

# 손실함수를 이용한 다변량 공정능력지수에 관한 연구<sup>†</sup>

문혜진 · 정영배

인천대학교 산업공학과

## A Study on Multivariate Process Capability Index using Quality Loss Function

Hye-Jin Mun · Young-Bae Chung

Dept. of Industrial Engineering, University of Incheon

Process capability indices are widely used in industries and quality assurance system. In past years, process capability analysis have been used to characterize process performance on the basis of univariate quality characteristics. However, in actual manufacturing industrial, statistical process control (SPC) often entails characterizing or assessing processes or products based on more than one engineering specification or quality characteristic. Therefore, the analysis have to be required a multivariate statistical technique.

This paper introduces to multivariate capability indices and then selects a multivariate process capability index incorporated both the process variation and the process deviation from target among these indices under the multivariate normal distribution. We propose a new multivariate capability index  $MC_{pm}^+$  using quality loss function instead of the process variation and this index is compared with the proposed indices when quality characteristics are independent and dependent of each other.

**Keywords** : multivariate normal distribution, multivariate process capability index, loss function

### 1. 서론

대부분의 생산현장에서 제품의 개발 및 제조단계에서 공정의 품질변동을 측정하고 규격과 비교하여 변동의 폭을 감소시키기 위한 제반 통계적 공정관리(SPC) 방법들을 이용하고 있다. 더욱이 최근의 품질에 대한 평가의 관점은 품질특성치의 규격에 대한 적합 여부보다는 규격을 만족하는 제품 중에서도 가능한 한 가장 이상적인 품질특성치인 목표치에 높은 적합도를 갖는 제품에 두고 있다. 따라서 제품의 품질을 향상시키기 위해서는 규격 내에서의 산포의 감소와 더불어 목표치에 가

까운 균질의 제품이 되도록 지속적인 노력이 요구된다고 할 수 있다[3].

공정에서 품질을 평가하는 방법으로는 불량률, 공정능력지수, 기대손실이 있다. 불량률은 제품의 품질특성이 규격을 벗어난 제품의 비율을 나타내는 척도이나 규격내에서의 분포의 모양이나 상태에 대한 정보는 제공하지 못한다. 공정능력지수는 규격에 대한 산포의 크기로 공정을 평가하는 단위에 무관하고 비교기준이 명확한 척도이다. 그러나 전통적인 공정능력지수  $C_p$ 와  $C_{pk}$ 는 품질특성치가 목표치에 얼마나 접근하고 있는가를 알 수 없으며 단지 품질의 산포만으로 공정능력을 평가하

<sup>†</sup> 본 연구는 2001년도 인천대학교 교내 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

기 때문에 소비자의 손실척도면에서 평가하기가 어렵고 목표치와 공정평균이 일치하지 않을 경우에는 많은 문제점이 따른다. 기대손실은 목표치로부터의 품질특성치의 변동으로 인한 손실의 기대값을 사용함으로써, 목표치로부터의 기대손실로서 공정을 평가하는 현재의 품질 개념에 적합한 공정평가척도이기는 하나 의사결정에 따른 비교기준이 명확하지 않기 때문에 목표치로부터의 품질 변동을 평가하여 고객의 요구를 반영하면서 단위에 무관하고 비교기준도 명확한 척도가 요구된다. 이러한 요구에 따라 품질을 합리적으로 평가하기 위해서 Taguchi의 이차손실함수를 적용한 공정능력지수로서 Chan, Cheng과 Spiring은  $C_{pm}$ 을 제시하였다[7][11]. 그리고 최근에는 공정의 산포에 의해서 공정능력을 평가하기보다는 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적 손실(비용적 측면)까지도 고려하여 보다 유용한 정보를 많이 제공할 수 있는 공정평가척도들이 대두되고 있으며 그 응용분야를 확장시키고 있다.

하지만 지금까지도 폭넓게 쓰이고 있는 대다수의 공정능력지수들은 1개의 변량(단변량)에 대한 통계적 공정관리(SPC)나 공정평가의 척도들이다. 이에 반해 최근에 공정들은 공정의 자동화 등으로 인해 실시간의 데이터가 증가하고 그로 인해 관리해야 할 변수(품질특성치)들 또한 증가하게 되었다. 특히 품질특성치가 계측기에 의해 자동적으로 측정되는 경우 측정치간의 시간간격이 짧아지면서 이들간에는 서로 종속적인 관계가 성립된다는 것이다. 그리고 많은 양의 서로 상관된 데이터들을 동시에 분석해야 한다는 어려움을 지니고 있다[5].

이렇듯 단변량이기보다는 2개 이상의 특성치를 가지는

다변량의 공정이 많아지고 이들은 서로 독립적이기보다는 여러 품질특성치간에 상관관계를 가지는 종속적인 경우가 많지만 지금까지 대개의 연구들이 특성치간의 상관관계를 무시하고 서로 독립이라는 가정하에 적용되어 왔기 때문에 현장과의 차이가 발생하게 된다는 것이다. 결국 기존의 단변량 SPC방법으로는 다변량의 문제를 해결하기엔 한계가 있으며 이에 따라 단변량 모형을 확장시킨 다변량의 모형에 대한 필요성이 부각되고 있다.

본 연구에서는 다변량 정규분포하에서 기존의 다변량 모형 가운데 산포 뿐만 아니라 목표치를 고려한 다변량 공정능력지수를 선택하여 이를 손실함수와 연계시켜 목표치로부터 품질 변동에 따른 손실을 고려한 새로운 다변량 공정능력지수 모형을 개발하고자 한다. 또한 품질특성치들이 서로 독립일 때만을 고려한 기존의 단변량 공정능력지수와 특성치간의 상관관계를 고려한 다변량 공정능력지수들을 비교하고 더 나아가 상관관계의 변화에 따른 다변량 공정능력지수들을 비교·고찰하고자 한다

## 2. 공정평가척도에 관한 이론적 고찰

### 2.1 공정능력지수

#### 1) 단변량 공정능력지수

공정능력지수  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$ ,  $C_{pmk}$  등은 모두 공정의 산포를 근거로 공정능력을 평가하는 척도이지만 Taguchi의

<표 1> 단변량의 공정능력지수

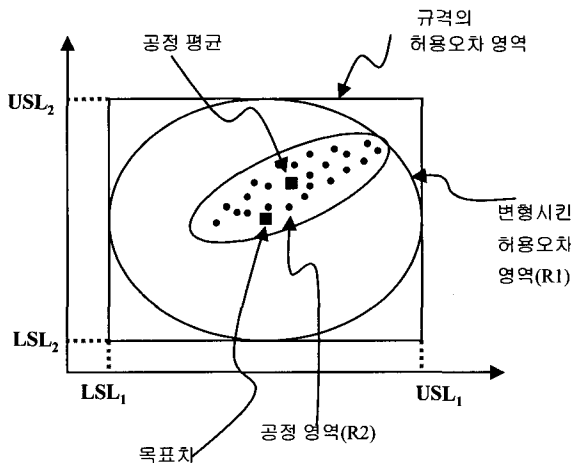
구분	기호	공정능력지수의 모형	비고
산포에 의한 공정평가	$C_p$	$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{T}{6\sigma}$	규격의 폭과 공정의 산포간의 평가방법 : Kane(1986)
	$C_{pk}$	$C_{pk} = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right) = (1-K)C_p$	공정평균의 치우침을 고려한 평가방법 : Kane(1986)
	$C_{pm}$	$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sigma'} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{[\sigma^2 + (\mu - T)^2]}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}$	목표치로부터 공정의 평균을 고려한 평가방법 : Chan, Cheng, Spiring(1988)
	$C_{pmk}$	$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{[\sigma^2 + (\mu - T)^2]}} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}$	목표치와 공정의 치우침을 동시에 고려한 평가방법 : Pearn, Kotz, Johnson(1992)
기대손실에 의한 공정평가	$C_{pm}^+$	$C_{pm}^+ = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E(L)}}$	이차손실함수의 기대손실을 이용한 평가방법: Bolyes(1991)
	$C_{pE}$	$C_{pE} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{ETL}}$	기대손실의 비용요인을 적용한 현실적 평가방법 : 정영배(1995)

이차손실함수의 기대손실에 근거한 공정능력지수로서  $C_{pm}$ 와  $C_{pk}$ 가 제안되었다. <표 1>은 단변량에서 공정능력을 평가하는 구분에 따라 공정능력지수들의 모형을 정리한 것이다[1][2][7].

2) 다변량 공정능력지수

Wang, Hubele, Lawrence, Miskulin, Shahriari에 의해 비교 연구된 것을 토대로 다변량 공정능력지수의 모형들 가운데 본 연구목적에 따라 다변량의 조건하에서 손실함수에 잘 근사하는  $MC_{pm}$ 을 선택하여 응용하고자 한다[14].

다변량 공정능력지수(Multivariate Capability Index)  $MC_{pm}$ 은 Taam, Subbaiah, Liddy에 의해 제안된 다변량 공정능력지수로서, 단변량의  $C_{pm}$ 을 벡터량으로 확장한 개념이며 목표치를 고려한 다변량 공정능력지수이다[13].



<그림 1>  $MC_{pm}$ 에서의 변형시킨 규격의 허용오차 영역

<그림 1>을 보면, 안쪽의 작은 타원형( $R_2$ )은 공정의 데이터가 이변량 정규분포(bivariate normal distribution)를 따를 경우 신뢰구간 99.73%내에 있을 공정분포의 영역(process region)을 의미하고 바깥쪽의 사각형은 규격한계를 나타내는 규격의 허용오차 영역(engineering tolerance region)을 나타낸다. 이 원래의 규격 허용오차 영역 내에 존재하면서 목표치를 중심으로 한 최대의 타원형 면적( $R_1$ )이 변형시킨 허용오차 영역(modified tolerance region)이다.

따라서  $MC_{pm}$ 는 일반적으로 다음 두 영역의 비율로서 나타낸다.

$$MC_{pm} = \frac{R_1 \text{의 면적 또는 부피}}{R_2 \text{의 면적 또는 부피}} = \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{\text{공정영역의 면적 또는 부피}} \quad (1)$$

공정이 다변량 정규분포(multivariate normal distribution)를 따른다면 위의 식(1)에서 분모의  $R_2$  면적은 이차식  $(x-\mu)' \Sigma_T^{-1} (x-\mu) \leq K(m)$ 에 의해 타원형의 형상을 띠게 된다. 따라서  $MC_{pm}$ 은 식(2)과 같이 표현된다.

$$MC_{pm} = \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{((X-\mu)' \Sigma_T^{-1} (X-\mu) \leq K(m)) \text{의 면적 또는 부피}} = \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{-\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{m}{2}} [\Gamma(\frac{m}{2} + 1)]^{-1}} = \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{-\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{m}{2}} [\Gamma(\frac{m}{2} + 1)]^{-1} [1 + (\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

여기서  $m$ 은 특성치의 수이고,  $\Sigma_T$ 는 평균제곱오차 매트릭스,  $\Sigma$ 는 분산-공분산 매트릭스,  $\Gamma(a)$ 는 감마분포를 의미하며  $K(m)$ 은 “ $6\sigma$ ”의 개념으로  $\chi^2(m, 0.9973)$ 의 값을 말한다. 이때  $MC_{pm}=1$ 이면 공정의 평균과 목표치가 일치함을 의미하며 1보다 크거나 같으면 공정능력이 양호하다고 평가할 수 있다.

2.2 손실함수

1) 단변량 이차손실함수

Taguchi의 품질에 대한 정의는 생산자 입장과 소비자 입장의 어느 한쪽 편이 아닌 제품의 사회적 손실개념으로 정의하였다. 즉 사회적 손실의 개념은 원하는 품질 특성의 제품을 만들지 못함으로 인해 발생하는 손실을 생산자 혹은 소비자의 어느 한쪽이 책임을 져야한다는 개념과는 달리 모두(사회)가 그 책임을 져야하는 현대적 개념이라는 것이다[6]. Taguchi는 품질을 “제품이 출하되어 사용되어질 때 성능특성치의 변동으로 인하여 사회에 끼치는 유·무형의 총손실이며 다만 기능 그 자체에 따른 손실은 제외된다” 라고 정의하고 있다. 여기서 손실이란 제품이 완전하지 못함으로써 발생하는 낭비, 비용, 잠재적인 손해 등을 말한다. Taguchi의 손실함수 개념은 성능특성치가 목표치와 일치할 때는 손실이 발생하지 않으며 목표치로부터 멀어짐에 따라 손실이 크게 발생한다는 가정에서 이차식으로 근사화한 손실함수(loss function)  $L(x)$ 로 나타내며 그 기대치를  $E[L(x)]$ 로 나타낸다[10].

즉, 특성치를  $x$ , 목표치를  $T$ 라 놓고  $x = T$  일 때 Taylor 전개에 의한 손실함수  $L(x)$ 를 표현하면,

$$L(x) = L(T) + L'(T)(x-T) + \frac{L''(T)}{2}(x-T)^2 + \Delta \quad (3)$$

<표 2> 특성치에 따른 손실함수와 기대손실

품질특성	손실함수 $L(x)$	기대손실 $E[L(x)]$	비고
망목특성	$L(x) = k(x-t)^2$	$E[L(x)] = E[k(x-T)^2] = k[\sigma^2 + (\mu - T)^2]$	이때 $k = \frac{A}{\Delta^2}$ 이다.
망소특성	$L(x) = kx^2$	$E[L(x)] = E[kx^2] = k(\sigma^2 + \mu^2)$	
망대특성	$L(x) = k\left(\frac{1}{x^2}\right)$	$E[L(x)] = E\left[\frac{k}{x^2}\right] = k\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{3\sigma^2}{\mu^2} + 1\right)\right]$	

이 된다. 이때 망목특성치의 경우는 식(3)에서 2차항까지만을 포함시켜 근사화한 것이 손실함수이며 이 이차 손실함수의 기대치를 구하여 기대손실을 구한다. 망소특성치의 경우에는 망목특성치의 목표치 T를 0(zero)으로 치환한 개념이며, 망대특성치는 특성치  $x$ 를  $x' = 1/x$ 로 변환하여  $x'$ 를 망소특성치의 경우처럼 분석하여 손실함수와 기대손실을 구한다.

따라서 Taguchi의 품질특성치에 따른 손실함수  $L(x)$ 와 기대손실  $E[L(x)]$ 를 정리하면 다음의 <표 2>와 같다[4].

2) 다변량 손실함수

다변량 모형은 단변량의 이차손실함수를 확장하여 다변량의 손실함수를 유도한 것이다. 다변량일 경우에는 특성치의 수가 2개 이상이므로 특성치와 목표치 모두는 벡터(vector)량이 될 것이다. 특성치의 수가  $m$ 개이고 특성치를  $X$ , 목표치를  $T$ 라고 하면,  $X=T$ 일 때 Taylor 전개에 의한 다변량 손실함수  $L(X, T)$ 는 다음과 같다[12].

$$L(X, T) = L(T, T) + L'(T, T)(X - T) + \frac{1}{2}(X - T)^T L''(T, T)(X - T) + \Lambda \quad (4)$$

식(4)에서 2차항까지만을 포함시켜 손실함수를 근사화시키면

$$L(X, T) = \frac{1}{2}(X - T)^T H_L(T)(X - T) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i k_{ij}(X_i - T_i)(X_j - T_j) \quad (5)$$

이 된다. 이때  $H_L(T)$ 은 손실함수  $L(X, T)$ 를 위한 Hessian 행렬이고,  $k_i$ 는 품질특성치  $i$ 와 관련된 손실계수를 의미하는 것이고  $k_{ij}$ 는 품질특성치  $i$ 와  $j$ 에 관련된 손실계수를 의미한다.

이때  $k_{ii} = k_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial X_i^2} \right)_{X_i=T_i, i=1, \Lambda, m}$  이고,  
 $k_{ij} = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial X_i \partial X_j} \right)_{X_i=T_i, X_j=T_j, i \neq j=1, \Lambda, m}$  이다.

따라서 손실함수 식(5)의 기대손실  $E[L(X, T)]$ 를 구하면

$$E[L(X, T)] = E \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i k_{ij}(X_i - T_i)(X_j - T_j) \right] = E \left[ \sum_{i=1}^m k_i(X_i - T_i)^2 \right] + E \left[ \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}(X_i - T_i)(X_j - T_j) \right] \quad (6)$$

이 된다. 식(6)을 평균( $\mu$ )과 분산( $\sigma^2$ )으로 각각 나타내면 식(7)과 같다.

$$E[L(X, T)] = \sum_{i=1}^m k_i[(\mu_i - T_i)^2 + \sigma_i^2] + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}[\sigma_{ij} + (\mu_i - T_i)(\mu_j - T_j)] \quad (7)$$

만약  $X_i$ 와  $X_j$ 가 서로 독립이면 식(7)에서 공분산  $\sigma_{ij}$ 의 값이 0(zero)가 되므로 모든  $i \neq j$ 에 대한 기대손실은 식(8)과 같다.

$$E[L(X, T)] = \sum_{i=1}^m k_i[(\mu_i - T_i)^2 + \sigma_i^2] + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}(\mu_i - T_i)(\mu_j - T_j) \quad (8)$$

또한 모든  $i$ 에 대하여  $\mu_i = T_i$ 인 경우에는 식(9)와 같다.

$$E[L(X, T)] = \sum_{i=1}^m k_i \sigma_i^2 \quad (9)$$

3. 손실함수를 이용한 다변량 공정평가척도 모형

3.1 연구의 범위와 가정

- (1) 품질특성치는 망목특성이며 연속적인 값을 가진다.
- (2) 공정의 데이터는 다변량 정규분포(multivariate normal distribution)를 따른다.
- (3) 품질특성치간의 관계가 독립일 때와 종속일 때를 모두 고려한다.

### 3.2 다변량 공정능력지수 $MC_{pm}^+$ 모형의 개발

손실함수를 이용한 다변량 공정능력지수의 모형은 단변량의  $C_{pm}$ 을 벡터로 확장시킨 다변량 공정능력지수인  $MC_{pm}$ 에 공정의 산포 대신 손실함수의 기대치를 이용함으로써 비용적 측면이 반영된 보다 경제적 척도인 새로운 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}^+$ 을 개발하고자 한다.

단변량의 경우  $C_{pm}$ 은 제곱오차 손실(squared error loss)의 개념을 적용시켜 목표치로부터 멀어질수록 특성치에 대한 손실이 대칭적 제곱오차의 손실함수, 즉 이차 손실함수에 따라 발생한다는 것에 잘 근사하기 때문에 산포 대신 손실함수의 기대손실을 이용하여 제안된 공정능력지수가  $C_{pm}^+$ 이다. 즉 Boyles는 단변량의  $C_{pm}$ 으로부터 Taguchi의 이차손실함수의 기대손실을 이용한 공정능력지수를  $C_{pm}^+$ 라고 정의하고 식(10)과 같이 제안하였다[2][9].

$$C_{pm}^+ = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(x)]}} \quad (10)$$

여기서 망목특성일 때의 기대손실은 다음의 식(11)과 같다.

$$E[L(x)] = k[\sigma^2 + (\mu - T)^2] \quad (11)$$

다음 <표 3>에서와 같이  $C_{pm}$ 과  $C_{pm}^+$ 을 비교하면 두 식이 잘 근사한다는 것을 알 수 있다.

<표 3>  $C_{pm}$ 과  $C_{pm}^+$ 의 비교

산포에 의한 공정평가척도	기대손실에 의한 공정평가척도
$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sigma'}$ $= \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[(x-T)^2]}}$ $= \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$	$C_{pm}^+ = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(x)]}}$ $= \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[k(x-T)^2]}}$ $= \frac{USL - LSL}{6\sqrt{k[\sigma^2 + (\mu - T)^2]}}$

따라서 손실함수를 이용한 다변량 공정평가척도에 대한 모델링은 단변량의  $C_{pm}^+$ 에서 산포 대신 기대손실을 이용했듯이 다변량의 모형에 있어도 단변량의  $C_{pm}$ 에서와 같이 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}$ 에서 목표치로부터 멀어질수록 특성치에 대한 손실이 다변량 손실함수에 잘 근사함을 보임으로써 산포 대신 손실함수를 이용한 새로운 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}^+$  모형을 도출할 수 있을 것이다.

우선 단변량  $C_{pm}$ 과 가장 유사한 개념을 가진 다변량 공정능력지수가 바로  $MC_{pm}$ 이라는 것이다. 즉  $MC_{pm}$ 은  $C_{pm}$ 과 동일하게 공정의 분산과 목표치로부터의 편차로 구성되어 있으며 단지 다른 점이 있다면 변수의 수에

따른 기하학적인 의미의 분포형태와 통계량의 구조가 벡터량이라는 것뿐이다. 다음의 식(12)와 식(13)에서 공정능력지수의 함수를 구성하고 있는 식의 구조를 대조해 보면 쉽게 이해할 수 있을 것이다. 단변량의  $C_{pm}$ 의 경우는

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

$$= \frac{USL - LSL}{6\sigma} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}}}$$

$$= \frac{C_p}{D} \quad (12)$$

이다. 반면 다변량의  $MC_{pm}$ 은

$$MC_{pm} = \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{((X - \mu) \Sigma_T^{-1} (X - \mu) \leq K(m)) \text{의 면적 또는 부피}}$$

$$= \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{-\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{m}{2}} [\Gamma(\frac{m}{2} + 1)]^{-1}}$$

$$= \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{m}{2}} [\Gamma(\frac{m}{2} + 1)]^{-1}}$$

$$\times \frac{1}{[1 + (\mu - T) \Sigma^{-1} (\mu - T)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{C_p}{D} \quad (13)$$

이다. 여기서의  $C_p$ 는 변형시킨 허용오차 영역과 관련된 분산성(variability)을 나타내고  $D$ 는 목표치로부터 공정평균의 편차를 의미한다.

따라서 단변량  $C_{pm}$ 을 다변량으로 확장한 개념이  $MC_{pm}$ 이라는 결론을 토대로 동일한 구조로 구성된 단변량  $C_{pm}$ 과 다변량  $MC_{pm}$ 에 대한 산포의 식을 비교하고, 이들 산포를 대신하여 이용되는 손실함수 및 기대손실함수의 식을 각각 비교함으로써 그 유사성을 보이고 단변량의  $C_{pm}^+$ 모형과 같이 손실함수를 이용하여 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}^+$ 의 모형을 제시하고자 한다.

#### 1) 산포의 경우

단변량의  $C_{pm}$ 에서 목표치로부터 공정의 특성치의 기대편차제곱(the expected squared deviation)을 의미하는 분산  $\sigma^2$ 과 다변량의  $MC_{pm}$ 에서 평균제곱오차(the mean squared error)의 매트릭스  $\Sigma_T$ 를 비교하여 보면 다음과 같다.

여기서 다변량의  $X_i$ 는  $m$ 개의 품질특성치로 이루어진 벡터이다. 이를 품질특성치  $m$ 에 대한 벡터로 표기하면 다음과 같고 이는 단변량의 경우와 마찬가지로 다변량의 손실함수에 근사한다.

<표 4>  $C_{pm}$ 과  $MC_{pm}$ 에서의 산포에 관한 식의 비교

단변량	다변량
$\sigma'^2 = E[(x-T)^2]$ $= \frac{1}{n} \sum (x_i - T)^2$ $= \sigma^2 + (\mu - T)^2$	$\Sigma_T = E[(x-T)(x-T)']$ $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - T)(x_i - T)'$ $= \Sigma + (\mu - T)(\mu - T)'$

$$\Sigma_T = E[(x-T)(x-T)'] = E \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i (x_i - T_i)(x_j - T_j) \right] \quad (14)$$

$\Sigma_T = |\Sigma| \times [I + (\mu - T)\Sigma^{-1}(\mu - T)]$  일 때 이변량에서의 공분산 ( $\Sigma$ ) 매트릭스와 공분산의 역행렬 ( $\Sigma^{-1}$ )은 각각 다음과 같다.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix} \quad (15)$$

여기서  $\rho$  는 상관계수이고  $\sigma_{ij} = \rho\sigma_i\sigma_j$  이다.

2) 손실함수의 경우

손실함수의 경우에도 Hessian 행렬로 이루어진 손실계수  $k$ 의 구조와 제곱오차 손실이 품질특성치  $m$ 개에 대하여 벡터량으로 확장되었을 뿐 그 구조식은 동일함을 보이고 있다.

<표 5>  $C_{pm}$ 과  $MC_{pm}$ 에서의 손실함수에 관한 식의 비교

단변량	다변량
$L(x) = k(x-T)^2$	$L(x, T) = \frac{1}{2}(x-T)^T H_L(T)(x-T)$ $= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i k_{ij}(x_i - T_i)(x_j - T_j)$

손실계수들은  $H_L(T)$ 의 Hessian 행렬의 구성원소가 되며 이변량일 때 손실계수의 대칭행렬은 다음과 같다.

$$H_L(T) = k = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & \frac{1}{2}k_{12} \\ \frac{1}{2}k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & \frac{1}{2}k_{12} \\ \frac{1}{2}k_{12} & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k_1 & k_{12} \\ k_{12} & 2k_2 \end{vmatrix} \quad (16)$$

여기서  $H_L(T)$ 에 대한 필요조건은  $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ 이고,  $-2\sqrt{k_1 k_2} \leq k_{12} \leq 2\sqrt{k_1 k_2}$  를 만족하여야 한다. 품질손실계수(quality loss coefficient)  $k_1, k_2, k_{12}$ 는 만일 사용자가 특성치들 간의 중요도를 함께 고려하여 이들 상수의 값을 정했다고 하면 상수  $k_1, k_2, k_{12}$ 는 특성치들 간의 단위를 동일한 화폐단위로 일원화하는 역할과

특성치들에 가중치를 부여하는 역할을 한다[8].

3) 기대손실의 경우

손실함수의 기대치로써 단변량에서의 기대손실과 다변량에서의 기대손실의 식을 비교해 보면, 분산과 목표치로부터 품질특성치의 편차의 제곱으로 이루어진 구조가 유사하며 단지 차이점은  $i \neq j$ 일 때의 품질특성치간의 상관관계와 관련된 공분산  $\sigma_{ij}$ 에 영향을 받는다는 것이다.

<표 6>  $C_{pm}$ 과  $MC_{pm}$ 에서의 기대손실에 관한 식의 비교

단변량	다변량
$E[L(x)]$ $= E[k(x-T)^2]$ $= kE[(x-T)^2]$ $= k[\sigma^2 + (\mu - T)^2]$	$E[L(x, T)]$ $= E \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i k_{ij}(x_i - T_i)(x_j - T_j) \right]$ $= E \left[ \sum_{i=1}^m k_i(x_i - T_i)^2 \right]$ $+ E \left[ \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}(x_i - T_i)(x_j - T_j) \right]$ $= \sum_{i=1}^m k_i[(\mu_i - T_i)^2 + \sigma_i^2]$ $+ \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}[\sigma_{ij} + (\mu_i - T_i)(\mu_j - T_j)]$

위의 <표 6>에서 보듯이 변수들간의 상관관계가 있느냐 없느냐에 따라 기대손실의 값에 차이가 있다. 다시 말해서 서로 독립이라면 공분산  $\sigma_{ij}$ 가 0(zero)이며, 서로 상관관계가 성립되면 공분산은 유효할 것이기 때문이다.

이상으로 분산, 손실함수 및 기대손실에 대해 각각의 단변량과 다변량의 구조식을 비교하여 보았다. 여기서 알 수 있듯이 단변량과 다변량의 식의 구성요소는 동일하다. 단지 단변량은 개개의 측정치인데 반해 다변량은 벡터(vector)의 구조라는 것이다.

따라서  $C_{pm}$ 에서  $\sigma'$  대신 Taguchi의 이차손실함수의 기대손실을 이용하여 공정능력지수  $C_{pm}^*$ 를 유도하였듯이 다변량의 경우 역시 산포 대신 기대손실에 의한 공정능력지수 모형을 유도할 수 있다는 결론이다.

산포에 의한 다변량 공정능력지수 모형은

$$MC_{pm} = \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{[(X-\mu)'\Sigma_T^{-1}(X-\mu) \leq K(m)] \text{의 면적 또는 부피}}$$

$$= \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{-\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{m}{2}} \left[ \Gamma(-\frac{m}{2} + 1) \right]^{-1}} \quad (17)$$

으로, 이는 평균제곱오차인  $\Sigma_T$ 에 의해 공정능력을 평가하게 된다.

여기서 평균제곱오차  $\Sigma_T$ 는

$$\Sigma_T = E[(x-T)(x-T)'] = E\left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i (x_i - T_i)(x_j - T_j)\right] \quad (18)$$

이다. 이러한 평균제곱오차  $\Sigma_T$ 는 특성치  $X$ 가 목표치로부터 멀어짐에 따른 손실의 발생이 이차적 함수인 다변량 손실함수에 잘 근사하고 있음을 알 수 있다. 따라서  $MC_{pm}$ 은  $\Sigma_T$ 에 따른 손실의 개념을 도입시키면 다변량 손실함수에 따라 발생한다는 것에 잘 근사한다는 결론을 얻을 수 있다.

즉, 다변량의 손실함수는

$$L(x, T) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i k_{ij} (x_i - T_i)(x_j - T_j) \quad (19)$$

이고, 이 손실함수의 기대손실은

$$E[L(x, T)] = E\left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i k_{ij} (x_i - T_i)(x_j - T_j)\right] \quad (20)$$

가 된다. 여기서  $k$ 는 손실계수로써 Hessian 행렬인 대칭 행렬을 취한다.

따라서 이러한 개념들을 도입하여 다변량 손실함수

의 기대손실을 이용한 새로운 공정능력지수를  $MC_{pm}^+$ 라 정의하고 그 모형을 다음의 식(21)과 같이 제안한다.

$$MC_{pm}^+ = \frac{\text{변형시킨 규격 허용오차영역의 면적 또는 부피}}{E[L(X, T)]^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{m}{2}} [\Gamma(\frac{m}{2} + 1)]^{-1}} \quad (21)$$

즉, 위의 새로운 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}^+$ 는 목표치로부터 공정의 평균제곱오차  $\Sigma_T$  대신 다변량의 기대손실  $E[L(X, T)]$ 를 대입함으로써 공정의 산포에 의한 공정평가척도가 아닌 품질변동에 따른 손실에 의한 공정평가척도임에 그 의미가 있다.

#### 4. 수치예

2개의 품질특성치  $X_1, X_2$ 에 대하여 양쪽 규격은  $USL_1=15, LSL_1=5, USL_2=25, LSL_2=15$  이고 이변

<표 7> T=M이고  $T_1=10, T_2=20$ 인 경우에서  $\mu_1=10, \mu_2=20$ 일 때

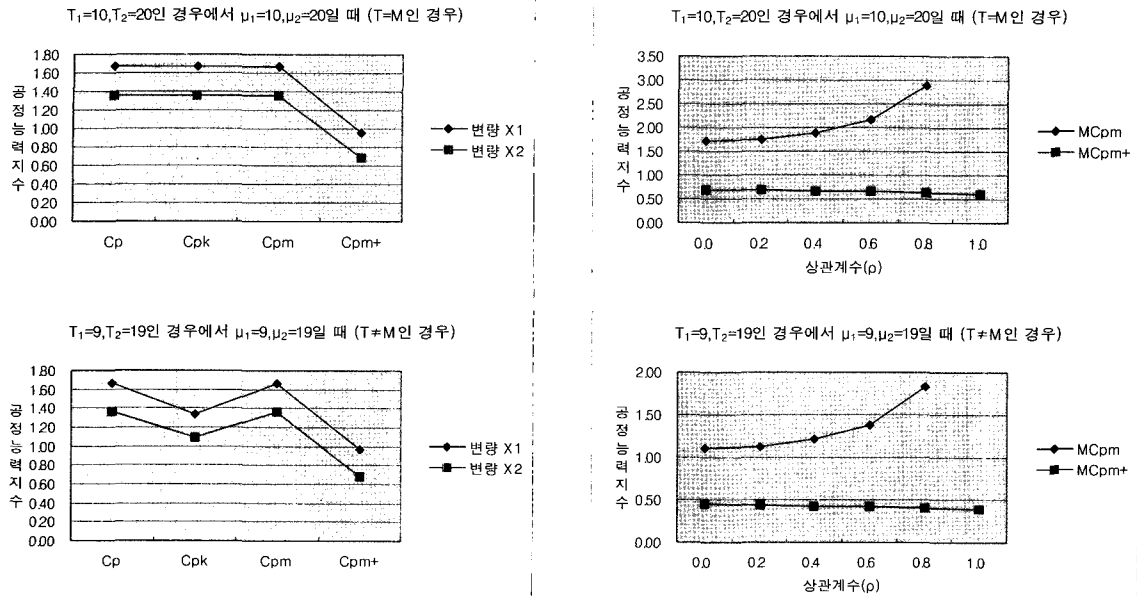
평균		$X_1$	$X_2$	손실계수(k1)   3		손실계수(k2)   4		손실계수(k12)   2		달기							
변산	목표치	1	1.5	상관계수( $\rho$ )		Cp		Cpk		Cpm		Cpm+		MCpm		MCpm+	
규격상한선	15	20	0.0	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	독립	종속	독립	종속		
규격하한선	5	15	0.2	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.72563	1.72563	0.70448	0.70448
규격중심치	10	20	0.4	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.72563	1.88281	0.70448	0.66901
			0.6	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.72563	2.15703	0.70448	0.65317
			0.8	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.72563	2.87604	0.70448	0.63840
			1.0	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.72563	-	0.70448	0.62460

<표 8> T≠M이고  $T_1=9, T_2=19$ 인 경우에서  $\mu_1=9, \mu_2=19$ 일 때

평균		$X_1$	$X_2$	손실계수(k1)   3		손실계수(k2)   4		손실계수(k12)   2		달기							
변산	목표치	9	1.5	상관계수( $\rho$ )		Cp		Cpk		Cpm		Cpm+		MCpm		MCpm+	
규격상한선	15	25	0.0	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	독립	종속	독립	종속		
규격하한선	5	15	0.2	1.66667	1.36083	1.33333	1.08866	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.10440	1.10440	0.45087	0.45087		
규격중심치	10	20	0.4	1.66667	1.36083	1.33333	1.08866	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.10440	1.20500	0.45087	0.42817		
			0.6	1.66667	1.36083	1.33333	1.08866	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.10440	1.38050	0.45087	0.41803		
			0.8	1.66667	1.36083	1.33333	1.08866	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.10440	1.84067	0.45087	0.40858		
			1.0	1.66667	1.36083	1.33333	1.08866	1.66667	1.36083	0.96225	0.68041	1.10440	-	0.45087	0.39974		

<표 9> T=M이고  $T_1=10, T_2=20$ 인 경우에서  $\mu_1=8, \mu_2=18$ 일 때

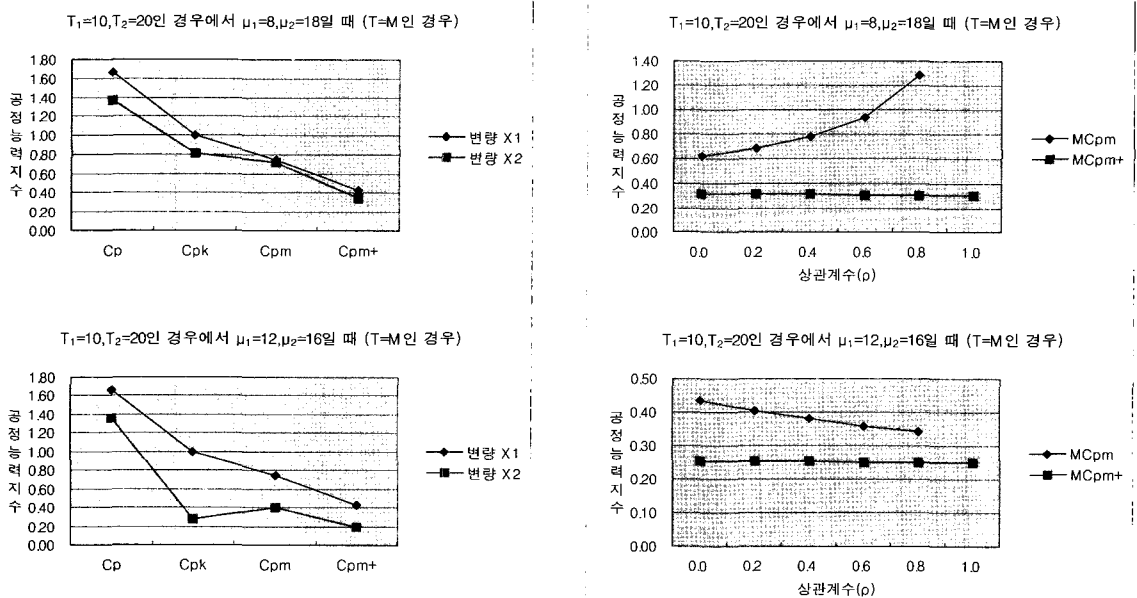
평균		$X_1$	$X_2$	손실계수(k1)   3		손실계수(k2)   4		손실계수(k12)   2		달기							
변산	목표치	8	1.5	상관계수( $\rho$ )		Cp		Cpk		Cpm		Cpm+		MCpm		MCpm+	
규격상한선	15	25	0.0	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	독립	종속	독립	종속		
규격하한선	5	15	0.2	1.66667	1.36083	1.00000	0.81650	0.74536	0.71067	0.43033	0.35533	0.62322	0.62322	0.31505	0.31505		
규격중심치	10	20	0.4	1.66667	1.36083	1.00000	0.81650	0.74536	0.71067	0.43033	0.35533	0.62322	0.78005	0.31505	0.31168		
			0.6	1.66667	1.36083	1.00000	0.81650	0.74536	0.71067	0.43033	0.35533	0.62322	0.93758	0.31505	0.31003		
			0.8	1.66667	1.36083	1.00000	0.81650	0.74536	0.71067	0.43033	0.35533	0.62322	1.28582	0.31505	0.30841		
			1.0	1.66667	1.36083	1.00000	0.81650	0.74536	0.71067	0.43033	0.35533	0.62322	-	0.31505	0.30681		



<그림 2>  $C_p, C_{pk}, C_{pm}, C_{pm}^+$ 의 비교와 상관계수 변화에 따른  $MC_{pm}, MC_{pm}^+$ 의 비교

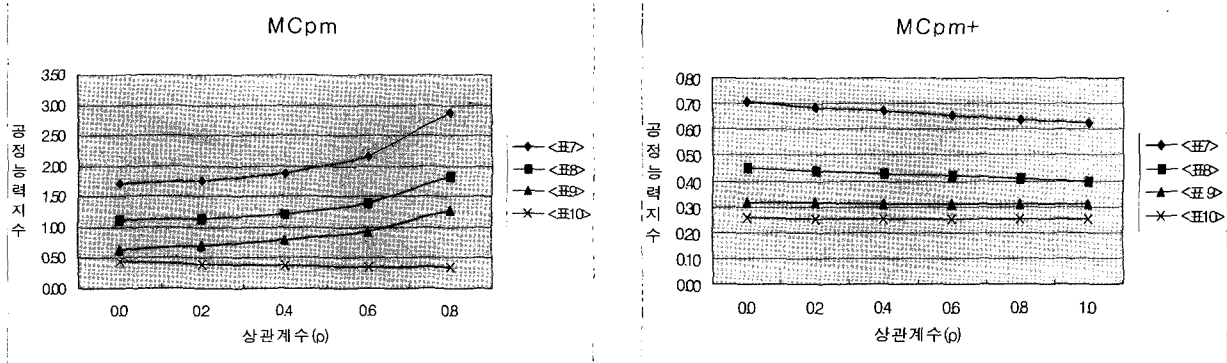
<표 10>  $T=M$ 이고  $T_1=10, T_2=20$ 인 경우에서  $\mu_1=12, \mu_2=16$ 일 때

4 공정능력비교		손실계수(k1)   3		손실계수(k2)   4		손실계수(k2)   2		달기						
평균	X1   X2	Cp		Cpk		Cpm		Cpm+		MCpm		MCpm+		
분산	12   16	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	변량X1	변량X2	독립	중속	독립	중속	
목표치	1   1.5	상관계수( $\rho$ )												
규격상한선	10   20	0.0	1.6667	1.36083	1.00000	0.27217	0.74536	0.39841	0.43033	0.19920	0.43597	0.43597	0.25443	0.25443
규격하한선	15   25	0.2	1.6667	1.36083	1.00000	0.27217	0.74536	0.39841	0.43033	0.19920	0.43597	0.40405	0.25443	0.25353
규격중심치	5   15	0.4	1.6667	1.36083	1.00000	0.27217	0.74536	0.39841	0.43033	0.19920	0.43597	0.37899	0.25443	0.25264
	10   20	0.6	1.6667	1.36083	1.00000	0.27217	0.74536	0.39841	0.43033	0.19920	0.43597	0.35869	0.25443	0.25176
		0.8	1.6667	1.36083	1.00000	0.27217	0.74536	0.39841	0.43033	0.19920	0.43597	0.34187	0.25443	0.25089
		1.0	1.6667	1.36083	1.00000	0.27217	0.74536	0.39841	0.43033	0.19920	0.43597	-	0.25443	0.25003



<그림 3>  $C_p, C_{pk}, C_{pm}, C_{pm}^+$ 의 비교와 상관계수 변화에 따른  $MC_{pm}, MC_{pm}^+$ 의 비교





<그림 4> 목표치에 대한 치우침 정도에 따른  $MC_{pm}$ 과  $MC_{pm}^+$ 의 변화

량 정규분포를 따른다. 이때 공정의 산포가  $\sigma_1^2=1.0$ ,  $\sigma_2^2=1.5$ 로 고정이라 하고 손실계수는  $k_1=3$ ,  $k_2=4$ ,  $k_{12}=2$ 로 주어졌다고 가정하자.

목표치가 규격중심과 일치할 때( $T=M$ )와 일치하지 않을 때( $T \neq M$ )를 비교하고 규격중심과 목표치가 일치 하더라도 목표치와 공정평균이 일치할 때( $\mu=T$ )와 일치 하지 않을 때( $\mu \neq T$ ) 각각의 경우에 대하여 상관계수  $\rho=0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 로 변화시켜 가면서  $C_p, C_{pk}, C_{pm}, C_{pm}^+, MC_{pm}, MC_{pm}^+$ 를 구한 결과 다음의 <표 7>, <표 8>, <표 9>, <표 10>과 같다.

<그림 2>에서  $MC_{pm}$ 과  $MC_{pm}^+$ 의 공정능력지수 값들을 비교하여 보면, 두 공정능력지수 모두 목표치가 규격 중심에 일치할 경우( $T=M$ )가 규격중심에 일치하지 않을 경우( $T \neq M$ )보다 그 값들이 크다. 또한 <그림 4>에서  $MC_{pm}$ 과  $MC_{pm}^+$  모두는 공정평균이 목표치로부터 멀어 질수록 공정능력이 떨어지는 성향을 가지고 있음을 보이고 있다. 따라서 기존의  $MC_{pm}$ 이 가지는 규격의 중심과 목표치와의 치우침과 더불어 목표치로부터 공정의 평균이 얼마나 떨어져 있는가를 잘 반영하는 장점을 새로이 제안한 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}^+$  역시 그대로 가지고 있다는 결론을 얻을 수 있다. 이러한 장점에도 불구하고 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}$ 은 <그림 3>에서 보는 바와 같이 산포에 해당하는  $\Sigma_T$ 의 값에 영향을 주는 품질특성치들 간의 표준편차와 상관계수에 따라 공정분포의 모양에 대한 양상이 달라진다는 것이다. 이 결과로 인해  $MC_{pm}$ 의 값이 상관계수의 변화에 따라 증가하는 성향과 감소하는 성향 모두를 띠게 된다. 하지만 본 논문에서 제안한 손실함수를 이용한 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}^+$ 는 표준편차와 상관계수에 따른 공정분포 모양의 양상에 전혀 영향을 받지 않고 상관계수의 변화에 따라 일관성 있게 평가할 수 있는 척도라는 장점을 가지고 있다.

### 5. 결론

오늘날의 기업들은 다양한 고객의 요구들을 만족시킬 수 있는 고품질과 정밀한 제품을 생산하기 위하여 자동화 설비의 이용이 확산되고 있다. 이로 인해 실제 현실에서 얻어지는 관리대상의 품질 특성치들은 그 양이 증가하고 실시간으로 측정되며 또한 서로 관련된 하나 이상의 품질 특성치들을 동시에 분석해야 하는 특성을 가지고 있다. 따라서 올바른 공정평가를 위해서는 이들의 종속적인 관계를 고려한 다변량 분석의 기법이 필요하다. 즉 다변량의 공정관리를 위해서는 그에 적합한 다변량 통계적 공정관리의 기법들을 개발하여 적용하여야 한다.

기존의 목표치를 고려한  $MC_{pm}$ 은 상관계수의 변화에 따라 증가하는 성향과 감소하는 성향 모두를 가지고 있는 반면 본 연구에서 제안한 기대손실을 이용한  $MC_{pm}^+$ 은 규격의 중심과 목표치와의 치우침과 더불어 목표치로부터 공정의 평균이 얼마나 떨어져 있는가를 잘 반영하고 있는 기존의  $MC_{pm}$ 의 장점을 그대로 지니면서, 상관계수의 변화에 따라 일관성 있게 평가할 수 있는 척도라는 장점을 가지고 있다는 것이다. 또한 공정의 산포에 의해서만 공정능력을 평가하는 방법들에 비해 손실함수를 이용하여 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적 손실까지도 고려함으로써 보다 유용한 정보를 제공할 수 있는 공정평가의 척도라고 할 수 있다.

향후에는 정규공정 뿐만 아니라 비정규공정 하에서의 공정능력을 평가할 수 있는 척도 및 Taguchi의 이차손실함수의 결점을 보완하고자 분포의 확률밀도함수(p.d.f.)의 역함수를 근거로 한 손실함수를 이용하는 등의 그 응용분야를 확대하여 나아가야 하겠다. 또한 품질변동에 따른 기대손실의 비용요인으로써 검사비용, 제작업비용, 폐기처리비용 등의 품질비용(quality cost)의 개념을 고려한 경제적인 다변량 공정평가척도에 관한 연구가 이루어져야 할 것이다.

## 참고문헌

- [1] 구철분, 송서일, “다꾸지의 손실함수를 이용한 공정 능력지수의 최적화에 관한 연구”, 한국품질관리학회지 Vol.20, No.1, 1992
- [2] 구본철, 고수철, 김종수, “손실함수에 의한 기대 상대손실과  $C_{pm}$ 의 관련성”, 공업경영학회지, Vol.20, No.41, 1997
- [3] 김평구, 조중재, “혼합정규공정하에서 손실함수를 이용한 공정능력지수”, 품질경영학회지, Vol.26, No.4, 1998
- [4] 동승훈, “성능특성이 다수인 경우의 파라미터 설계에 관한 연구”, 석사학위논문, 한국과학기술원, 1990
- [5] 백재욱, 조진남, “공정능력지수에 대한 비평과 올바른 공정능력분석 절차”, 품질경영학회지, Vol.27, No.2, 1999
- [6] 이상복, “다꾸지의 품질손실함수에 대한 분석”, 품질경영학회지, 제25권, 제3호, 1997
- [7] 정영배, “이차손실함수를 이용한 유동적인 공정수행 척도”, 공업경영학회지 제18권, 제36호, 1995
- [8] 조용욱, 박명규, “기대손실함수를 이용한 다특성치 강건설계”, 한국산업경영시스템학회지, 제24권, 제6집, 2001
- [9] Boyles, R.A., “The Taguchi Capability index”, Journal of Quality Technology, Vol.23, No.1, pp.17-26, 1991
- [10] Braker, T.B., “Quality Engineering by Design : Taguchi’s Philosophy”, Quality Assurance, Vol.13, No.3, pp.72-80, 1987
- [11] Chan, L.K., Chung, S.W, Spiring, F.A., “A New Measure of Process Capability : Cpm”, Journal of Quality Technology, Vol.20, No.3, pp.162-175, 1988
- [12] Kapur, K.C. and Cho, B.R., “Economic Design of the Specification region for Multiple Quality Characteristics”, IIE Transactions, Vol.28, No.3, pp.237~248, 1996
- [13] Taam, W., Subbaiah, P. and Liddy, J.W., “A Note on Multivariate Capability Indices”, Journal of Applied Statistics 20, pp.339~351, 1993
- [14] Wang, F.K., Hubele, N.F., Lawrence, F.P., Miskulin, J. D. and Shahriari, H., “Comparison of Three Mutivariate Process Capability Indices”, Journal of Quality Technology, Vol.32, No.3, pp.263~275, 2000