

포와셀 관유동에서 온도변화의 응답특성

정진희[†]
LG전선(주) 공조개발실

Response Function of Temperature Fluctuation in the Poiseulle Flows

Jinhee Jeong[†]
LG Cable Co., Air Conditioning Development Team, Kyunggi 431-080, Korea

(Received February 6, 2002; revision received July 24, 2002)

ABSTRACT: The present study discusses the deviation from the pure dead-time model of passive scalars such as temperature and concentration in the Poiseulle flow. Even in the case of no thermal diffusion, there exists a substantial amount of damping and large deviation of phase lag from that computed by the traditional dead-time model after only 10 diameter downstream. These are caused by the phase difference of temperature in the radial direction due to the nonuniform velocity distribution. In the presence of thermal diffusion, damping is more pronounced.

Key words: Dead-time(데드타임), Poiseulle flow(포와셀유동)

기 호 설 명

G : 전달함수
 Pe : Peclet 수, $(U_o r_o)/\alpha$
 r : 반경방향거리
 T : 온도
 \widehat{T} : 온도의 푸리에계수
 T_o : 초가지점에서 온도의 최대변화폭
 U_o : 축방향의 최대유속
 z : 축방향거리

Λ : 무차원수, $= Pe \cdot \Omega$
 ω : 각속도
 Ω : 무차원화된 각속도, $(\omega_o r_o)/U_o$

상첨자

* : 무차원 변수
** : 무차원 변수

하첨자

b : 총괄 물성값

그리스 문자

α : 열전달 확산계수
 Γ : 무차원수, $(\omega_o r_o^2)/\alpha$

1. 서 론

일반적으로 프로세스 제어이론에서 배관에서의 온도, 농도 등과 같은 수동 스칼라(passive scalar)의 거동은 데드타임 모델(dead-time model)로 너무나 간단하게 취급된다.^(1,2,3) 즉, 어떤 지점 A에서 멀리 떨어진 지점 B에서의 온도 T_B 는 다음

[†] Corresponding author
Tel.: +82-31-450-3314; fax: +82-31-450-3173
E-mail address: jjeong@lgmach.co.kr

과 같이 표시된다.

$$T_B(t) = T_A(t-z/U) \quad (1)$$

여기서 z 는 A 와 B 간의 거리이고, U 는 유동의 속도이다. 이는 간단한 표현이면서 실제 현상을 어느 정도 잘 묘사하고 있다. 하지만 이것은 유동의 속도가 반경방향을 따라 균일한 분포를 가질 때에만(즉, 슬러그 유동) 성립하고, 교란이 아무리 긴 거리를 가더라도 소멸되지 않는다는 점에서 실제에 비해 너무 간단한 모델이고, 아무리 먼 거리를 이동하더라도, 감쇠가 없다는 점에서 제어하기 힘든 요소 중 하나이나, 이는 분명히 너무 과도한 요구이다. 이와 같은 과도한 요구가 그대로 모델에 반영되어 제어가 설계되었을 때, 실제로는 보다 완화된 조건에서 작동할 것이고, 제어기 튜닝시 적당한 제어 파라미터를 조절함으로써 보상할 수 있을 것이다. 하지만 유량제어를 위한 제어밸브 등을 위시한 많은 조작기의 제어상수들은 제어기 튜닝 이전의 설계시 이미 결정되고, 이는 전체 제어시스템의 최적화에 좋지 않은 영향을 끼칠 수 있다.

본 연구에서는 완전히 발달한(즉, 축방향으로 속도의 변화가 없는) 포와셀 유동에서 한 지점에서 온도를 강제로 변화하였을 때, 멀리 떨어진 후류에서의 온도의 전통적인 데드타임 모델에 대해서 실제와의 편차 원인을 파악하고, 보다 향상된 모델을 구해 보고자 한다.

2. 전달함수 해석 및 결과

본 장에서는 완전히 발달한 포와셀 층류유동에 있어서 초기지점에서의 온도가 어떤 주파수로 변화하고 있을 때, 초기지점에서 주어진 거리만큼 떨어진 온도전달함수를 확산이 없는 경우와 확산이 있는 경우를 나누어서 고려해 보도록 한다.

2.1 확산이 없는 경우

확산이 없는 이상적인 경우를 고려해 보자. 이때의 온도에 대한 지배방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

위의 1차 편미분방정식은 특성선 해석⁽⁴⁾을 통해 다음과 같이 일반해를 구할 수 있다. 즉,

$$T(r, z, t) = f\left(r, 0, t - \frac{z}{u(r)}\right)$$

이때 경계조건을 $T(r, z=0, t) = T_o \exp(i\omega t)$ 와 같이 설정하면, 온도분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(r, z, t) = T_o \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{u(r)}\right)\right]$$

속도분포를 포와셀 분포 $u(r) = U_o(1 - (r/r_o)^2)$ 로 가정하면 온도분포를 다음과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$$T(r, z, t) = T_o \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{U_o(1 - (r/r_o)^2)}\right)\right]$$

여기서 무차원 반경 r^* , 무차원 시간 t^* , 무차원 온도 T^* 를 다음과 같이 도입한다.

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{r_o}, & t^* &= \omega t \\ z^* &= \frac{\omega z}{U_o}, & u^* &= \frac{u}{U_o} \\ T^* &= \frac{T}{T_o}, & \Omega &= \frac{\omega_o r_o}{U_o} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 축방향거리를 반경방향거리와는 달리 주파수와 유속으로 무차원화하였다. 그 이유는 전달함수가 축방향거리만의 변수로 표시될 수 있도록 하기 위해서이다(식(5) 참조). 따라서 무차원 온도분포를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$T^* = \exp\left[i\left(t^* - \frac{z^*}{1 - r^{*2}}\right)\right] \quad (4)$$

제어설계자는 반경방향의 온도분포에는 관심이 없고, 어떤 초기지점에서 온도변화가 주어졌을 때, 초기지점으로부터 주어진 축방향거리만큼 떨어진 지점에서 온도의 응답에만 관심이 있으므로, 단면적을 따라 온도의 평균을 구해야 한다. 온도평

균은 단순히 산술적인 평균이 아니라, 완전히 섞였을 때의 온도의 평균인 총괄온도를 고려해야 한다. 총괄온도는 다음과 같이 정의되고 식(4)를 대입하여 적분을 수행하여 닫힌 형태로 다음과 같이 구할 수 있다.⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} T_b^* &= \frac{\int uT dA}{\int u dA} \\ &= 4 \int_0^1 (1-r^{*2}) r^* \exp\left[i\left(t^* - \frac{z^*}{1-r^{*2}}\right)\right] dr^* \\ &= 2 \int_0^1 s \exp\left[i\left(t^* - \frac{z^*}{s}\right)\right] ds \\ &= -\exp[i(t^* - z^*)](iz^* + e^{iz^*} z^{*2} \Gamma(0, iz^*) - 1) \end{aligned}$$

여기서 $\Gamma(a, z)$ 는 불완전 감마함수⁽⁵⁾로서 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{(a-1)} \exp(-t) dt$$

따라서 전달함수는 다음과 같이 정의되고 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} G(z^*) &= \frac{T_b(z^*, t^*)}{T_b(0, t^*)} \\ &= -e^{-iz^*} (iz^* + e^{iz^*} z^{*2} \Gamma(0, iz^*) - 1) \end{aligned} \quad (5)$$

위의 전달함수를 사용하여 무차원 축방향거리에 따른 이득(gain)과 위상지연(phase lag)을 나타내

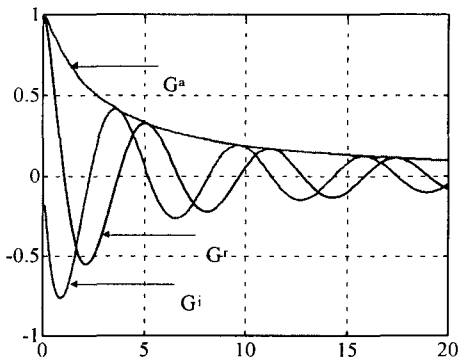


Fig. 1 Gain of bulk temperature along the axial distance. G_a, G_r, G_i : absolute value, real part and imaginary part of transfer function G in Eq. (5) respectively.

면 Fig. 1과 Fig. 2와 같다.

순수한 데드타임 모델의 경우에는 이득이 항상 "1"이나, 본 문제의 경우 축방향의 거리에 따라 매우 심하게 변한다는 것을 알 수 있다. 위상지연은 거리에 따라 거의 선형적으로 증가하나, 초기지점에서는 약간 빠르게 증가한다. 하지만 통상 관심이 되는 180°의 위상지연이 발생하는 지점 ($z^*=2.32$)에서의 이득은 0.54로 데드타임 모델 경우의 값인 1보다는 매우 많은 차이를 보인다. 즉, 한 지점에서의 온도변화가 강제대류를 통해 다른 지점으로 전달될 때, 확산이 없는 경우라 할 지라도, 온도변화는 심한 감쇠를 가진다는 것이다.

길이가 주파수와 유속으로 무차원화되어 있으므로, 이 결과는 주파수와 유속과는 상관없이 위상지연이 180°가 되는 경우의 이득은 0.54로 변하지 않음을 의미하고 다만 축방향의 위치나 무차원 주파수가 변할 따름이다. 다시 말하면, 식(3)으로부터 $z^* = \Omega(z/r_o) = 2.32$ 이며, 위상지연이 180°가 되는 무차원 임계주파수는 $\Omega_{crit} = 2.32(r_o/z)$ 로, 축방향거리에 반비례한다. Fig. 3에서 "A"는 여기서 해석한 온도의 위상지연이고, "B"는 평균 속도를 가지고 계산한 유동, 즉 데드타임 모델에서의 위상지연이다. 이 2개의 값은 초기치를 제외하고는 심하게 달라지고, 주어진 z^* 에서 위상지연은 데드타임 모델의 경우가 훨씬 더 크다. 이는 데드타임 모델의 경우 평균 속도를 신호가 가는 속도로 사용하였기 때문이다.

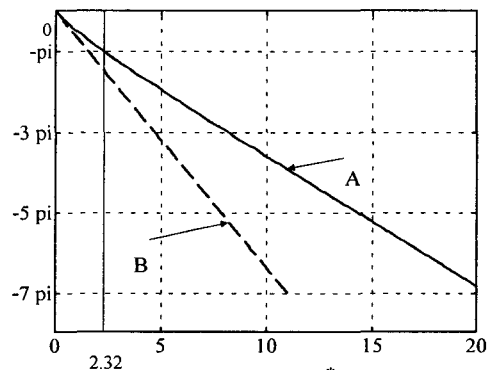


Fig. 2 The phase lag of bulk temperature along the axial distance. A: current model; B: dead-time model.

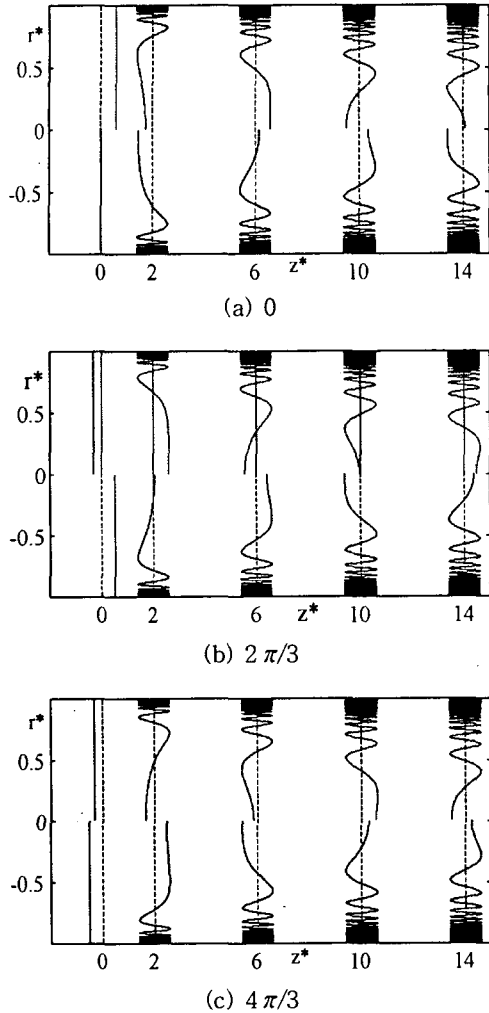


Fig. 3 Distribution of complex temperature function along the radius at various axial locations $z^*=2, 6, 10, 14$, when phases of initial location are (a) 0, (b) $2\pi/3$, (c) $4\pi/3$ respectively.

온도는 유체입자에 고정되어서 변하지 않으나, 속도분포가 달라 정해진 축방향 지점에서의 온도 분포는 반경반향을 따라 심하게 변할 수 있다. 온도에 대한 전달함수를 고려할 때, 정해진 축방향 지점에서 총괄온도를 고려하므로 반경반향을 따라 온도분포는 상쇄되어 전체적인 온도 평균값인 총괄온도값의 이득이 줄어들게 된다. 이를 자세히 관찰하기 위해, $z^*=0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$ 에서 반경반향의 온도분포를 살펴보았다. 각 지점에서의

온도는 시간에 대한 삼각함수로 항상 변하고 있고, 어떤 특정한 순간에 몇 지점에서의 온도분포를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3의 (a), (b), (c)는 각각 시작점, 즉 $z^*=0$ 에서 위상이 0, $2\pi/3, 4\pi/3$ 되는 경우에 $z^*=2, 6, 10, 14$ 에 대해 복소 온도 분포를 보여주고 있다. $r>0$ 지역에서는 온도분포의 실수부를 $r<0$ 지역에서는 온도분포의 허수부를 보여주고 있다. 균일한 분포를 가지는 시작점을 제외하고, 벽 근처에서의 온도변화는 매우 작은 파장을 가지고 변함을 보여준다. 이런 온도변화는 총괄온도를 계산할 때 상쇄되므로, 당연히 이득이 줄어들 것이 예상된다. 이런 온도변화는 후류로 갈수록 심하게 나타나며, 이는 속도가 작은 벽 부근부터 나타나기 시작하여 점차 중심부로 내려감을 알 수 있다.

축방향의 거리가 주어진 경우에 보드 다이어그램(Bode diagram)은 Fig. 2와 Fig. 3을 로그그래

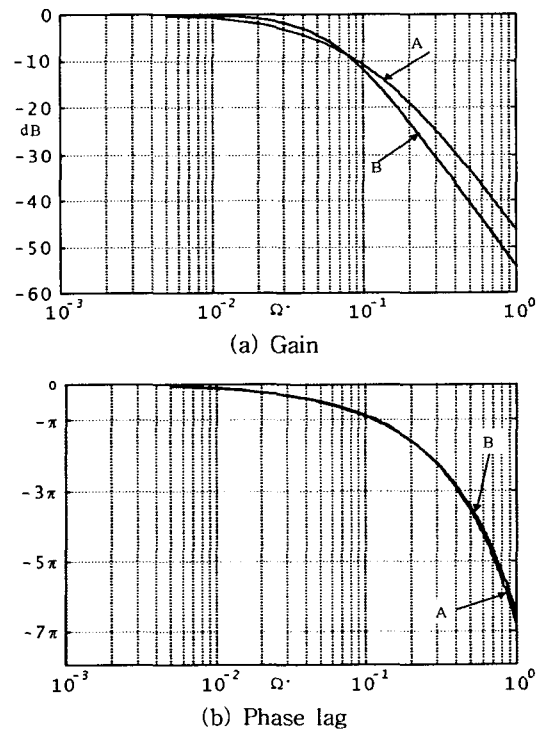


Fig. 4 Bode diagrams of transfer function G (case A) and its approximation $G_{app} = \{ \exp(-19s) \} / (1 + 15s)$ (case B) at $z^* = 10D$ downstream.

프로 나타내면 된다. 단지 무차원화된 축방향거리와 각속도는 다음과 같이 표시될 수 있다는 것에만 유의한다(즉, $\Omega = z^*/z^{**}$, 여기서 $z^{**} = z/r_o$). 만약 $z^{**} = 20$, 즉 $10D$ 후류에서의 보드 다이어그램은 Fig. 4와 같이 표시될 수 있고, 순수 데드타임 모델이라기보다는 순수 데드타임과 1차 시간지연 모델의 곱으로 어느 정도는 근사할 수 있다는 것을 알 수 있다(Fig. 4에서 보다시피 위상지연은 잘 근사되지만, 이득은 잘 근사되지 않음을 알 수 있다).

2.2 확산이 있는 경우

확산이 있는 경우에는 앞 절에서 설명한 이득의 감소원인 외에 확산에 의한 이득의 감소가 추가되므로 이득은 더욱더 작게 된다. 온도에 관한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

여기서 축방향의 확산은 반경방향의 확산보다 작다고 가정하고, 다음과 같은 무차원변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{r_o}, & t^* &= \omega_o t \\ z^* &= \frac{\omega_o}{U_o} z, & u^* &= \frac{u}{U_o} \\ T^* &= \frac{T}{T_o}, & \Lambda &= \frac{\omega_o r_o^2}{\alpha} = \text{Pe} \Omega \\ z^{**} &= \frac{z}{r_o}, & \Omega &= \frac{\omega_o r_o}{U_o}, & \text{Pe} &= \frac{U_o r_o}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{\Lambda} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \Omega^2 \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] \quad (6)$$

위의 식에서 $\Omega \ll 1$ 이면 $(\partial^2 T^*)/(\partial z^{*2})$ 은 무시될 수 있고, 한 개의 푸리에 성분만을(즉, $T^* = \widehat{T} \exp(i\omega t)$) 고려하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$i \widehat{T} + (1 - r^{*2}) \frac{\partial \widehat{T}}{\partial z^*} = \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \widehat{T}}{\partial r^*} \right) \quad (7)$$

이 식은 원래의 식인 (6)이 타원형인 것과는 달리 포물선형으로 z^* 방향을 시간축인 것처럼 적분할 수 있다. 따라서 출구조건에 대한 고려 없이 전달함수를 계산할 수 있다. r^* 방향의 미분을 계산하기 위해 Lele⁽⁵⁾의 스펙트럴 특성을 갖는 4차 유한차분법을 사용하였고, 계산속도를 빠르게 하기 위해 5개의 폭을 가지는 밴드시스템(pentadiagonal system) 대신 3개의 폭을 가지는 밴드시스템(tridiagonal system)을 사용하였다. z^* 방향의 적분을 위해 IMSL의 DIVMRK를 사용하였다.⁽⁷⁾ 이 방법은 수치적인 안정성과 정확도를 자체 내에서 계산하기 때문에 확산에 의한 수치적 계산한계와 대류에 의한 수치적 한계를 고려할 필요가 없다는 장점이 있다. 다만 Λ 가 작아질수록 확산에 의한 수치적 안정성의 한계 때문에, 계산시간이 늘어나는 단점이 있었으나, 충분한 계산시간을 부여함으로써 극복하였다. 경계조건은 중심축에 대칭조건을 부여하였고, 벽면에는 단열조건을 부여하였고, 초기조건은 균일한 온도조건을 다음과 같이 부여하였다.

$$\begin{aligned} \widehat{T} &= 1 & @ z^* &= 0 \\ \frac{\partial \widehat{T}}{\partial r^*} &= 0 & @ r^* &= 0 \text{ and } 1 \end{aligned} \quad (8)$$

확산이 없는 경우와는 달리, 식(7)의 해는 무차원 확산계수 Λ 에 관련되어 있고, 따라서 많은 경우의 Λ 에 대해 풀어야 한다. 이렇게 구한 식(7)의 해는 z^* 와 Λ 에 대한 함수이므로, 전달함수 G 도 z^* 와 Λ 에 대한 함수이다.

$$G = G(z^*, \Lambda) \quad (9)$$

식(9)는 확산이 있는 경우의 전달함수 해석의 전부이지만 닫힌 형태로 표시할 수 없으므로, $0.1 \sim 10^4$ 까지의 약 70개의 Λ 값에 대해 식(7)의 해를 구한 다음 식(9)를 Fig. 5에 표시하였다.

Fig. 5(a)에서 표시된 바와 같이 주어진 Λ 값에서 x^* 가 커지면 이득값은 감소한다. 하지만 주어진 x^* 값에서 Λ 의 변화에 따른 이득의 변화는 약간 복잡하다. 주어진 x^* 에서(예를 들어 $x^* = 1$) Λ 값이 증가할 때 이득은 증가하나 일정한 값을 지

나면 다시 감소한다. 어느 정도 감소하고 나면 계속해서 Λ 값이 증가하더라도 이득이 증가하지 않는다(Fig. 5(b) 참조). 즉, 주어진 z^* 에서 이득을 최소로 만드는 Λ 가 있다. 원래 전달함수는 세 개의 무차원수 z^* , Pe , Ω 의 함수로 표시되어야 하나, 시스템의 특성상 한 개의 무차원수는 없어지고 두 개의 무차원수로 표시된 것이므로, 이를 이해할 때에는 주의해야 한다. 보다 정확한 이해를 위해, 주어진 z^* 와 Pe 에서 Ω 가 변화함에 따른 보드 다이어그램을 고려해 보기로 하자. 주어

진 z^* 와 Pe 에서 Pe/z^* 가 일정하므로 따라서 Λ/z^* 도 일정하고, 이것은 Fig. 5에서 보여준 것과 같은 log-log 영역에서 기울기가 "1"인 직선으로 표시된다. 이 직선을 따라서 Ω 는 증가하므로, 보드 다이어그램을 그리기 위해서는 Fig. 5에서 직선을 따라서 주어진 무차원 주파수에서의 전달함수의 이득과 위상지연의 등고선 상에서의 값을 구하여, 주파수와 전달함수의 그래프를 그림으로서 알 수 있다.

축방향의 거리와 무차원 주파수가 주어진 경우

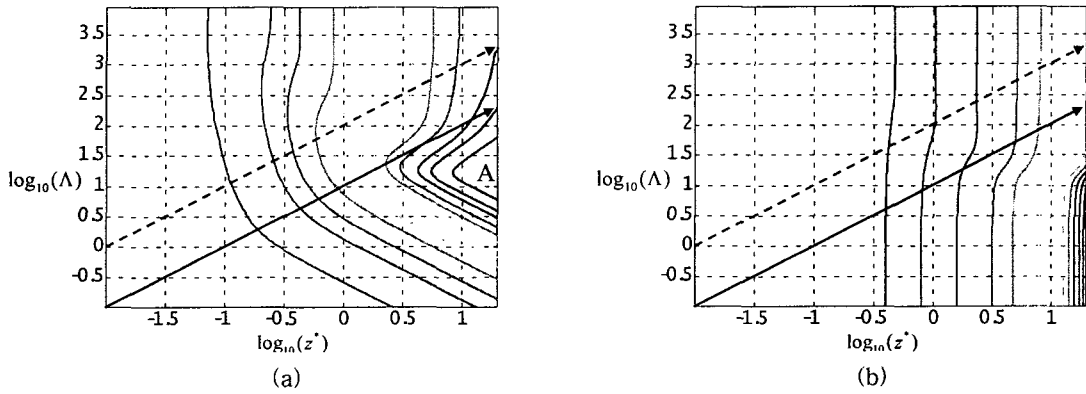


Fig. 5 Contour lines of (a) gain and (b) phase lag of bulk temperature at various dimensionless axial distance z^* and diffusion number Λ . Solid and dotted straight lines represent lines of $\Lambda/z^*=10$ and $\Lambda/z^*=100$ respectively; (a) contour values run from 0.99, 0.95, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01; (b) contour values run from $-45, -90, -180, -360, -540, -720, -900, -1080, -1260, -1440$ degrees.

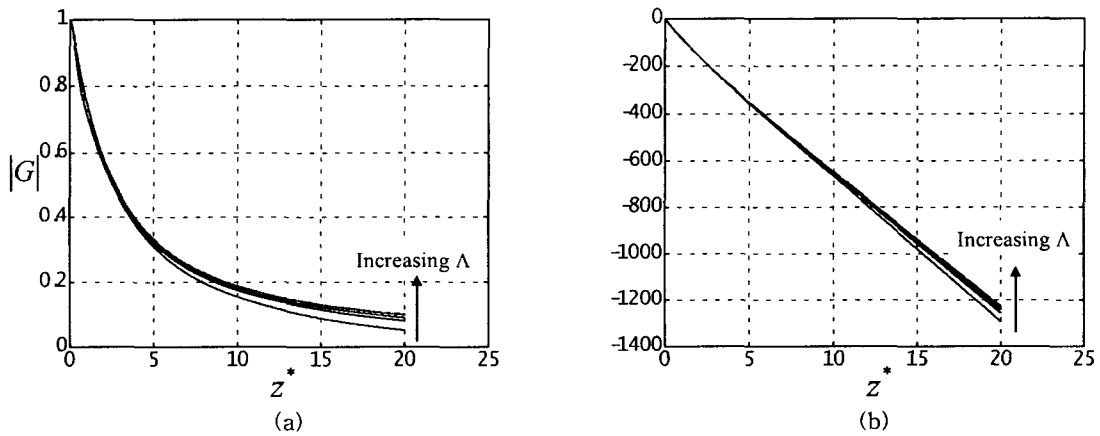


Fig. 6 (a) Gain and (b) phase lag of bulk temperature along nondimensionalized axial distance for several Λ ($\Lambda=200, 500, 1000, 10000, \infty$) and inviscid case. Curves for $\Lambda=10000$ and ∞ are indiscernible.

는 z^* 가 고정된 경우, 즉 Fig. 5에서 종축과 평행한 직선상에 있는 것이 되고, 이 직선을 따라 위로 올라가는 경우, 무차원수 Pe 가 커지게 된다. Fig. 5(a)의 "A"를 이런 직선이 지나는 경우, 이득의 값을 최소로 만드는 Pe 값이 존재한다. 하지만 공진이 주파수의 변화에 따라 발생하는 것으로, 공진과는 분명히 다른 것으로 이해되어야 할 것이다. 원래 피클레수는 대류시간과 확산시간과의 비로 생각할 수 있으므로, 이는 확산시간과 온도변화주기와와의 비가 어느 정도 매칭이 이루어졌을 때 감쇠가 최대가 됨을 의미한다.

Λ 가 매우 클 때에는 모든 축방향거리에서의 전달함수가 확산이 없는 경우와 근사해야 하므로, 이를 검증해 보았다. 즉, 수치적으로 계산된 $\Lambda=200, 500, 1000, 10000$ 의 경우와 확산이 없는 경우(즉, $\Lambda=\infty$) 완전해 식(5)에 의해 구해진 이득과 위상지연을 Fig. 6에서 비교하였다.

그림에서 보인 바와 같이 Λ 값이 커질수록 확산이 없는 경우에 접근하여 가며, Λ 가 10000인 경우에는 확산이 없는 경우와의 차이가 적어도 그림 상에서는 나타나지 않았다. 그림에는 보여주고 있지 않지만, 확산이 없는 경우에 Fig. 3에서 보여준 바와 같은 벽 근처에서의 심한 온도변화는 확산에 의해 없어지고 있으나 벽에서 멀리 떨어진 곳에서의 온도는 확산이 없는 경우와 거의 일치하고 있었다.

3. 결론 및 향후계획

완전 발달한 포와셀 유동에서의 전달함수 해석으로부터 전통적으로 사용되었던 데드타임 모델은 다음과 같은 점에서 실제와의 많은 차이를 가진다는 것을 보여주었다. 확산이 없는 경우에는 완전해를 얻을 수 있었다. 확산이 있는 경우, 수치적으로 계산한 값이 확산이 줄어들 때, 확산이 없는 완전해에 근사함을 보여주었다.

향후에는 포와셀 유동이 아닌 난류 유동에서의 전달함수 해석을 통해 보다 현실적인 모델을 제공할 계획이다.

(1) 데드타임 모델은 후류로 가는 길이가 아무리 길더라도 온도변화의 감쇠는 없으나, 확산이

없는 경우에서도 감쇠는 발생하며, 감쇠되는 양은 주파수에 따라 다르나, 별로 크지 않은 후류($\sim 10D$)에서도 이득이 불과 0.5 정도로 줄어드는 경우가 있었다.

(2) 확산이 없는 경우에서의 위상지연은 데드타임 모델에서의 평균 속도로 계산된 위상지연보다 느리게 위상지연이 발생하며, 따라서 위상각이 180° 가 되는 z^* 값이 데드타임 모델에서 $\pi/2$ 인 반면, 현재의 모델에서는 2.32로 많은 차이를 보여주고 있다.

(3) 확산이 있는 경우, 물리적으로 3개의 무차원수 즉 피클레수, 무차원 주파수, 반경으로 무차원화된 거리의 함수로 표시될 수 있으나, 식의 특성상 2개만의 무차원수 (z^*, Λ)의 함수로 표시될 수 있었다.

(4) 확산이 있는 경우에는, 주어진 피클레수와 반경으로 무차원화된 축방향거리에서, 무차원 주파수가 늘어날수록 이득의 값은 줄어들고, 위상값은 늘어났다.

(5) 확산이 있는 경우에는, 반경으로 무차원화된 축방향거리와 무차원 주파수가 주어졌을 때, 감쇠가 가장 큰 피클레수가 존재한다.

참고문헌

1. Shinskey, F. G., 1996, Process Control Systems, 4th ed., McGraw-Hill.
2. Marlin, T. E., 1995, Process Control, McGraw-Hill.
3. Stephanopoulos, G., 1984, Chemical Process Control An Introduction to Theory and Practice, Prentice Hall.
4. Courant, R. and Hilbert, D., 1962, Methods of Mathematical Physics, Vol. 2, Interscience.
5. Lele, S. K., 1992, Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution, J. Computational Physics, Vol. 103, No. 1, pp. 16-32.
6. Wolfram, S., 1999, The Mathematica Book, Cambridge Univ. Press.
7. IMSL, 1991, IMSL MATH/LIBRARY User's Manual Version 2.0 IMSL Houston.