의할 수 있다. 즉,

$$L = \frac{L_S + L_F + L_O}{E(T_0) + E(T_1)} \tag{2}$$

이 되며, 여기서 L_S는 한 주기당 표본추출 기대비용, L_F는 관리상태동안 오경보로 인한 기대비용, 그리고 L_O는 이상상태동안의 기대품질비용을 나타낸다.

식 (2)의 기대비용 L을 표현하기 위하여 공정평균에 영향을 주는 이상원인으로 여러 가지를 가정하는 다중 이상원인 모형(multiple special cause model)을 고려하자. 하나의 이상원인을 가정하는 단일 이상원인 모형은 간단하다는 장점은 있지만, 실제 생산공정에 적용하기에는 비현실적이라고 알려져 있다.

다중 이상원인 모형을 위하여 다음과 같은 가정을 하기로 한다. 우선 공정에 m개의 이상원인 $A_1, A_2, \cdots, A_m$이 발생할 수 있으며, 이상원인 $A_j\,(j=1,2,\cdots,m)$의 발생은 $\delta_j\sigma$ 만큼 공정평균을 이동시킨다고 가정한다. 또한 이상원인 A_j의 발생까지 시간은 평균이 $1/\lambda_j$인 지수분포를 따르는 확률변수이며, 이들 m개의 확률변수들은 서로 독립임을 가정한다. 이 가정으로부터 관리상태 길이인 T_0는 m개의 지수확률변수 중 최소값이 되며, 평균이

$$E(T_0) = 1/\lambda \quad (\text{여기서 } \lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j) \tag{3}$$

인 지수분포를 따름을 쉽게 알 수 있다. 또한 하나의 이상원인이 발생했다는 가정 하에 그것이 A_j일 조건부 확률은 λ_j/λ가 되며 ($j=1,2,\cdots,m$), 이상상태에서 평균적인 평균의 이동크기(average mean shift)는 $\delta = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \cdot \lambda_j/\lambda$라 할 때 $\delta\sigma$로 나타낼 수 있다.

하나의 주기 동안 추출한 표본수와 관측치 수를 각각 S와 O라 하고, 하나의 표본을 얻는 고정비용과 표본을 구성하는 관측치를 추출하는데 드는 추가적 비용을 각각 a와 b라 할 때, 한 주기당 표본추출 기대비용 L_S는

$$L_S = aE(S) + bE(O) \tag{4}$$

로 표현할 수 있다.

관리상태 하에서 오경보의 평균수를 $E(F_0)$라 할 때, 오경보로 인한 비용 C_F에 대하여 관리상태동안 오경보로 인한 기대비용 L_F는

$$L_F = C_F E(F_0) \tag{5}$$

가 된다.

하나의 이상원인의 발생으로 인한 품질비용은 이상원인으로 인한 공정평균 μ의 이동 크기에 의존한다. $T_1(j)$와 $C_T(j)$를 각각 이상원인 $A_j\,(j=1,2,\cdots,m)$로 인한 이상상태의 길이와 단위시간당 품질비용이라 할 때, 이상상태동안의 기대품질비용 L_O는

$$L_O = \sum_{j=1}^{m} C_T(j)\, E(T_1(j)) \frac{\lambda_j}{\lambda} \tag{6}$$

가 된다.

또한 이상상태 길이의 기대값 $E(T_1)$은

$$E(T_1) = \sum_{j=1}^{m} E(T_1(j)) \frac{\lambda_j}{\lambda} \tag{7}$$

로 나타낼 수 있다.

식 (3)에서 (7)을 모두 계산한 후 식 (2)에 대입시키면 단위시간당 기대비용 L을 구할 수 있다. 식 (3)에서 (7)의 계산에서 해결해야할 부분은 $E(S)$, $E(O)$, $E(F_0)$, 그리고 $E(T_1(j))$이다. 이 기대값들은 Markov chain을 이용하여 계산하였으며, 이에 대한 자세한 내용은 부록에 기술하였다.

이상에서 언급한 경제적 모형은 가장 중요한 요소들만을 고려하였고, 추가적인 여러 가지 비용들은 포함시키지 않았다. 추가적 비용의 예로는 이상원인 신호 후 이상원인 탐지와 검색으로 인한 공정 중지와 이로 인한 비용 등을 들 수 있는데 많은 연구에서 이들 추가적인 요소는 결과에 큰 영향을 미치지 않는다고 알려져 있다(Park과 Reynolds(1999) 참조).

VSI와 VSS EWMA 관리도의 경제적 설계는 주어진 여러 가지 공정모수와 비용모수에 대하여 식 (2)의 함수 L을 최소로 하는 6개의 관리모수(VSI 관리도는 $\{c_I, c, h_1, h_2, n_f, r\}$이고 VSS 관리도는 $\{c_S, c, h_f, n_1, n_2, r\}$)를 결정하는 것이다. 이 비선형방정식의 최적화는 편도함수(partial derivatives)에 대한 유한차분근사(finite difference approximations)를 이용한 일반화된 축소경사법(generalized reduced gradient procedure)을 사용하였다.(Lasdon et al.(1978) 참조) 이 계산에서 표본추출간격의 최소값과 최대값은 각각 $h_{\min}=0.1$과 $h_{\max}=10$, 표본크기의 최소값과 최대값은 $n_{\min}=1$과 $n_{\max}=50$, 그리고 단위시간으로는 한시간을 가정하기로 한다. 이 최소값과 최대값은 공정의 특성과 상황에 따라 결정할 수 있으며, 특히 표본추출간격의 최소값 $h_{\min}$는 최적의 표본추출간격 선정에 큰 영향을 주는 것으로 알려져 있다.

3. VSI와 VSS 관리도의 경제적 효율

3.1 EWMA 관리도

이 절에서는 실제 공정에서 쉽게 고려될 수 있는 여러 가지 공정과 비용모수에 대하여 최적의 VSI와 VSS EWMA 관리도를 설계하고 이를 비교하고자 하자. 우선

$$\delta_j = \frac{j \cdot \delta}{5.5}, \ j=1,2,\cdots,10$$

을 갖는 $m=10$의 이상원인이 발생할 수 있음을 가정하자.

이상원인 $A_j\,(j=1,2,\cdots,m)$의 발생율은

$$\frac{\lambda_j}{\lambda} = \frac{1}{10}, \ j=1,2,\cdots,10$$

인 균등 사전분포(uniform prior distribution)에 의하여 결정됨을 가정한다. 이 경우 $\delta = \sum \delta_j \lambda_j / \lambda$가 됨을 쉽게 알 수 있다.

다중 이상원인 모형은 Duncan(1971)이 관리도의 경제적 설계 연구에서 처음 도입하였다. 균등 사전분포는 이상원인들의 발생율이 평균의 변화량에 상관없이 균일하다고 가정하는 것이며, 큰 변화량의 발생율이 작은 변화량의 발생율에 비하여 작은 지수 사전분포를 사용하는 경우도 있다(Park과 Reynolds (1999) 참조).

이상원인 A_j로 인한 품질비용 $C_T(j)$는 δ_j^2에 비례하도록, 즉

$$C_T(j) = \frac{C_T \cdot \delta_j^2}{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} \delta_j^2}, \ j=1,2,\cdots,10$$

으로 설정하였으며, 여기서 C_T는 이상원인으로 인한 단위시간당 평균품질비용을 나타낸다. 이 경우 $C_T = \sum C_T(j)\,\lambda_j/\lambda$가 됨을 쉽게 알 수 있다.

공정과 비용모수로는

$$\delta \in \{1,3\}, \ C_F \in \{50,200\}, \ C_T = 2\,C_F,$$
$$\lambda \in \{0.01, 0.001\}, \ a \in \{0,1\}, \ b \in \{0.1, 1\}$$

을 고려하였다.

위의 모수에 대하여 FSR, VSI, 그리고 VSS EWMA 관리도의 최적의 관리모수와 특성들을 <표 1>에서 <표 4>에 제시하였다. 이 표들은 여러 가지 δ와 C_F 값에 대하여 동일한 형태로 구성되어 있다. 표의 1행은 FSR EWMA 관리도, 2행은 VSI EWMA 관리도, 그리고 3행은 VSS EWMA 관리도의 값을 나타낸다. 그리고 표의 1열에서 3열까지는 각각 λ, a, 그리고 b의 값이 주어져 있으며, 4열에서 7열까지는 최적의 관리모수 값이 계산되어 있다. 8열의 *Obs./hr.*은 관리상태 하에서 시간당 추출한 관측값의 평균 갯수를 나타내며, 이 값은 관리상태의 평균 표본추출비 비교에 사용할 수 있다. *FA./1000hrs.*은 관리상태 하에서 발생한 시간당 오경보 수를 1000배한 값이며, 이 값은 각 관리도의 오경보 수를 비교할 때 사용할 수 있다. $E(T_1)$은 이상원인의 발생 후 신호까지의 평균 시간, 즉 평균 탐지시간을 나타낸다. 제일 마지막의 L은 각 관리도의 시간당 최소 기대비용을 나타내며, 괄호안의 *PR*은 FSR EWMA 관리도 대신 VSI와 VSS 관리도를 사용함으로 얻을 수 있는 비용 절감율(percent reduction)을 나타낸다. 비용 절감율 *PR*은 L_{FE}와 L_{VE}

<표 1> EWMA 관리도의 최적 설계($\delta=1$, $C_F=50$, 그리고 $C_T=100$ 의 경우)

λ	a	b	c_f c_I c c_S c	h_f h_1 h_2 h_f	n_f n_f n_1 n_2	r_f r r	$\frac{Obs.}{hr.}$	$\frac{FA.}{1000hrs.}$	$E(T_1)$	$L(PR)$
0.01	0	0.1	2.77 0.91 3.10 1.66 3.00	1.09 0.78 0.1 0.73	9 3 4 13	0.54 0.23 0.50	8.30 5.64 6.78	4.66 2.62 3.40	6.67 8.11 7.38	2.09 1.64(21.5) 1.82(12.9)
		1.0	2.06 0.74 2.65 1.16 2.24	2.67 1.33 0.1 2.05	4 1 3 5	0.65 0.21 0.58	1.52 1.30 1.73	13.54 6.34 10.79	9.96 14.01 9.36	4.78 4.00(16.3) 4.35(9.0)
	1	0.1	2.64 1.52 2.91 1.54 2.77	2.02 1.95 0.1 1.90	13 9 9 19	0.59 0.39 0.58	6.51 5.38 5.52	3.78 1.84 2.76	7.47 8.30 7.72	2.72 2.53(7.0) 2.53(7.0)
		1.0	2.00 1.08 2.49 1.12 2.13	3.32 2.81 0.1 2.99	5 3 4 5	0.68 0.39 0.63	1.53 1.49 1.45	12.61 5.00 10.07	10.02 14.22 10.44	5.11 4.68(8.4) 4.73(7.4)
0.001	0	0.1	2.75 0.78 3.20 2.21 3.59	3.61 1.90 0.1 0.54	9 2 1 15	0.52 0.15 0.23	2.49 1.79 2.58	1.49 0.76 0.50	21.01 24.56 18.60	0.68 0.51(25.0) 0.57(16.2)
		1.0	2.03 0.70 2.68 1.19 2.24	8.08 3.57 0.1 6.04	4 1 3 5	0.63 0.17 0.56	0.50 0.52 0.57	4.72 2.07 3.69	29.15 36.02 27.47	1.57 1.28(18.5) 1.43(8.9)
	1	0.1	2.62 1.46 2.93 1.48 2.75	6.21 5.97 0.1 5.82	13 9 9 20	0.56 0.34 0.55	2.10 1.77 1.82	1.30 0.55 0.95	21.69 23.01 21.18	0.88 0.81(8.0) 0.82(6.8)
		1.0	1.97 1.04 2.45 1.14 2.11	10.04 8.32 0.1 8.84	5 3 4 6	0.66 0.36 0.61	0.50 0.51 0.51	4.46 1.83 3.58	29.07 38.03 28.52	1.68 1.53(8.9) 1.56(7.1)

<표 2> EWMA 관리도의 최적 설계($\delta=1$, $C_F=200$, 그리고 $C_T=400$ 의 경우)

λ	a	b	c_f c_I c c_S c	h_f h_1 h_2 h_f	n_f n_f n_1 n_2	r_f r r	$\frac{Obs.}{hr.}$	$\frac{FA.}{1000hrs.}$	$E(T_1)$	$L(PR)$
0.01	0	0.1	3.15 1.06 3.37 1.85 3.82	0.62 0.53 0.1 0.10	12 6 1 9	0.46 0.22 0.17	19.26 14.81 15.26	2.44 1.43 1.02	4.84 4.23 4.00	4.91 3.85(21.6) 3.81(22.4)
		1.0	2.51 0.83 2.93 1.48 2.74	1.57 0.99 0.1 1.03	7 2 3 9	0.59 0.22 0.52	4.49 3.18 3.77	7.08 3.73 5.35	7.98 10.56 8.90	11.71 9.34(20.2) 10.40(11.2)
	1	0.1	3.05 1.48 3.27 1.60 3.17	1.05 1.01 0.1 0.95	17 11 11 26	0.50 0.30 0.50	16.32 12.52 13.48	2.04 1.03 1.49	4.89 4.53 4.45	6.09 5.40(11.3) 5.53(9.2)
		1.0	2.47 1.07 2.83 1.52 2.63	1.84 1.52 0.1 1.58	7 4 5 11	0.61 0.32 0.58	3.84 3.61 3.71	6.74 3.28 5.01	8.89 9.50 8.96	12.31 10.47(14.9) 11.12(9.7)
0.001	0	0.1	3.14 0.87 3.50 2.35 4.10	1.96 1.33 0.1 0.24	12 4 1 21	0.45 0.14 0.18	6.14 4.70 5.73	0.79 0.37 0.15	14.64 11.97 9.74	1.58 1.14(27.8) 1.22(22.8)
		1.0	2.49 0.73 3.01 1.56 2.73	4.81 2.34 0.1 3.35	7 2 4 10	0.57 0.15 0.52	1.46 1.53 1.41	2.42 1.16 1.75	23.46 20.87 24.32	3.83 3.00(21.7) 3.39(11.5)
	1	0.1	3.04 1.41 3.34 1.57 3.17	3.26 3.12 0.1 2.95	17 11 11 27	0.48 0.26 0.48	5.22 4.18 4.37	0.67 0.26 0.48	14.63 12.02 12.78	1.96 1.70(13.3) 1.77(9.7)
		1.0	2.45 1.00 2.86 1.50 2.62	5.63 4.50 0.1 4.72	8 4 5 11	0.59 0.27 0.56	1.43 1.28 1.24	2.32 1.00 1.72	23.43 25.06 25.46	4.02 3.38(15.9) 3.63(9.7)

<표 3> EWMA 관리도의 최적 설계($\delta=3$, $C_F=50$, 그리고 $C_T=100$ 의 경우)

λ	a	b	c_f c_I c c_S c	h_f h_1 h_2 h_f	n_f n_f n_1 n_2	r_f r r	$\frac{Obs.}{hr.}$	$\frac{FA.}{1000hrs.}$	$E(T_1)$	$L(PR)$
0.01	0	0.1	3.35	0.45	2	0.42	4.44	1.63	2.75	0.91
			1.19 3.54	0.44 0.1	1	0.24	2.76	0.91	2.92	0.71(22.0)
			2.29 3.66	0.36	1 8	0.50	3.28	0.69	2.28	0.73(19.8)
		1.0	2.74	1.21	1	0.55	0.83	4.60	7.12	2.17
			1.45 3.06	1.40 0.1	1	0.34	0.84	1.55	6.52	1.89(12.9)
			1.89 2.90	1.30	1 2	0.53	0.83	2.69	6.82	1.97(9.2)
	1	0.1	3.13	1.61	4	0.51	2.51	1.01	3.65	1.84
			1.86 3.24	1.62 0.84	3	0.41	1.94	0.69	3.72	1.78(3.3)
			1.91 3.33	1.56	3 9	0.58	2.22	0.54	2.89	1.76(4.3)
		1.0	2.62	2.05	1	0.60	0.49	4.00	10.16	2.87
			1.53 2.90	2.00 0.1	1	0.40	0.58	1.85	8.51	2.58(10.1)
			1.52 2.74	1.93	1 2	0.58	0.60	2.92	7.76	2.59(9.8)
0.001	0	0.1	3.35	1.42	2	0.41	1.41	0.52	8.42	0.29
			1.19 3.68	1.38 0.1	1	0.19	0.93	0.17	7.13	0.21(27.6)
			2.35 3.70	1.11	1 10	0.51	1.06	0.19	6.63	0.23(20.7)
		1.0	2.73	3.69	1	0.53	0.27	1.58	20.72	0.71
			1.39 3.11	4.31 0.1	1	0.30	0.28	0.42	18.06	0.60(15.5)
			1.92 2.91	3.96	1 2	0.51	0.27	0.86	20.87	0.64(9.9)
	1	0.1	3.12	5.01	4	0.49	0.80	0.34	10.93	0.59
			1.95 3.43	4.98 0.1	3	0.32	0.64	0.11	9.81	0.56(5.1)
			2.01 3.37	4.86	3 12	0.60	0.71	0.15	8.30	0.56(5.1)
		1.0	2.59	6.31	1	0.57	0.16	1.39	29.41	0.94
			1.45 2.91	6.11 0.1	1	0.35	0.19	0.56	23.18	0.83(11.7)
			1.56 2.74	5.90	1 2	0.56	0.19	0.98	23.19	0.84(10.6)

<표 4> EWMA 관리도의 최적 설계($\delta=3$, $C_F=200$, 그리고 $C_T=400$ 의 경우)

λ	a	b	c_f c_I c c_S c	h_f h_1 h_2 h_f	n_f n_f n_1 n_2	r_f r r	$\frac{Obs.}{hr.}$	$\frac{FA.}{1000hrs.}$	$E(T_1)$	$L(PR)$
0.01	0	0.1	3.70	0.26	2	0.36	7.77	0.80	2.39	2.03
			1.28 3.81	0.28 0.1	2	0.24	8.22	0.50	1.04	1.69(16.7)
			2.46 4.07	0.17	1 13	0.52	7.09	0.28	1.13	1.53(24.6)
		1.0	3.12	0.65	1	0.47	1.54	2.56	6.74	5.28
			1.30 3.36	0.70 0.1	1	0.27	1.73	1.10	3.92	4.12(22.0)
			2.10 3.35	0.60	1 4	0.50	1.87	1.30	4.19	4.37(17.2)
	1	0.1	3.52	0.81	5	0.44	6.20	0.51	1.93	3.86
			1.94 3.74	0.81 0.1	3	0.30	3.94	0.21	1.99	3.64(5.7)
			2.14 3.77	0.77	3 16	0.61	4.56	0.21	1.46	3.59(7.0)
		1.0	3.02	1.07	2	0.50	1.88	2.16	4.53	6.29
			1.46 3.25	1.03 0.1	1	0.30	1.13	1.10	5.85	5.59(11.1)
			1.90 3.21	0.97	1 5	0.54	1.30	1.30	4.49	5.73(8.9)
0.001	0	0.1	3.70	0.81	2	0.35	2.46	0.25	7.41	0.65
			1.08 3.97	0.69 0.1	1	0.15	1.90	0.11	4.24	0.47(27.7)
			2.49 4.09	0.53	1 14	0.53	2.23	0.08	3.54	0.48(26.2)
		1.0	3.11	2.04	1	0.45	0.49	0.83	20.33	1.72
			1.26 3.47	2.16 0.1	1	0.22	0.58	0.24	10.37	1.28(25.6)
			2.20 3.39	1.85	1 6	0.50	0.62	0.36	10.86	1.39(19.2)
	1	0.1	3.52	2.54	5	0.43	1.97	0.16	5.96	1.23
			1.89 3.83	2.53 0.1	3	0.27	1.26	0.05	5.57	1.15(6.5)
			2.18 3.79	2.43	3 19	0.63	1.44	0.06	4.38	1.14(7.3)
		1.0	3.02	3.32	2	0.48	0.60	0.71	13.57	2.02
			1.38 3.32	3.17 0.1	1	0.26	0.38	0.28	15.68	1.76(12.9)
			2.00 3.25	3.04	1 6	0.54	0.41	0.37	13.87	1.84(8.9)

를 각각 FSR과 VSI 또는 VSS EWMA 관리도를 사용할 경우 기대비용이라 할 때

$$PR = \frac{L_{FE} - L_{VE}}{L_{FE}} \times 100$$

으로 계산할 수 있다.

<표 1>에서 <표 4>에서 FSR, VSI, 그리고 VSS EWMA 관리도의 최적모수를 비교할 때 다음의 사항을 알 수 있었다. 영역을 구분하는 분계선은 VSS의 c_S가 VSI의 c_I에 비하여 더 컸지만, 관리한계 c는 일반적으로 VSI가 VSS에 비하여 더 컸다. 이는 VSI가 VSS 관리도에 비하여 큰 표본추출비(VSI에서는 h_2, VSS에서는 n_2)를 사용하는 영역이 더 넓음을 의미한다. 평균 변화량 δ가 큰 경우($\delta=3$) 표본추출간격에서 VSS의 h_f는 VSI의 h_1과 h_2 사이의 값을 가지며, 표본크기에서 VSI의 n_f는 VSS의 n_1과 n_2 사이의 값을 가졌다. 그러나 δ가 작은 경우($\delta=1$)에는 그렇지 않은 경우가 많았다. VSI에서 짧은 표본추출간격 h_2는 거의 모든 경우에 최소값으로 가정한 0.1에서 최적값을 가졌으며, 가중치 r은 VSS의 경우가 VSI에 비하여 일반적으로 훨씬 크게 나타나 최근의 정보를 더 많이 이용함을 알 수 있었다.

관리상태 하에서 시간당 추출한 관측값의 평균 갯수($Obs./hr.$)는 일반적으로 VSI가 VSS에 비하여 더 작았다. 관리상태에서의 시간당 오경보 수($FA./1000hrs.$)는 일반적으로 VSI가 더 작았지만, 이상원인의 평균 탐지시간($E(T_1)$)은 VSS가 더 작았다. 이것은 VSI의 관리한계 c가 VSS에 비하여 더 큰 값을 갖기 때문인 것으로 판단된다.

EWMA 관리도에서 시간당 기대비용(L)을 살펴보면 FSR 관리도 대신 VSI와 VSS 관리도를 사용함으로 많은 비용을 절감할 수 있는 것으로 나타났다(비용 절감율(PR)의 범위는 VSI가 3.3%~27.8%이고 VSS가 4.3%~26.2%임). VSI와 VSS 관리도를 비교할 경우 일반적으로 VSI 관리도의 기대비용이 VSS 관리도에 비하여 더 작았다. 이것은 EWMA 관리도에서 표본추출간격과 표본크기를 변화시킬 경우 표본추출간격을 변화시키는 VSI 관리도가 표본크기를 변화시키는 VSS 관리도에 비하여 경제적으로 더 효율적임을 알려주는 것이다. 이 결과는 일반적으로 알려져 있는 통계적 효율과도 일치한다(Reynolds와 Arnold(2001) 등을 참조).

3.2 Shewhart의 $\overline{X}$ 관리도

EWMA 관리도에서 가중치 r이 1인 경우 식 (1)의 통계량은 $E_t = Z_t$가 된다. 즉 표본추출 시점에서의 정보만을 이용하는 Shewhart의 $\overline{X}$ 관리도로 변화된다. 앞 절에서와 동일한 공정과 비용모수에 대하여 FSR, VSI, 그리고 VSS $\overline{X}$ 관리도의 최적의 관리모수와 특성들이 <표 5>에서 <표 8>에 제시되어 있다. $\overline{X}$ 관리도의 경우 EWMA 관리도에서 나타난 특성과 유사한 것도 있었지만, 서로 다른 결과들도 많았다.

거의 대부분의 경우 분계선과 관리한계는 VSS가 VSI 보다 더 큰 값을 가졌다(EWMA 관리도에서 관리한계는 일반적으로 VSI가 VSS 보다 더 컸음). 표본추출간격에

<표 5> $\overline{X}$ 관리도의 최적 설계($\delta=1$, $C_F=50$, 그리고 $C_T=100$ 의 경우)

λ	a	b	c_f		h_f		n_f		$\frac{Obs.}{hr.}$	$\frac{FA.}{1000hrs.}$	$E(T_1)$	$L(PR)$
			c_I	c	h_1	h_2	n_f					
			c_S	c	h_f		n_1	n_2				
0.01	0	0.1	2.61		1.36		11		8.15	6.60	8.82	2.28
			1.32	2.68	1.33	0.43	8		6.99	6.30	10.20	2.13(6.6)
			1.72	2.80	1.09		6	27	7.38	4.74	10.90	2.02(11.4)
		1.0	1.97		3.07		5		1.65	15.53	10.08	4.93
			0.85	2.05	3.14	2.36	4		1.44	14.20	10.88	4.61(6.5)
			1.19	2.09	2.73		4	6	1.67	13.21	10.46	4.58(7.1)
	1	0.1	2.53		2.17		14		6.53	5.28	9.66	2.84
			1.24	2.55	2.23	1.69	12		5.76	5.02	10.25	2.73(3.9)
			1.33	2.60	2.02		9	20	5.60	4.54	10.66	2.67(6.0)
		1.0	1.94		3.58		5		1.42	14.49	11.04	5.24
			0.87	2.00	3.64	2.97	5		1.51	13.19	10.53	4.93(5.9)
			1.13	2.04	3.31		4	7	1.49	12.38	11.01	4.91(6.3)
0.001	0	0.1	2.59		4.19		11		2.63	2.28	26.06	0.75
			1.42	2.70	3.93	0.12	8		2.41	2.10	29.95	0.70(6.7)
			1.74	2.78	3.37		6	31	2.41	1.61	31.00	0.66(12.0)
		1.0	1.95		9.32		5		0.54	5.48	29.34	1.63
			0.84	2.02	9.49	7.11	4		0.47	5.03	31.37	1.52(6.7)
			1.16	2.06	8.26		4	6	0.55	4.74	29.92	1.51(7.4)
	1	0.1	2.49		6.65		14		2.11	1.90	27.85	0.93
			1.23	2.52	6.82	5.08	13		2.03	1.80	27.41	0.89(4.3)
			1.63	2.64	6.18		10	35	2.07	1.34	29.32	0.87(6.5)
		1.0	1.91		10.84		5		0.46	5.18	31.83	1.73
			1.29	1.95	10.48	10.37	5		0.48	4.81	29.98	1.63(5.8)
			1.24	2.02	9.85		4	7	0.48	4.34	32.61	1.62(6.4)

<표 6> $\overline{X}$ 관리도의 최적 설계($\delta=1$, $C_F=200$, 그리고 $C_T=400$ 의 경우)

λ	a	b	c_f		h_f		n_f		$\frac{Obs.}{hr.}$	$\frac{FA.}{1000hrs.}$	$E(T_1)$	$L(PR)$
			c_I	c	h_1	h_2	n_f					
			c_S	c	h_f		n_1	n_2				
0.01	0	0.1	2.93		0.83		16		19.26	4.10	7.76	5.69
			1.46	2.99	0.79	0.1	12		17.51	4.11	8.57	5.32(6.5)
			1.83	3.12	0.62		8	50	17.98	2.95	8.37	4.83(15.1)
		1.0	2.38		1.89		8		4.28	9.11	9.71	12.44
			1.16	2.45	1.91	1.01	7		4.22	8.49	9.90	11.62(6.6)
			1.53	2.54	1.58		5	15	4.07	6.99	11.30	11.28(9.3)
	1	0.1	2.87		1.19		20		16.96	3.47	7.68	6.67
			1.46	2.89	1.21	0.70	18		16.03	3.41	7.66	6.41(3.9)
			1.67	3.00	1.04		11	50	14.51	2.54	8.16	6.02(9.7)
		1.0	2.36		2.09		8		3.87	8.70	10.32	12.95
			1.13	2.41	2.14	1.35	7		3.67	8.13	10.61	12.16(6.1)
			1.51	2.50	1.84		6	15	4.02	6.64	11.16	11.88(8.3)
0.001	0	0.1	2.91		2.61		17		6.53	1.38	22.05	1.86
			1.48	2.98	2.43	0.1	13		6.19	1.37	23.55	1.74(6.5)
			1.77	3.10	1.93		8	50	5.87	0.99	24.04	1.57(15.6)
		1.0	2.36		5.77		8		1.39	3.19	28.38	4.09
			1.16	2.43	5.83	2.99	7		1.37	2.97	28.73	3.83(6.4)
			1.54	2.52	4.83		5	16	1.33	2.46	32.30	3.71(9.3)
	1	0.1	2.85		3.68		21		5.71	1.19	21.84	2.17
			1.50	2.88	3.78	2.03	18		5.10	1.13	23.32	2.08(4.1)
			1.59	2.99	3.24		11	50	4.78	0.87	22.97	1.95(10.1)
		1.0	2.33		6.38		9		1.41	3.07	27.59	4.26
			1.15	2.39	6.53	4.07	7		1.19	2.82	31.05	4.01(5.9)
			1.52	2.48	5.60		6	16	1.32	2.36	31.68	3.91(8.2)

<표 7> $\overline{X}$ 관리도의 최적 설계($\delta=3$, $C_F=50$, 그리고 $C_T=100$ 의 경우)

λ	a	b	c_f c_I c c_S c	h_f h_1 h_2 h_f	n_f n_f n_1 n_2	$\frac{Obs.}{hr.}$	$\frac{FA.}{1000hrs.}$	$E(T_1)$	$L(PR)$
0.01	0	0.1	3.10 1.53 3.14 2.30 3.56	0.63 0.62 0.1 0.44	2 2 1 23	3.18 3.64 3.56	3.08 3.04 0.85	7.84 6.55 4.07	1.09 1.01(7.3) 0.85(22.0)
		1.0	2.59 1.31 2.65 1.84 2.75	1.41 1.47 0.67 1.42	1 1 1 3	0.71 0.77 0.82	6.85 6.09 4.17	10.19 9.86 10.91	2.38 2.21(7.1) 2.15(9.7)
	1	0.1	2.96 2.26 2.96 1.99 3.29	1.69 1.68 1.68 1.60	4 4 3 20	2.38 2.40 2.56	1.83 1.84 0.62	6.83 6.24 3.95	1.92 1.89(1.6) 1.81(5.7)
		1.0	2.50 1.23 2.53 1.60 2.64	2.21 2.26 1.71 2.06	2 1 1 3	0.92 0.47 0.62	5.53 5.26 3.97	7.61 12.57 11.42	2.99 2.85(4.7) 2.72(9.0)
0.001	0	0.1	3.09 1.57 3.14 2.36 3.63	1.99 1.91 0.1 1.38	2 2 1 28	1.01 1.18 1.12	1.02 0.99 0.20	24.03 19.96 11.45	0.36 0.33(8.3) 0.27(25.0)
		1.0	2.56 1.31 2.63 1.85 2.73	4.35 4.47 1.83 4.32	1 1 1 4	0.23 0.25 0.28	2.37 2.13 1.44	30.05 28.46 29.19	0.78 0.73(6.4) 0.70(10.3)
	1	0.1	2.93 1.58 2.95 2.08 3.37	5.26 5.39 4.21 4.96	5 4 3 27	0.95 0.76 0.81	0.64 0.61 0.15	15.57 18.52 10.52	0.62 0.61(1.6) 0.57(8.1)
		1.0	2.47 1.21 2.50 1.59 2.61	6.76 6.94 5.16 6.26	2 1 1 4	0.30 0.15 0.22	1.99 1.88 1.44	21.99 35.97 28.81	0.98 0.94(4.1) 0.89(9.2)

<표 8> $\overline{X}$ 관리도의 최적 설계($\delta=3$, $C_F=200$, 그리고 $C_T=400$ 의 경우)

λ	a	b	c_f c_I c c_S c	h_f h_1 h_2 h_f	n_f n_f n_1 n_2	$\frac{Obs.}{hr.}$	$\frac{FA.}{1000hrs.}$	$E(T_1)$	$L(PR)$
0.01	0	0.1	3.38 1.59 3.41 2.36 3.95	0.40 0.40 0.1 0.23	4 3 1 30	10.07 8.21 7.02	1.80 1.77 0.34	4.15 5.17 2.15	2.65 2.52(4.9) 1.81(31.7)
		1.0	2.90 1.49 2.97 2.01 3.13	0.87 0.83 0.1 0.70	2 1 1 8	2.32 1.38 1.96	4.26 4.13 2.49	6.77 11.50 8.12	5.94 5.73(3.5) 5.02(15.5)
	1	0.1	3.28 1.72 3.30 2.18 3.77	0.88 0.90 0.64 0.79	6 6 3 35	6.84 6.90 5.32	1.15 1.12 0.21	4.05 3.58 1.78	4.19 4.12(1.7) 3.68(12.2)
		1.0	2.85 1.47 2.87 1.88 3.04	1.21 1.24 0.71 1.07	2 2 1 9	1.66 1.74 1.47	3.63 3.51 2.17	8.34 7.55 8.04	6.87 6.58(4.2) 6.22(9.5)
0.001	0	0.1	3.38 1.63 3.42 2.46 4.05	1.26 1.25 0.1 0.71	4 3 1 38	3.18 2.66 2.17	0.58 0.56 0.07	12.99 15.78 6.13	0.85 0.81(4.7) 0.57(32.9)
		1.0	2.89 1.51 2.96 2.17 3.26	2.70 2.56 0.1 2.10	2 1 1 15	0.74 0.45 0.69	1.43 1.37 0.54	20.44 34.45 19.66	1.93 1.88(2.6) 1.61(16.6)
	1	0.1	3.28 2.18 3.32 2.21 3.80	2.76 2.78 0.13 2.48	6 6 3 38	2.17 2.23 1.63	0.38 0.33 0.06	12.51 11.25 5.50	1.34 1.32(1.5) 1.16(13.4)
		1.0	2.83 1.49 2.86 1.93 3.09	3.76 3.84 2.02 3.32	2 2 1 12	0.53 0.56 0.49	1.24 1.19 0.60	24.89 22.50 21.55	2.24 2.14(4.5) 2.00(10.7)

서 VSS의 h_f는 VSI의 h_1과 h_2 사이의 값을, 표본크기에서 VSI의 n_f는 VSS의 n_1과 n_2 사이의 값을 가졌다. EWMA 관리도에서와 다르게 VSI에서 짧은 표본추출간격 h_2는 최소값인 0.1이 아닌 경우가 대부분이었으며, 긴 표본추출간격인 h_1과의 차이가 크지 않은 경우도 많았다.

관리상태 하에서 시간당 추출한 관측값의 평균 갯수($Obs./hr.$)는 일반적으로 C_F와 C_T가 작은 경우($C_F=50$, $C_T=100$)에는 VSI가, C_F와 C_T가 큰 경우($C_F=200$, $C_T=400$)에는 VSS가 더 작은 경우가 많았다. 관리상태에서의 시간당 오경보 수 ($FA./1000hrs.$)는 모든 경우에 VSS가 VSI에 비하여 더 작았다. 이상원인의 평균 탐지시간($E(T_1)$)은 일반적으로 δ가 작은 경우($\delta=1$)에는 VSI가, δ가 큰 경우 ($\delta=3$)에는 VSS가 더 작게 나타났다.

시간당 기대비용(L)을 살펴보면 EWMA 관리도에서와 마찬가지로 FSR 관리도 대신 VSI와 VSS 관리도를 사용함으로 많은 비용이 절감됨을 알 수 있다(비용 절감율(PR)의 범위는 VSI가 1.5%~8.3%이고 VSS가 5.7%~32.9%임). 그러나 EWMA 관리도의 경우와 다르게 $\overline{X}$ 관리도에서 VSI 방법의 효율은 많이 떨어짐을 알 수 있었으며, VSS 방법이 VSI에 비하여 훨씬 효율적으로 나타났다. 이것 또한 Reynolds와 Arnold(2001) 등에 나타난 통계적 특성과도 동일한 결과이다. $\overline{X}$ 관리도에서 VSS 방법이 더 효율적인 이유를 살펴보면, $\overline{X}$ 관리도는 현 시점의 관리 통계량을 계산할 때 과거의 정보를 전혀 이용하지 않으므로 공정의 어떤 징후가 있을 경우 표본을 빨리 추출하는 것 보다 많은 수의 표본을 추출하는 것이 더 중요한 요인이라고 판단된다. VSI 관리도에서 최적의 두 표본추출간격 h_1과 h_2 값에 큰 차이가 없는 경우가 많은 것도 이와 유사한 이유 때문이라고 생각된다.

4. 결 론

이전 시점의 통계량에 따라 공정변화의 징후가 있는 경우와 그렇지 않는 경우로 구분하여 그 다음 시점의 표본추출간격을 변화시키는 VSI 관리도, 표본크기를 변화시키는 VSS 관리도, 그리고 이 두 가지 모두를 변화시키는 VSR 관리도에 대한 연구가 최근에 많이 진행되었다. 그러나 이 연구들은 VSI, VSS, 그리고 VSR 관리도의 통계적 특성에 관련된 것이 대부분이었다. 본 논문에서는 VSI와 VSS 관리도에 관한 경제적 모형을 설정하고 이 모형을 이용하여 두 관리도의 경제적 특성을 비교하고 분석하였다.

Markov chain 방법을 이용한 수치작업 결과 다음과 같은 특성을 알 수 있었다. 영역을 구분하는 분계선은 VSS의 c_S가 VSI의 c_I에 비해 더 컸으며, 관리한계는 EWMA 관리도에서 VSI, $\overline{X}$ 관리도에서 VSS의 경우가 더 컸다.

EWMA 관리도에서 가중치는 VSS가 VSI에 비하여 훨씬 큰 값을 가지며, 이는 VSS 방법이 최근의 정보를 더 많이 이용함을 의미한다. 경제적 설계에서 얻어진 최적의 가중치는 통계적 설계에서 사용하는 가중치에 비하여 일반적으로 더 큰 값을 갖는 것으로

나타났다.

EWMA 관리도에서 평균 표본추출비와 오경보 수의 측면에서는 VSI, 이상원인의 평균 탐지시간에서는 VSS가 더 좋은 것으로 나타났으며, $\overline{X}$ 관리도에서 오경보 수는 VSS가 항상 더 좋은 것으로 나타났다.

기대비용을 살펴볼 때 FSR 관리도 대신 VSI와 VSS 관리도를 사용함으로 많은 비용을 절감할 수 있는 것으로 나타났다. EWMA 관리도에서는 VSI 방법을 사용하는 것이 경제적으로 더 효율적이지만, $\overline{X}$ 관리도에서는 VSS 방법을 사용하는 것이 더 효율적이었다. 특히 $\overline{X}$ 관리도에서 VSI 방법은 효율이 많이 떨어짐을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] Annadi, H. P., Keats, J. B., Runger, G. C., and Montgomery, D. C.(1995), "An Adaptive Sample Size CUSUM Control Chart", *International Journal of Production Research*, Vol. 33, pp. 1605-1616.

[2] Arnold, J. C. and Reynolds, M. R., Jr.(1994), "CUSUM Charts with Variable Sample Size and Variable Interval Size", *Proceedings, Section on Quality and Productivity, ASA*, pp. 87-92.

[3] Arnold, J. C. and Reynolds, M. R., Jr.(2001), "CUSUM Control Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals", *Journal of Quality Technology*, Vol. 33, pp. 66-81.

[4] Arnold, J. C., Reynolds, M. R., Jr., and Sawalapurkar-Powers, U.(1993), "Control Charts with Variable Sample Size and Variable Interval Size", *Proceedings, Section on Quality and Productivity, ASA*, pp. 138-143.

[5] Chengalur-Smith, I. N., Arnold, J. C., and Reynolds, M. R., Jr.(1989), "Variable Sampling Intervals for Multiparameter Shewhart Charts", *Communications in Statistics : Theory and Methods*, Vol. 18, pp. 1769-1792.

[6] Costa, A. F. B.(1994)," $\overline{X}$ Charts with Variable Sample Size", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, pp. 155-163.

[7] Costa, A. F. B.(1997)," $\overline{X}$ Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals", *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, pp. 197-204.

[8] Costa, A. F. B.(1999), "Joint $\overline{X}$ and R Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals", *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, pp. 387-397.

[9] Duncan, A. J.(1971), "The Economic Design of $\overline{X}$ Chart When There Is a Multiplicity of Assignable Causes", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, pp. 39-53.

[10] Lasdon, L. S., Waren, A. D., Jain, A., and Ranter, M.(1978), "Design and Testing of Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming", *ACM Transactions on*

Mathematical Software, Vol. 4, pp. 34-50.

[11] Lorenzen, T. J. and Vance, L. C.(1986), "The Economic Design of Control Charts : A Unified Approach", *Technometrics*, Vol. 28, pp. 3-10.

[12] Park, C. and Reynolds, M. R., Jr.(1994), "Economic Design of a Variable Sample Size $\overline{X}$-Charts", *Communications in Statistics : Simulation and Computation*, Vol. 23, pp. 467-483.

[13] Park, C. and Reynolds, M. R., Jr.(1999), "Economic Design of a Variable Sampling Rate $\overline{X}$-Chart", *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, pp. 427-443.

[14] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1994), "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval $\overline{X}$ Control Scheme", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, pp. 164-176.

[15] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1997), "Economic -Statistical Design of an Adaptive $\overline{X}$ Chart", *International Journal of Production Economics*, Vol. 49, pp. 1-15.

[16] Prabhu, S. S., Runger, G. C., and Keats, J. B.(1993), "An Adaptive Sample Size $\overline{X}$ Chart", *International Journal of Production Research*, Vol. 31, pp. 2895-2909.

[17] Rendtel, U.(1990), "CUSUM Schemes with Variable Sampling Intervals and Sample Sizes", *Statistical Papers*, Vol. 31, pp. 103-118.

[18] Reynolds, M. R., Jr.(1989), "Optimal Variable Sampling Interval Control Charts", *Sequential Analysis*, Vol. 8, pp. 361-379.

[19] Reynolds, M. R., Jr.(1995), "Evaluating Properties of Variable Sampling Interval Control Charts", *Sequential Analysis*, Vol. 14, pp. 59-97.

[20] Reynolds, M. R., Jr.(1996a), "Shewhart and EWMA Variable Sampling Interval Control Charts with Sampling at Fixed Times", *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, pp. 199-212.

[21] Reynolds, M. R., Jr.(1996b), "Variable Sampling Interval Control Charts with Sampling at Fixed Times", *IIE Transactions*, Vol. 28, pp. 497-510.

[22] Reynolds, M. R., Jr., Amin, R. W., and Arnold, J. C.(1990), "CUSUM Charts with Variable Sampling Interval", *Technometrics*, Vol. 32, pp. 371-384.

[23] Reynolds, M. R., Jr., Amin, R. W., Arnold, J. C., and Nachlas, J. A.(1988), "$\overline{X}$ Charts with Variable Sampling Interval", *Technometrics*, Vol. 30, pp. 181-192.

[24] Reynolds, M. R., Jr. and Arnold, J. C.(1989), "Optimal Shewhart Control Charts with Variable Sampling Intervals Between Samples", *Sequential Analysis*, Vol. 8, pp. 51-77.

[25] Reynolds, M. R., Jr. and Arnold, J.

C.(2001), "EWMA Control Charts with Variable Sample Sizes and Variable Sampling Intervals", *IIE Transactions*, Vol. 33, pp. 511-530.

[26] Reynolds, M. R., Jr., Arnold, J. C., and Baik, J. W.(1996), "Variable Sampling Interval $\overline{X}$-Charts in the Presence of Correlation", *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, pp. 12-30.

[27] Runger, G. C. and Pignatiello, J. J., Jr.(1991), "Adaptive Sampling for Process Control", *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, pp. 135-155.

[28] Saccucci, M. S., Amin, R. W., and Lucas, J. M.(1992), "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes with Variable Sampling Intervals", *Communications in Statistics : Simulation and Computation*, Vol. 21, pp. 627- 657.

[29] Zimmer, L. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1998), "Evaluation of a Three-State Adaptive Sample Size $\overline{X}$ Control Chart", *International Journal of Production Research*, Vol. 36, pp. 733-743.

부 록

A. Markov chain을 이용한 기대비용함수의 계산

주기당 기대비용의 표현식을 유도하기 위하여 Markov chain 방법을 이용한다. 이후의 수식은 표현의 편의를 위하여 VSI와 VSS 방법을 모두 사용하는 VSR EWMA 관리도를 기준으로 나타내기로 한다. VSR EWMA 관리도에서 $n_1 = n_2 = n_f$로 놓으면 VSI 관리도로 축소되며, $h_1 = h_2 = h_f$로 놓으면 VSS 관리도로 축소된다. 또한 가중치를 $r=1$로 놓으면 Shewhart의 $\overline{X}$ 관리도로 변화된다.

시점 t에서 공정의 상태를 V_t라 할 때, V_t는 공정의 관리/이상상태와 이상상태 신호의 여부에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다.

$V_t=1$: 시점 t에서 공정이 관리상태,
$V_t=2$: 시점 t에서 공정이 이상상태이지만 이상상태의 신호가 발생하지 않은 상태,
$V_t=3$: 시점 t에서 공정이 이상상태이고 이상상태의 신호가 발생한 상태.

여기서 상태 1과 2는 공정이 이후로 진행될 수 있으므로 일시적 상태(transient state)가 되고, 상태 3은 신호로 인하여 하나의 주기가 끝나므로 흡수상태(absorbing state)가 된다.

$\{(x_i, v_i), i=0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm m\}$를 구간 $(-c, c)$에서 $g(=2m+1)$개의 Gaussian quadrature 점과 가중치라 하면, $x_i = -x_{-i}$, $v_i = -v_{-i}$, 그리고 $\sum_{i=-m}^{m} v_i = 2c$가 성립한다. 이를 이용하면 VSR EWMA 통계량의 계속영역(continuation region)인 구간 $(-c, c)$는 다음과 같이 g개의 부분구간으로 나눌 수 있다.

$$I(i) = (-c+\sum_{j=-m}^{i-1} v_j, -c+\sum_{j=-m}^{i} v_j),$$
$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m.$$

편의를 위하여 Gaussian quadrature 점 $x_i\,(i=0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m)$는 구간 $I(i)$를, x_{m+1}은 구간 $(-c, c)$ 이외의 구간을 나타내기로 한다. 분계선 $c_I, c_S, -c_I, -c_S$가 속하는 구간은 그 분계선을 끝점으로 구간을 다시 나누어야 한다. 따라서 계속영역 $(-c, c)$은 $g+4$의 부분구간으로 나누어짐을 쉽게 알 수 있으며, 결국 실수구간 $(-\infty, \infty)$은 $g' = g+5$의 부분구간으로 나눌 수 있다.

$h(k)$와 $n(k)$를 VSR EWMA 통계량이 구간 $I(k)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m$에 속할 때 다음 시점의 표본추출구간과 표본크기라 하면, $h(k)$와 $n(k)$는 구간 $I(k)$를 대표하는 Gaussian quadrature 점 x_k에 의하여 다음과 같이 결정된다.

$$h(k) = \begin{cases} h_1 & \text{만일 } |x_k| < c_I \\ h_2 & \text{만일 } |x_k| \geq c_I \end{cases},$$

$$n(k) = \begin{cases} n_1 & \text{만일 } |x_k| < c_S \\ n_2 & \text{만일 } |x_k| \geq c_S \end{cases}.$$

$P(j, x_l | i, x_k)$를 $V_t = i$, $E_t \in I(k)$일 때 $V_{t+1} = j$, $E_{t+1} \in I(l)$이 될 전이확률이라 할때($i, j = 1, 2$이고, $k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m, m+1$), 일시적 상태의 전이확률행렬(transient state transition probability matrix)은

$$\mathbf{P_T} = \begin{bmatrix} \mathbf{P_{11}} & \mathbf{P_{12}} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P_{22}} \end{bmatrix}_{((2g'-1)\times(2g'-1))}$$

로 정의할 수 있으며, 여기서 각 부행렬(submatrix)은

$$\mathbf{P_{11}} = \begin{bmatrix} P(1, x_{-m}|1, x_{-m}) & \cdots & P(1, x_m|1, x_{-m}) & P(1, x_{m+1}|1, x_{-m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P(1, x_{-m}|1, x_m) & \cdots & P(1, x_m|1, x_m) & P(1, x_{m+1}|1, x_m) \\ P(1, x_{-m}|1, x_{m+1}) & \cdots & P(1, x_m|1, x_{m+1}) & P(1, x_{m+1}|1, x_{m+1}) \end{bmatrix}_{(g'\times g')},$$

$$\mathbf{P_{12}} = \begin{bmatrix} P(2, x_{-m}|1, x_{-m}) & \cdots & P(2, x_m|1, x_{-m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(2, x_{-m}|1, x_m) & \cdots & P(2, x_m|1, x_m) \\ P(2, x_{-m}|1, x_{m+1}) & \cdots & P(2, x_m|1, x_{m+1}) \end{bmatrix}_{(g'\times(g'-1))},$$

$$\mathbf{P_{22}} = \begin{bmatrix} P(2, x_{-m}|2, x_{-m}) & \cdots & P(2, x_m|2, x_{-m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(2, x_{-m}|2, x_m) & \cdots & P(2, x_m|2, x_m) \end{bmatrix}_{((g'-1)\times(g'-1))}$$

이고, $\mathbf{O}$은 $(g'-1)\times g'$의 영행렬(zero matrix)을 나타낸다.

$\mathbf{s}_T$를 초기상태(starting state), 즉 $V_t = 1$, $E_t \in I(m+1)$의 확률벡터라 할 때, $\mathbf{s}_T$는 g'번째 원소만 1이고 나머지 원소는 0인 크기 $(2g'-1)$의 벡터가 된다. 벡터 $\mathbf{h}$와 $\mathbf{n}$은 i번째 원소가 각각 현재의 통계량이 구간 $I(i)$에 속할 때 다음 시점의 표본추출간격과 표본크기를 나타내는 크기 g'의 벡터라 하자. VSI 관리도에서는 벡터 $\mathbf{n}$의 모든 원소를 n_f로, VSS 관리도에서는 벡터 $\mathbf{h}$의 모든 원소를 h_f로 놓으면 된다. 그리고 $\mathbf{P}_T(h)$는 발생한 이상원인이 $A_h\,(h=1, 2, \cdots, m)$인 경우의 전이확률행렬이고, $S(h)$, $O(h)$, 그리고 $T(h)$는 각각 이상원인이 A_h인 경우 한 주기동안 추출한 표본수와 개별 관측치의 수, 그리고 주기의

길이라 하자. 또한 벡터의 아래첨자에 '-' 표시가 된 것은 원래의 벡터에서 마지막 원소가 제거된 벡터를 나타낸다고 하자. 그러면

$\mathbf{h}'_T = (\ \mathbf{h}',\ \mathbf{h}'_-)$과

$\mathbf{n}'_T = (\ \mathbf{n}',\ \mathbf{n}'_-)$에 대하여

$E(S(h))$, $E(O(h))$, 그리고 $E(T(h))$는 Markov chain의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} E(S(h)) &= \mathbf{s}'_T[\ \mathbf{I}_T - \mathbf{P}_T(\mathbf{h})]^{-1}\ \mathbf{1}_T, \\ E(O(h)) &= \mathbf{s}'_T[\ \mathbf{I}_T - \mathbf{P}_T(\mathbf{h})]^{-1}\ \mathbf{n}_T, \\ E(T(h)) &= \mathbf{s}'_T[\ \mathbf{I}_T - \mathbf{P}_T(\mathbf{h})]^{-1}\ \mathbf{h}_T \end{aligned}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $\mathbf{I}_T$는 크기가 $(2g'-1)\times(2g'-1)$인 단위행렬(identiy matrix)이고, $\mathbf{1}_T$는 모든 원소가 1인 크기 $(2g'-1)$의 단위벡터이다.

각 이상원인의 조건부 발생 확률을 이용하여 식 (2)의 기대비용함수에 포함된 기대값들을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{h=1}^{m} E(S(h))\cdot\lambda_h/\lambda, \\ E(O) &= \sum_{h=1}^{m} E(O(h))\cdot\lambda_h/\lambda, \\ E(T) &= \sum_{h=1}^{m} E(T(h))\cdot\lambda_h/\lambda, \\ E(T_1(h)) &= E(T(h)) - 1/\lambda. \end{aligned}$$

한 주기 동안의 오경보의 기대횟수 $E(F_0)$는 어떤 h에 대하여

$$E(F_0) = \mathbf{s}'_T[\ \mathbf{I}_T - \mathbf{P}_T(\mathbf{h})]^{-1}\ \mathbf{f}_0 - 1$$

로 계산할 수 있다. 여기서 $\mathbf{f}_0$는 g'번째 원소만 1이고 나머지 원소는 0인 크기 $(2g'-1)$의 벡터이고, 식에서 1을 뺀 이유는 초기상태를 오경보가 발생한 상태로 간주하기 때문이다.

B. 전이확률 $P(j, x_l | i, x_k)$의 계산

$\delta(i)$를 $V_t = i$일 때 이상원인 A_h로 인한 평균이동의 크기(단위: 표준편차의 배수)라 하면,

$$\delta(i) = \begin{cases} 0 & \text{만일 } i=1 \\ \delta_h & \text{만일 } i=2 \end{cases}$$

가 된다. $i=1$이고 $k=m+1$인 경우를 제외하고 전이확률은

$$\begin{aligned} & P(j, x_l | i, x_k) \\ =\ & \Pr(V_{t+1}=j,\ E_{t+1}\in I(l)\ |\ V_t=i,\ E_t\in I(k)) \\ \approx\ & \Pr(E_{t+1}\in I(l)\ |\ V_t=i,\ V_{t+1}=j,\ E_t=x_k) \\ & \cdot \Pr(V_{t+1}=j\ |\ V_t=i,\ E_t=x_k) \\ =\ & \Pr(E_{t+1}\in I(l)\ |\ V_{t+1}=j,\ E_t=x_k) \\ & \cdot \Pr(V_{t+1}=j\ |\ V_t=i,\ E_t=x_k) \end{aligned}$$

가 되며, 이 식은

$$\begin{aligned} & \Pr[\ \frac{r}{\sqrt{r/(2-r)}}\ Z_{t+1} + (1-r)\,x_k \in I(l) \\ & \quad |\ \mu_{t+1} = \mu_0 + \delta(j)\sigma,\ N_{t+1} = n(k)\ ] \\ & \cdot \Pr(V_{t+1}=j\ |\ V_t=i,\ H_{t+1}=h(k)) \\ =\ & \Pr[\ \frac{r}{\sqrt{r/(2-r)}}\ \{Z + \sqrt{n(k)}\,\delta(j)\} \\ & \quad + (1-r)\,x_k \in I(l)] \\ & \cdot \Pr(V_{t+1}=j\ |\ V_t=i,\ H_{t+1}=h(k)) \end{aligned}$$

로 표현할 수 있다. 여기서 Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수를 나타낸다.

위의 두 확률은 다음과 같이 계산할 수 있

다.

$$\Pr[\frac{r}{\sqrt{r/(2-r)}}\{Z+\sqrt{n(k)}\,\delta(j)\} + (1-r)x_k \in I(l)]$$
$$= \begin{cases} \Phi[\frac{\sqrt{r/(2-r)}}{r}\{-c+\sum_{j=-m}^{l} v_j-(1-r)x_k\} \\ \quad -\sqrt{n(k)}\,\delta(j)] \\ \quad -\Phi[\frac{\sqrt{r/(2-r)}}{r}\{-c+\sum_{j=-m}^{l-1} v_j-(1-r)x_k\} \\ \quad -\sqrt{n(k)}\,\delta(j)], & \text{만일 } l=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm m \\ 1-\Phi[\frac{\sqrt{r/(2-r)}}{r}\{c-(1-r)x_k\} \\ \quad -\sqrt{n(k)}\,\delta(j)] \\ \quad +\Phi[\frac{\sqrt{r/(2-r)}}{r}\{-c-(1-r)x_k\} \\ \quad -\sqrt{n(k)}\,\delta(j)], & \text{만일 } l=m+1 \end{cases}$$

이고,

$$\Pr(V_{t+1}=j \mid V_t=i,\, H_{t+1}=h(k))$$
$$= \begin{cases} \exp\{-\lambda h(k)\} & \text{만일 } (i,j)=(1,1) \\ 1-\exp\{-\lambda h(k)\} & \text{만일 } (i,j)=(1,2) \\ 1 & \text{만일 } (i,j)=(2,2) \end{cases}$$

이다. $P(j, x_l|1, x_{m+1})$은 $h(k)=h_2$이고 $n(k)=n_2$인 $P(j, x_l|1, x_0)$로 계산할 수 있다.