차분방정식에 의한 역 z변환 계산을 위한 초기조건의 추출

論 文
51D-8-5

Extraction of Initial Conditions For a Recursive Numerical Inverse z-Transform Method

李 宰 碩* · 鄭 台 相**
(Jae Seok Lee · Tae-Sang Chung)

Abstract – The inverse z-transform of a z-domain expression of a sequence can be performed in many different methods, among which the recursive computational method is based on the difference equation. In applying this method, a few initial values of the sequence should be obtained separately. Although the existing method generates the right initial values of the sequence, its derivation and justification are not theoretically in view of the definition of z-transform and its shift theorems. In this paper a general approach for formulating a difference equation and for obtaining required initial values of a sequence is proposed, which completely complies to the definition of the z-transform and an interpretation of the validity of the existing method which is theoretically incorrect.

Key Words : z변환, 역 z변환, 차분방정식, 초기조건, 이동정리

1. 서 론

z변환은 이산시간 제어시스템과 신호처리시스템을 해석하고 설계하는데 있어서 유용하게 사용되는 기본적인 수학적 도구이다. z변환이 편리하게 사용되기 위해서는 역 z변환을 구하는 방법이 잘 정의되어 있어야 하며 쉽게 적용할 수 있어야 한다. z변환식 $X(z)$가 주어졌을 때, $X(z)$의 역 z변환은 $x(k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$로 유일하게(uniquely) 구하여 진다. 역 z변환을 구하는 가장 간단한 방법은 z변환표를 참조하는 것이나 몇 가지 기본적인 수열만 적용 가능하다. z변환표를 참고하는 것을 포함하여 역 z변환을 구하는 방법은 네 가지가 있다[1-4]: 직접 나눗셈법, 부분분수 확장법, 역 z변환공식을 이용하는 법, 수치적 방법(computational method)[1].

실시간 적응신호처리 시스템에서의 필터식(filtering equation)이나 이산 제어시스템에서의 제어식은 실시간에 z변환식으로 설계 혹은 표현되며, 실시간에 외부 적응을 위하여 계속적으로 변경될 수 있다. 따라서 이의 적용을 위한 역 z변환도 실시간 계산으로 가능하여야 할 것이다. 위에서 열거한 여러 역 z변환 방법 중, 신호처리기/제어기의 계속적 변경 가능성과 계산의 효율성을 고려하여, 차분방정식(difference equation)에 의한 수치적 방법이 실시간 계산에 가장 적절할 것으로 판단된다.

수치적으로 역 z변환을 구하는 방법은 변수들이 z영역에서 표현된 식을 차분방정식의 형태로 변환해야 하며, 그 결과 변수들의 수열을 반복적으로 계산하여 얻는다. z영역 함수의 차수를 n이라 할 때, 이 방법을 적용하기 위해서는 수열의 처음 n개의 초기 값이 필요하다.

그런데 초기조건을 구하는 기존의 방법[1]은 그 방법의 유도과정이 z변환의 정의와 z변환의 이동정리(shift theorems)들과 이론적으로 부합하지 않음을 이 논문에서 보여준다. 본 논문에서는 z변환의 정의에 완벽하게 일치하는 초기조건과 차분방정식을 구하는 일반적인 방법을 제시하고, 기존 방법의 해석을 수정하였다.

2. 양의 방향 z변환에 대한 재고찰

독립적인 이산수열이든 혹은 연속신호 $c(t)$를 주기 T로 샘플링하여 얻은 수열 $c_k = c(kT)$이든, 임의의 수열 c_k, $k=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 의 양의 방향의 z변환은 정의에 의해서 다음과 같이 주어진다[1-4].

* 正 會 員 : 中央大 工大 制御計測工學科 博士課程
** 正 會 員 : 中央大 工大 電子電氣工學部 敎授 · 工博

接受日字 : 2002年 5月 16日
最終完了 : 2002年 6月 11日

$$C(z)=Z[c_k]=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-k}=c_0+c_1 z^{-1}+\ldots+c_k z^{-k}+\ldots \tag{1}$$

위의 정의는 양의 방향의 일방(one-sided) z변환이므로, 시간 인덱스 k는 음의 무한대부터가 아니라 0에서부터 양의 무한대까지의 정수를 취해야 한다. 또한 식 (1)로 주어진 z변환의 정의로부터 알 수 있듯이, 임의의 수열의 일방 z변환은 z 변수의 양의 거듭제곱을 가진 항이 올 수 없다. 이 사실이 나중에 본 논문의 주장을 뒷받침하는데 사용될 것이다.

식 (1)에 주어진 z변환의 정의로부터, $k<0$인 범위에서 c_k는 0이든 아니든 고려되지 않음이 명확하다. 그러므로 식 (1)의 어떠한 역변환도 $k<0$인 범위에서 $c_k=0$이라는 가정을 필요로 하지 않는다:

$$c_k=Z^{-1}[C(z)] \tag{2}$$

또한, z변환 $C(z)$가 샘플링 시간 T를 포함하는지 여부와 상관없이 c_k는 역 z변환을 나타내며, 적용시스템의 표현상 필요하다면 c_k대신 $c(kT)$로 표현할 수 있으나, 계산결과에는 T가 영향을 미치지 않는다.

식 (1)에 주어진 z변환의 정의를 바탕으로, 두 가지 이동정리가 유도된다. 수열 c_{k+n} , $k=0,1,2,\cdots$ (n은 양의 상수)의 z변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Z[c_{k+n}] &= \sum_{k=0}^{\infty}c_{k+n}z^{-k} \\ &= c_n+c_{n+1}z^{-1}+c_{n+2}z^{-2}+\cdots \\ &= z^n[C(z)-(c_0+c_1 z^{-1}+\cdots+c_{n-1}z^{-(n-1)})] \\ &= z^n C(z)-z^n(c_0+c_1 z^{-1}+\cdots+c_{n-1}z^{-(n-1)}) \end{aligned} \tag{3}$$

위와 같은 관계를 z변환에서 앞선 이동정리(advanced shift theorem)라 한다. 만일 식 (3)에 역 z변환을 적용하면 다음처럼 될 것이다.

$$\begin{aligned} & Z^{-1}[z^n C(z)-z^n(c_0+c_1 z^{-1}+\cdots+c_{n-1}z^{-(n-1)})] \\ & = c_{k+n}\ ,\ k=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 c_i , $0\le i\le n-1$ 는 항상 0인 것은 아니므로, 식 (3)과 (4)로부터

$$Z^{-1}[z^n C(z)]\neq c_{k+n}\ ,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

임을 알 수 있다. 수열 c_k $(0\le k)$의 $0\le i\le n-1$ 의 범위에서 $c_i=0$ 이 아니면, 식 (5)의 $z^n C(z)$는 z의 양의 거듭제곱의 항들을 포함하게 된다. 따라서 앞에서 지적하였듯이, 위 (5)식처럼 $z^n C(z)$가 임의의 수열의 양의 방향의 z변환식이 될 수 없음을 주의하여야 한다.

다음은 수열 c_{k-n} , $k=0,1,2,\cdots$ (n은 양의 정수)의 z변환을 고려하자.

$$\begin{aligned} Z[c_{k-n}] &= \sum_{k=0}^{\infty}c_{k-n}z^{-k}=c_{-n}+c_{-n+1}z^{-1}+\cdots \\ &\quad +c_{-1}z^{-(n-1)}+c_0 z^{-n}+c_1 z^{-(n+1)}+\cdots \\ &= (c_{-n}+c_{-n+1}z^{-1}+\cdots+c_{-1}z^{-(n-1)}) \\ &\quad +z^{-n}(c_0+c_1 z^{-1}+\cdots) \\ &= z^{-n}C(z) \\ &\quad +(c_{-n}+c_{-n+1}z^{-1}+\cdots+c_{-1}z^{-(n-1)}) \end{aligned} \tag{6}$$

위 식을 z변환에서 뒤진 이동정리(delayed shift theorem)라 한다. 식 (6)에서 z변환은 수열 c_k , $k=0,1,2,\cdots$ 로부터 유도된 것이 아니라 수열 c_{k-n} , $k=0,1,2,\cdots$ 로부터 유도된 것이므로, 계수 c_{-i} , $1\le i\le n$ 은 소거될 수 없다. 식 (1)에서 본 것처럼, 수열 c_k의 z변환의 정의에서 $k<0$의 범위에서 $c_k=0$인 조건은 가정될 필요가 없다.

식 (6)을 정리하면,

$$\begin{aligned} z^{-n}C(z) &= Z[c_{k-n}] \\ &\quad -(c_{-n}+c_{-n+1}z^{-1}+\cdots+c_{-1}z^{-(n-1)}) \end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)의 양변에 역 z변환을 취하면, 식 (6)과 역관계에 있는 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & Z^{-1}[z^{-n}C(z)] \\ & = c_{k-n}-Z^{-1}[c_{-n}+c_{-n+1}z^{-1}+\cdots+c_{-1}z^{-(n-1)}] \\ & = c_{k-n}-(c_{-n}\delta_k+c_{-n+1}\delta_{k-1}+\cdots+c_{-1}\delta_{k-(n-1)}), \\ & \qquad k\ge 0 \end{aligned} \tag{8}$$

식 (8)을 간단히 하면,

$$Z^{-1}[z^{-n}C(z)] = u_{k-n}c_{k-n} \neq c_{k-n}\ ,\quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

식 (8)에서 δ_k는 Kronecker delta 함수이고, 식 (9)에서의 u_k는 단위계단(unit step) 함수이다.

수치적인 역 z변환을 위한 초기조건을 구하는 기존의 방법을 설명하고 모순점을 지적하기 위하여 다음과 같은 z변환식을 고려하여 보자:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} \\ &= \frac{5}{4}z^{-1}\left\{\frac{15z}{z-1} - \frac{7z}{z-0.2}\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

이 논문에서 전개하는 이론과의 비교를 위하여 위의 $X(z)$의 역변환을 먼저 해석적으로 구하여 보자. 역 z변환표와 위의 식 (9)의 뒤진 이동정리를 적용하여 식 (10)의 양변에 역 z변환을 취하면 $x(k)$, $k \geq 0$을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_k = \frac{5}{4}u_{k-1}\{15 - 7(0.2)^{k-1}\} \tag{11}$$

위의 식에서 보듯이, 식 (10)에 포함된 z^{-1}인자를 고려하여 인덱스가 k에서 $k-1$로 치환된 것과 단위계단 함수 u_{k-1}가 곱하여진 것은 식 (9)에서 보인 것과 같이 z변환에서 뒤진 이동정리가 적용된 것이다. 식 (11)에서 k에 0, 1, 2, 3을 치환하면 x_k의 초기 값이 다음과 같이 계산된다.

$$x_0 = 0,\ x_1 = 10,\ x_2 = 17,\ x_3 = 18.4 \tag{12}$$

이 예제 (식 (10))에 기존의 수치적 방법[1]으로 역 z변환을 구하여 보고, 그 과정에서 기존의 방법이 이론적인 불일치성이 있음을 보일 것이다.

식 (10)의 z변환 $X(z)$는 다음과 같이 쓸 수 있고

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2 - 1.2z + 0.2} \tag{13}$$

이를 다시 정리하면, 다음과 같다.

$$z^2X(z) - 1.2zX(z) + 0.2X(z) = 10z + 5 \tag{14}$$

널리 채택되는 디지털제어분야의 교재들 중의 하나인 Ogata의 교재[1]는 수치적 역 z변환을 설명하고 있는데, 이 교재에서는, 수열 x_k의 음의 인덱스에 대하여 다음과 같은 임의의 조건을 채택하고

$$x_{-1} = x_{-2} = 0 \tag{15}$$

식 (14)가 다음과 같은 차분방정식으로 변환된다고 증명이 없이 주어진다:

$$x_{k+2} - 1.2x_{k+1} + 0.2x_k = 10\delta_{k+1} + 5\delta_k,\ k \geq -2 \tag{16}$$

식 (16)으로부터 초기 몇 개의 값을 구해보면 해석적으로 구하여진 식 (12)를 만족함을 알 수 있다. 따라서 식 (14)로부터 식 (16)의 차분방정식으로의 변환이 유효함을 주장할 수 있으나, 주의 깊게 살펴보면 이 변환은 크게 세 가지의 문제점이 드러난다.

첫 번째, 식 (15)와 같은 조건을 부여하는 것은 임의적인데, 식 (13)에서의 $X(z)$는 $k<0$의 범위에서 x_k와 관계가 없다. 관계가 없으므로 $k<0$의 범위에서 x_k를 0의 값으로 설정하는 것은 문제가 없을 수도 있다. 하지만 같은 논리로 0이 아닌 값으로 설정하여도 문제가 없어야 할 것이다. 그러나 실제로는 식 (15)에 의한 기존의 방법은 $k<0$의 범위에서 x_k를 0으로 임의로 고정하지 않으면, $k \geq 0$의 범위에서 x_k를 구할 수 없음을 확인할 수 있다.

두 번째, 식 (14)에서 식 (16)으로의 변환의 이론적 설명은 각각 대응하는 항들을 고려하면,

$$Z^{-1}[z^nX(z)] = x_{k+n}\ ,\quad n = 1, 2 \tag{17}$$

의 관계가 도입된 것으로 보이나, 이는 전적으로 식 (4)와 식 (5)를 통해 보인 것과 같이 z변환에서 앞선 이동정리에 위배된다. 식 (14)에서 식 (16)을 구한 것이, $k<0$의 범위에서 x_k를 0으로 임의로 고정하는 가정을 받아들이는 조건에서, 전체적으로 보면 오류가 없는 것처럼 보이나 각 항 별로 보면 위의 문제가 제기됨을 알 수 있다.

마지막으로, 양의 방향 z변환은 시간 인덱스 k가 0부터 정의되므로, 그의 역변환도 마찬가지여야 한다. 그러나 식 (16)의 예에서는 시간 인덱스가 0이 아니라 -2부터 존재함을 볼 수 있는데, 식 (16)으로 주어진 결과가 옳다고 하더라도, 수학적 관점에서 양의 방향의 z변환과 그 역변환의 해석에서의 일관성을 잃고 있으며, 이론 전개에 있어서 급격한 비약을 드러냄을 알 수 있다.

다음 장에서는 z변환의 기본 정의에 완전히 부합되는 일반적 이론을 전개할 것이며, 기존의 방법의 해석을 바르게 수정할 것이다.

3. 차분방정식과 초기조건의 유도

역 z변환을 구하는 수치적 방법은 주어진 z변환식으로부터 유도된 차분방정식을 바탕으로 한다. 임의의 신호처리 필터나 디지털 제어기의 z변환식의 실시간 수치적 구현을 위하여도 z변환식의 차분방정식으로의 변환이 필요하다.

식 (10)으로 주어진 예제를 다시 살펴보자. 식 (3)과 (4)로 주어지는 z변환에서 앞선 이동정리를 이용하기 위하여 식 (14)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & z^2(X(z)-x_0-x_1z^{-1}) \\ & \quad -1.2z(X(z)-x_0)+0.2X(z) \\ & = (-x_0)z^2+(10-x_1+1.2x_0)z+5 \end{aligned} \tag{18}$$

식 (18)의 좌변을 검토하면, z의 양의 거듭제곱을 가진 항이 없으므로 역변환이 가능한 적합한 z변환식이다. 따라서 식 (18)의 우변도 전체적으로 z의 양의 거듭제곱이 없어야 하므로, z의 양의 거듭제곱을 가진 항들 $(-x_0)z^2$와 $(10-x_1+1.2x_0)z$는 그 계수가 동시에 0이 되어야만 한다. 즉,

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 10-x_1+1.2x_0 = 0 \end{cases} \tag{19}$$

연립방정식 (19)를 풀면, $x_0=0$, $x_1=10$이고, 이것은 식 (12)의 결과와 같다. 이 초기조건을 식 (18)에 대입하고, z변환에서 앞선 이동정리를 이용하여 식 (18)의 양변에 역 z변환을 취하면 다음과 같이 된다.

$$x_{k+2}-1.2x_{k+1}+0.2x_k=5\delta_k\ ,\ k\geq 0 \tag{20}$$

이제 $X(z)$의 역 z변환을 구하는 문제는 초기조건이 $x_0=0$, $x_1=10$일 때, x_{k+2} , $k=0,1,\cdots$ 에 대한 위의 차분방정식을 푸는 문제로 변환되었다. 식 (20)에서 임펄스 입력항 $5\delta_k$ 는 식 (16)의 $10\delta_{k+1}+5\delta_k$ 와 약간 다르지만, 여전히 옳은 결과를 보여준다. 여기서도 주의하고자 하는 것은 위 (19)식의 초기조건은, 기존의 방법과 같이 식 (20)의 차분방정식에서 초기조건에 대한 임의의 가정을 도입하고 구한 것이 아니라, 원래의 z변환식에서 직접 구한 것이다.

앞에서 본 것처럼, $X(z)$의 분모와 분자는 음이 아닌 z의 거듭제곱들이 포함된 항으로 이루어져 있었다.

$$X(z)=\frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} \tag{13}$$

그러나, 본 논문에서 제시하는 새로운 방법은 분자와 분모의 다항식에서 z의 거듭제곱들을 같은 차수로 올리거나 내려도 역시 적용 가능하다. 예를 들어, 식 (13)의 분자, 분모에 각기 z가 곱해지면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$X(z)=\frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}=\frac{10z^2+5z}{z^3-1.2z^2+0.2z} \tag{21}$$

전개하면

$$z^3X(z)-1.2z^2X(z)+0.2zX(z)=10z^2+5z \tag{22}$$

식 (18)과 같은 과정을 거치면, 식 (22)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & z^3(X(z)-x_0-x_1z^{-1}-x_2z^{-2}) \\ & \quad -1.2z^2(X(z)-x_0-x_1z^{-1})+0.2z(X(z)-x_0) \\ & = (-x_0)z^3+(10-x_1+1.2x_0)z^2 \\ & \qquad +(5-x_2+1.2x_1-0.2x_0)z \end{aligned} \tag{23}$$

그리고 앞에서 적용했던 방법을 이용하면, 식 (23)으로부터 다음의 초기조건과 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 10-x_1+1.2x_0 = 0 \\ 5-x_2+1.2x_1-0.2x_0 = 0 \end{cases} \tag{24}$$

$$x_{k+3}-1.2x_{k+2}+0.2x_{k+1}=0\ ,\ k\geq 0 \tag{25}$$

연립방정식 (24)를 풀면 $x_0=0$, $x_1=10$, $x_2=17$ 이고 이것은 식 (12)에서 주어진 해석적 방법의 답과 일치한다. 식 (20)과 비교해 보면 식 (25)에는 임펄스 입력 항이 없다. 이것은 초기조건 $x_2=17$가 식 (20)에서의 임펄스 입력 $5\delta_k$와 같은 역할을 하는 것이라고 이해될 수 있다.

이번에는 식 (13)의 분자, 분모에 각기 z^{-2}가 곱해진 경우를 살펴보자.

$$X(z)=\frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}=\frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}} \tag{26}$$

이것은 다음처럼 전개가 된다.

$$X(z)-1.2z^{-1}X(z)+0.2z^{-2}X(z)=10z^{-1}+5z^{-2} \tag{27}$$

이번에는 앞선 이동정리 대신에 식 (9)의 뒤진 이동정리를 사용하여 식 (27)의 양변에 역 z변환을 취하면, 다음의 식을 얻는다.

$$x_k - 1.2x_{k-1}u_{k-1} + 0.2x_{k-2}u_{k-2} = 10\delta_{k-1} + 5\delta_{k-2}\ ,\quad k \geq 0 \tag{28}$$

이 경우, 차분방정식을 푸는 데 초기조건은 필요하지 않게 된다. 식 (28)에서 시간 인덱스 k에 0부터 대입하면, 수열 x_k, $k = 0,1,2,\cdots$ 를 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{cases} k=0 \rightarrow x_0 = 0 \\ k=1 \rightarrow x_1 = 1.2x_0 + 10 = 10 \\ k=2 \rightarrow x_2 = 1.2x_1 - 0.2x_0 + 5 = 17 \end{cases} \tag{29}$$

식 (28)의 결과를 가지고, 기존의 수치적 역 z변환이 해석될 수 있다. 만일 $x_{-1} = 0$ 과 $x_{-2} = 0$ 이 가정되면, 단위 계단 함수 u_{k-1} 과 u_{k-2} 는 식 (28)로부터 소거될 수 있으며 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$x_k - 1.2x_{k-1} + 0.2x_{k-2} = 10\delta_{k-1} + 5\delta_{k-2}\ ,\quad k \geq 0 \tag{30}$$

또한 식 (30)에서 k대신 $k+2$을 대입하면 시간 인덱스 k는 이동될 수 있고 그 결과 다음의 식이 얻어진다.

$$x_{k+2} - 1.2x_{k+1} + 0.2x_k = 10\delta_{k+1} + 5\delta_k\ ,\quad k \geq -2 \tag{31}$$

이것은 기존의 방법으로 주어지는 식 (16)과 동일하다. 두 개의 초기조건, $x_0 = 0$과 $x_1 = 10$은 식 (30)에서 $k = 0$ 과 $k = 1$을 대입하면 추출할 수 있고, 혹은 식 (31)에서 $k = -2$ 과 $k = -1$ 을 대입하면 얻어진다. 어느 경우이든, $x_{-1} = 0$ 과 $x_{-2} = 0$ 이 필요한데, 이는 양의 방향의 z변환의 정의에도 맞지 않으며, 더구나 이러한 사실은 양의 방향 z변환과 그것의 역변환이 오직 $x_k = 0$, $k < 0$ 인 수열에서만 적용이 가능한 것처럼 오인될 수 있다.

이 논문에서 제안하는, 수학적 일관성을 유지하면서 역 z변환을 구하는 새로운 수치적 과정은 다음과 같이 일반화할 수 있다.

$X(z)$가 다음과 같을 때,

$$X(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}\ ,\quad a_n = 1 \tag{32}$$

식 (32)를 전개하면

$$z^n X(z) + a_{n-1}z^{n-1}X(z) + \cdots + a_1 z X(z) + a_0 X(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \tag{33}$$

그리고 앞선 이동정리를 적용하기 위해 식 (33)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & a_n z^n\Big(X(z) - \sum_{j=0}^{n-1} x_j z^{-j}\Big) \\ & + a_{n-1}z^{n-1}\Big(X(z) - \sum_{j=0}^{n-2} x_j z^{-j}\Big) + \cdots \\ & + a_1 z(X(z) - x_0) + a_0 X(z) \\ & = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i x_j z^{i-j} \end{aligned} \tag{34}$$

식 (34)의 우변을 수열의 합의 순서를 바꾸어 다음과 같이 조정할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n} b_j z^j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i x_j z^{i-j} = \\ & b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots \qquad + b_1 z + b_0 \\ & - a_n x_0 z^n - a_n x_1 z^{n-1} - \cdots - a_n x_{n-1} z \\ & \qquad - a_{n-1}x_0 z^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x_{n-2} z \\ & \qquad \vdots \\ & \qquad\qquad - a_1 x_0 z \\ & = \sum_{i=1}^{n} z^i\Big(b_i - \sum_{j=i}^{n} a_j x_{j-i}\Big) + b_0 \end{aligned} \tag{35}$$

식 (34)의 좌변을 고려하여 식 (35)에서 z의 양의 거듭제곱을 가진 항들을 0으로 놓으면, 다음의 식이 얻어진다.

$$b_i - \sum_{j=i}^{n} a_j x_{j-i} = 0\ ,\quad i = n, n-1, \cdots, 1 \tag{36}$$

그리고 위의 식을 연립방정식의 형태로 놓고 풀면, 초기조건 x_k, $0 \leq k \leq n-1$ 을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} b_n - a_n x_0 = 0 \\ b_{n-1} - a_n x_1 - a_{n-1}x_0 = 0 \\ b_{n-2} - a_n x_2 - a_{n-1}x_1 - a_{n-2}x_0 = 0 \\ \vdots \\ b_1 - a_n x_{n-1} - a_{n-1}x_{n-2} - \cdots - a_1 x_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = b_n \\ x_1 = b_{n-1} - a_{n-1}x_0 \\ x_2 = b_{n-2} - a_{n-1}x_1 - a_{n-2}x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = b_1 - a_{n-1}x_{n-2} - \cdots - a_1 x_0 \end{cases} \tag{37}$$

식 (34)에 식 (36)의 조건을 대입한 후 역 z변환을 취하면 다음과 같은 차분방정식이 얻어진다.

$$x_{k+n} + a_{n-1}x_{k+n-1} + \cdots + a_1x_{k+1} + a_0x_k = b_0\delta_k \,, \quad k \geq 0 \tag{38}$$

식 (37)을 이용하여, 초기조건 x_k, $k \leq n$을 순차적으로 구하고, 이 초기조건과 식 (38)의 차분방정식을 이용하면 $n < k$의 범위의 모든 x_k를 순차적으로 구할 수 있다. 신호처리나 디지털 제어에서의 역 z변환의 실시간 수치적 계산은 계속 시차적으로 수정되는 n개의 초기조건을 위한 n개의 쉬프트 메모리를 요구함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 임의의 시간 수열의 주어진 z변환에 대해 상응하는 차분방정식과 그 시간 수열을 수치적으로 구하기 위해 필요한 초기조건을 구하는 새로운 방법을 유도했다. 기존의 방법은 디지털제어 분야뿐만 아니라 z변환이 필요한 여러 분야에서 앞에서 지적한 문제점들을 지닌 채 사용되어 왔는데, 새로운 방법은 양의 방향 z변환, 앞선 이동정리, 뒤진 이동정리의 기본적 정의에 충실하며, 따라서 역 z변환을 구하는 연산과정에서 시간수열이 음의 시간 인덱스에서 0이라고 가정하거나, 시간 인덱스가 0이 아닌 다른 값부터 시작한다고 가정할 필요가 없으므로, 기존의 이론에서 보여지는 수학적 일관성이 결여되는 단점을 모두 제거하였다. 또한 새로운 방법은 z변환 다항식의 분자와 분모에 z의 양의 거듭제곱, 음의 거듭제곱, 혹은 양과 음이 서로 섞인 거듭제곱이 존재하는 모든 형태가 가능하다. 그리고 각각의 경우에서 결과로 얻어지는 차분방정식은 같은 초기조건을 만족시키기 위해 각기 다른 임펄스 입력 항을 갖는다.

참 고 문 헌

[1] Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems*, 2nd Edition, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1995.

[2] Kuo, B. C., *Digital Control Systems*, 2nd Edition, Ft. Worth: Saunders College Publishing, 1992.

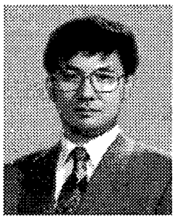
[3] Phillips, C. L., and H. T. Nagle, Jr., *Digital Control System Analysis* and Design, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984.

[4] Franklin, G. F., J. D. Powell, and M. L. Workman, Digital Control of *Dynamic Systems*, 2nd Edition, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1990.

저 자 소 개

이 재 석 (李 宰 碩)

1994년 중앙대 제어계측공학과 (학사)
1999년 중앙대 제어계측공학과 (석사)
1999~현재 중앙대 제어계측공학과 박사과정
Tel : 02) 825-1644
Fax : 02) 823-2492
E-mail : icarus@piano.cie.cau.ac.kr



정 태 상 (鄭 台 相)

1978년 서울대 전기공학과 (학사)
1982년 미국 Ohio 주립대 (석사)
1985년 미국 Ohio 주립대 (박사)
1986~1992년 미국 Kentucky 대 조교수
1992~현재 중앙대 전자전기공학부 교수
Tel : 02) 820-5321
Fax : 02) 823-2492
E-mail : tschung@jupiter.cie.cau.ac.kr