韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2002, 8. 제 41권, 제 2호, 215-225.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Aug. 2002, Vol. 41, No. 2, 215-225.

유추를 이용한 삼각형의 각의 이등분선 성질 탐구*

한 인 기 (경상대학교)

1. 서 론

중등학교 수학과 제 7차 교육과정(교육부, 1998)에 보면, 수학교육의 목표를 크게 세 가지로 제시하고 있다. 첫째는 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 것, 둘째는 수학적 지식과 기능을 활용하여 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결하는 것, 셋째는 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지며 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기르는 것이다. 이 목표를 분석해 보면, 첫 번째 목표는 기초적인 수학적 개념, 원리, 법칙의 학습에 관련된 것이고, 두 번째 것은 수학적 탐구 능력 육성에 관련된 것이다. 세 번째 것은 수학적 관심과 태도에 관련된다고 할 수 있다. 즉, 중등학교 수학교육에서 수학적 지식의 획득뿐만 아니라 관찰, 분석, 조직 등을 통한 수학적 탐구 능력 육성, 수학에 대한 지속적인 관심과 긍정적인 태도가 매우 중요함을 알 수 있다.

한편, 구세프(1994)는 수학교육의 목표를 크게 두 블록으로 분류하였는데, 첫 번째 블록은 수학적 지식, 능력, 그리고 기능의 기초 획득에 관련된 것으로 우리나라 수학과 교육과정에서 첫 번째 목표에 해당한다고 할 수 있으며, 두 번째 블록은 학습자의 정신적 요소 개발에 관련된 것으로, 여기에는 지적인 측면, 창의적 측면, 세계관 형성, 德育, 심미적 측면, 努育 등의 개발을 주장하고 있으며, 특히 중등학교 수학교육에서 두 번째 블록이 매우 중요함을 강조하였다. 두 번째 블록은 우리나라 수학과 교육과정의 두 번째와 세 번째 목표에 해당한다고 할 수 있다. 특히, 구세프는 지적인 측면과 창의적 측면의 육성을 위해 주어진 대상을 분석하기, 결론을 비교하기, 얻어진 결론을 일반화하기 등의 중요성을 강조하였다. 물론, 이러한 수학적 탐구 활동은 많은 전문가들에 의해 그 중요성이 주장되었다.

본 연구는 주어진 대상을 관찰, 분석하여 새로운 결론을 추측, 증명하며 얻어진 결론들을 비교, 일반화할 수 있는 수학적 탐구 활동의 경험을 제공할 수 있는 학습 자료 개발에 관련된 연구로서, 특히 본 연구에서는 삼각형에서 각의 이등분선에 대한 유추 활동을 중심으로 이에 관련된 분석, 추측, 증명, 비교, 일반화를 상세히 기술한 것이다.

유추에 관련된 선행 연구들을 살펴보면, Polya(1954), 우예모프(1964), 스딸야르(1974), 강시중(1987) 등은 주어진 대상에 대한 새로운 추측을 제기하는 중요한 인지 활동으로 유추의 역할을 강조하였고, 우정호(2000)도 유추가 패턴이나 법칙을 다루는 수학 학습에 매우 필요한 강력한 사고 도구이며, 수학 학습-지도의 기본 바탕이 된다고 주장하였다. 한편, 한인기 · 이상근(2000)은 삼각형과 사면체 사이의 유추를 통해 새로운 명제들을 추측, 증명하는 과정을 기술하였고, 이를 영재아들을 위한 심화학습 자료로 활용할 수 있음을 주장하였고, 한인기(2001)는 유추를 통해 삼각형의 무게중심의 개념과 성질을 볼록 n각형에 대해 일반화시키는 것에 관련된 수학적 활동을 연구하였다.

선행 연구들을 종합해 보면, 유추는 주어진 대상을 분석하여 새로운 추측을 제기하고 증명, 일반화하는 과정에서 매우 중요한 역할을 할 수 있다는 것을 알 수 있다. 그러나, 개발된 학습 자료는 중등학교의 일반적인 교실 환경에서 적용할 수 있는 수준이 아니라, 대부분이 우수아들을 위한 심화 학습에 적합한 자료들이다.

본 연구에서는 일반 중등 학생들이 수학적 대상을 분

---

* 이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-200-030-D0004).
* 2002년 6월 투고, 2002년 8월 심사 완료.
* ZDM분류 : U23
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 유추, 각의 이등분선, 수학교과서 분석, 증명.

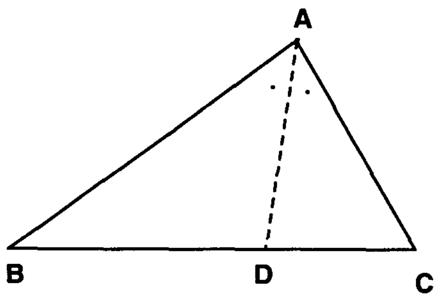
석하여 유추를 통해 새로운 추측을 제기하고, 유추를 통해 추측을 증명하며, 얻어진 결론을 일반화할 수 있는 탐구 활동의 경험을 가질 수 있는 학습 자료를 제시하고자 한다. 이를 위해, 본 연구에서는 중학교 2학년 수학교과서에 제시된 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 분석하여 외각의 이등분선의 성질을 유추를 통해 얻을 수 있음을 보인다. 그리고, 추측 결과 얻어진 삼각형의 외각의 이등분선에 관한 성질을 증명하기 위해, 내각의 이등분선의 성질의 증명 과정에 이용된 수학적 아이디어를 추출하여 유추할 수 있음을 보이고, 다양한 방법으로 외각의 이등분선의 성질을 증명한다.

2. 삼각형에서 각의 이등분선의 성질

(1) 삼각형의 각의 이등분선과 유추

삼각형에서 각의 이등분선의 성질은 평면 기하학의 문제해결에서 자주 사용되는 중요한 정리들 중의 하나이다. 이때, 내각의 이등분선 또는 외각의 이등분선에 대하여 다음 두 가지 중요한 성질이 성립하며, 중학교 2학년 수학교과서(강옥기 · 정순영 · 이환철, 2002a; 구광조 · 황선욱, 1998 외 다수)에 이 성질들이 제시되어 있다.

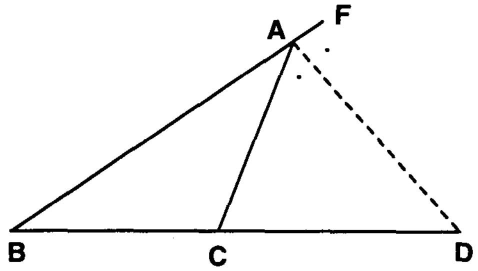
정리 1(삼각형 내각의 이등분선 성질). 삼각형 ABC에서 ∠A의 내각의 이등분선을 $\overline{AD}$라 하면(<그림 1> 참조), $\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{DC}$가 성립한다.



<그림 1>

정리 2(삼각형 외각의 이등분선 성질). 삼각형 ABC에서 ∠A의 외각의 이등분선을 $\overline{AD}$라 하면(<그림 2> 참조), $\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{DC}$가 성립한다.

두 정리가 구체적으로 어떠한 유사점을 가지고 있으며, 한 정리에서 다른 정리를 유추를 통해 추측할 수 있는 가능성에 대해 조사해 보기로 한다. 이를 위해, 삼각형에서 내각의 이등분선과 외각의 이등분선을 각각 작도하면 다음과 같다.



<그림 2>

<그림 1>에는 삼각형에서 내각의 이등분선이 작도되어 있으며, <그림 2>는 외각의 이등분선을 나타내고 있다. 알려진 바와 같이, 같은 범주에서 생각할 수 있는 두 대상에 대한 유추 모델은 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다(한인기 · 이상근, 2000).

대상 A가 성질 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, x를 가지고 있다. 대상 B가 성질 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n을 가지고 있다.
결론: 대상 B가 아마도 성질 x를 가지고 있을 것이다

이를테면, 삼각형의 내각의 이등분선의 성질(정리 1)에서 외각의 이등분선의 성질(정리 2)을 유추를 통해 추측한다고 하자. 이때, 삼각형에서 내각의 이등분선(<그림 1> 참조)이 대상 A가 되며, 외각의 이등분선(<그림 2> 참조)이 대상 B가 된다. 대상 A의 성질을 분석하면 다음과 같다.

① 삼각형 ABC에 관련된 선분이다.
② 삼각형의 한 꼭지점에서 그은 선분이다.
③ 삼각형의 꼭지점에서 대변으로 그은 선분이다.
④ 각의 이등분선을 그은 꼭지점의 각(∠A)에 관련된

등식이 성립한다(∠BAD = ∠CAD).

⑤ 비례식 $\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{DC}$이 성립한다.

이제, <그림 2>의 외각의 이등분선의 성질을 분석하면 다음과 같다.

㉠ 삼각형 ABC에 관련된 선분이다.

㉡ 삼각형의 한 꼭지점에서 그은 선분이다.

㉢ 삼각형의 꼭지점에서 대변의 연장선에 그은 선분이다.

㉣ 각의 이등분선을 그은 꼭지점의 각(∠A)에 관련된 등식이 성립한다(∠CAD = ∠DAF).

삼각형에서 내각의 이등분선과 외각의 이등분선은 살펴본 것과 같이 유사한 특성들을 가지고 있으며, 이에 근거하여 '대상 B인 외각의 이등분선이 아마도 대상 A의 특성 ⑤를 가지고 있을 것이다.'라고 유추할 수 있을 것이다. 그런데, 추측하는 과정에서 한 가지 문제가 생긴다. 대상 B에서 ⑤의 비례식, 즉 $\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{DC}$이 성립할 것이라고 추측할 것인가? 아니면, 대상 A의 특성 ⑤와 같이 어떤 선분들 사이의 비례식이 성립할 것이라고 추측할 것인가? 이때, ⑤의 비례식 자체만 유추하는 것은 위험할 것이다. 예를 들면, <그림 2>에서 문자들이 B-C-D와 같은 순서로 표시되지 않고, <그림 1>과 같이 B-D-C와 같은 순서로 표시되었다면, ⑤의 비례식 $\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{DC}$은 <그림 2>에서는 성립하지 않을 것이기 때문이다.

한편, 대상 B에서 대상 A의 ⑤와 같이 어떤 선분들 사이의 비례식이 성립할 것이라고 추측하는 경우에는, 어떤 선분들 사이의 비례 관계가 성립하는가에 대해 결정해야만 정교한 유추를 할 수 있다. 이 물음에 답하기 위해, 대상 A의 특성 ⑤를 좀더 분석하여 보자.

$\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{DC}$을 보면, 등식의 좌변에 있는 선분들은 모두 꼭지점 A를 포함하며, 등식의 우변에 있는 선분들은 꼭지점 D를 포함하고 있다. 꼭지점 A와 D는 각각 어떤 특성을 가지는가? 이들은 각의 이등분선의 끝점이다. 비례식 $\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{DC}$에서 좌변에 있는 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$는 각의 이등분선의 한 끝점 A를 공유하는 삼각형의 두 변이고, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$는 각의 이등분선의 다른 끝점과 삼각형의 두 꼭지점을 연결한 선분이 된다. 이러한 분석으로부터 대상 B인 외각의 이등분선에 대해 유추를 이용한 강력한 추측을 할 수 있다: 대상 A에서와 같은 비례식이 대상 B에 대해서도 성립할 것이라 추측할 수 있는데, 비례식에서 좌변은 외각의 이등분선의 한 끝점 A를 공유하는 삼각형의 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)이 될 것이며, 우변은 외각의 이등분선의 다른 끝점에서 삼각형의 꼭지점을 연결한 선분들($\overline{DB}$, $\overline{DC}$)이 될 것이다.

결국, 우리는 대상 B에 대해 다음과 같은 유추를 할 수 있다: 삼각형 ABC의 각 A의 외각의 이등분선 $\overline{AD}$에 대하여, 아마도 $\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{DC}$가 성립할 것이다.

이러한 추측은 다양한 방법으로 증명될 수 있으며, 다음 장에서 내각의 이등분선의 성질인 정리 1을 증명하는 방법으로부터 유추를 통해 외각의 이등분선의 성질을 증명하는 방법을 자세히 살펴보기로 한다.

한편, 유추를 통한 삼각형의 내각의 이등분선과 외각의 이등분선 성질의 탐구 과정에서 삼각형에서 각의 이등분선에 대한 다음의 흥미로운 일반화를 얻을 수 있다: 삼각형에서 꼭지점 A를 포함하는 각의 이등분선 AD에 대해, 각의 이등분선의 한 끝점 A를 공유하는 삼각형의 변의 비 $\overline{AB}$: $\overline{AC}$는 각의 이등분선의 다른 끝점 D에서 삼각형의 꼭지점을 연결한 선분의 비 $\overline{DB}$: $\overline{DC}$와 같다.

(2) 중학교 수학 교과서 분석

정리 1과 정리 2는 중학교 2학년 기하 영역에서 다루어지고 있다. 다양한 수학교과서를 분석해 보면, 보통 정리 1은 예제로서 정리 2는 문제로 증명 없이 제시되고 있다. 그러나, 교과서에 따라서는 정리 1만 예제 혹은 문제로 제시되는 경우도 있다. 이제, 교과서에서 정리 1과 정리 2를 다루는 방법에 대해서 살펴보자.

박배훈·정창현(1998a)은 정리 1은 예제로서 증명과 함께 제시되었으며, 정리 2는 종합 확인 문제로서 풀이 없이 문제만 제시되어 있다. 본 연구에서는 정리 2에 대한 증명 방법을 교사용 지도서(박배훈·정창현, 1998b)에 제시된 방법을 소개한다. 교사들이 수학교과서를 가지고 교수-학습을 준비할 때 가장 일반적으로 사용되는 보조물이 교사용 지도서이기 때문에, 교사들이 교사용 지도서에 제시된 해결 방법을 학생들에게 소개할 가능성이 많기 때문이다.

우선, 정리 1에 대한 박배훈·정창현(1998a)의 교과서

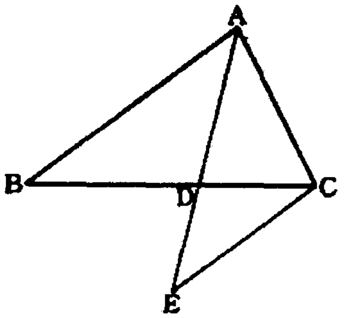
에 제시된 증명을 살펴보자. △ABC의 ∠A의 이등분선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 할 때, $\overline{AB}:\overline{AC} = \overline{BD}:\overline{DC}$임을 증명하여 보자. 꼭지점 C를 지나 $\overline{AB}$와 평행인 직선이 $\overline{AD}$의 연장선과 만나는 점을 E라고 하자.

∠CEA = ∠BAE (엇각) --- ①

이므로 ∠CEA = ∠EAC이다. 따라서 △CAE는 두 밑각의 크기가 같으므로, 이등변 삼각형이다. 그러므로, $\overline{AC} = \overline{CE}$이다.

한편, △ABD와 △ECD에서

∠ADB = ∠EDC(맞꼭지각) --- ②



<그림 3>

①, ②에서 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같으므로

△ABD ∽ △ECD

그러므로, $\overline{AB}:\overline{EC} = \overline{BD}:\overline{CD}$이다.

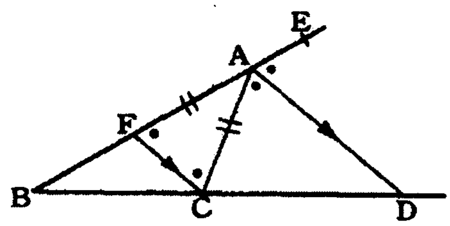
따라서, $\overline{AB}:\overline{AC} = \overline{BD}:\overline{CD}$이다. □

기술한 것과 유사한 증명 방법을 다른 교과서에서도 찾아볼 수 있는데, 예를 들면 구광조 · 황선욱(1996)도 정리 1의 증명에 같은 접근을 취하고 있으나, 여기에는 정리 2가 제시되어 있지 않다. 이제, 정리 2에 대한 박배훈 · 정창현(1998b)의 교사용 지도서에 제시된 해결 방법을 살펴보자.

$\overrightarrow{BA}$에 점 E를 잡고, 점 C에서 $\overline{AD}$에 평행선을 그어 $\overline{AB}$와 만나는 점을 F라 하면, ∠AFC = ∠EAD, ∠ACF = ∠CAD.

따라서, △ACF는 이등변삼각형이다.

∴ $\overline{AF} = \overline{AC}$



<그림 4>

또한, △BDA ∽ △BCF이므로,

$\overline{AB}:\overline{AF} = \overline{DB}:\overline{DC}$

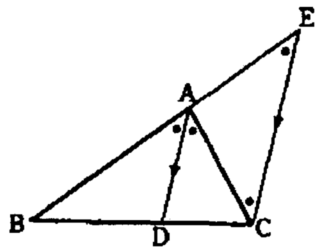
그런데, $\overline{AF} = \overline{AC}$이므로,

$\overline{AB}:\overline{AC} = \overline{DB}:\overline{DC}$ □

이미 정리 1과 정리 2는 각의 이등분선의 성질이라는 유사점을 바탕으로, 정리 1로부터 정리 2를 유추를 통해 얻을 수 있음을 살펴보았다. 정리 1과 2를 교과서에 제시하여 학생들에게 두 정리 사이의 공통점을 파악하게 하거나 한 정리에서 다른 정리를 유추하도록 하는 기회를 제공하는 것은 바람직하기 때문에, 수학교과서에 두 정리를 모두 소개하는 것은 바람직할 것이다.

강옥기 · 정순영 · 이환철(2002a)에서 정리 1은 예제로, 정리 2는 발전 문제로 제시하였는데, 박배훈 · 정창현(1998a)의 증명과는 다른 증명 방법으로 다음과 같이 제시하고 있다.

그림과 같이 점 C를 지나고 $\overline{AD}$에 평행한 직선을 그어 $\overline{BA}$의 연장선과의 교점을 E라고 하면, ∠BAD = ∠AEC(동위각), ∠DAC = ∠ACE(엇각).



<그림 5>

그런데, ∠BAD = ∠DAC이므로,

∠AEC = ∠ACE

따라서, $\overline{AC} = \overline{AE}$ --- ①

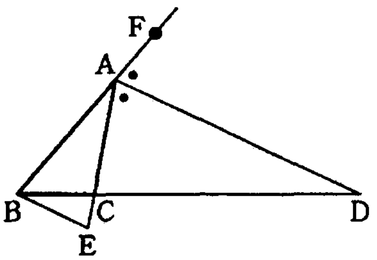
△BCE에서 $\overline{AD} \,//\, \overline{EC}$이므로,

$\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{DC}$ --- ②

①, ②에서 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ □

정리 1에 대한 강옥기 · 정순영 · 이환철(2002a)의 증명과 유사한 증명은 박두일 · 신동선 · 강영환(1998)에서도 찾아볼 수 있다. 이제, 정리 2에 대한 증명을 살펴보자. 정리 2는 발전학습에 문제로써 제시되었기 때문에, 교사용 지도서(강옥기 · 정순영 · 이환철, 2002b)에 기술된 증명 방법을 기술하면 다음과 같다.

그림과 같이 점 B를 지나 $\overline{AD}$와 평행한 직선이 $\overline{AC}$의 연장선과 만나는 점을 E라고 하면, $\overline{AD} \,//\, \overline{BE}$이므로, $\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$ --- ①



<그림 6>

한편, ∠DAC = ∠AEB(엇각), ∠FAD = ∠ABE(동위각)이므로,

∠ABE = ∠AEB. 따라서, $\overline{AB} = \overline{AE}$ --- ②

①, ②에서 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ □

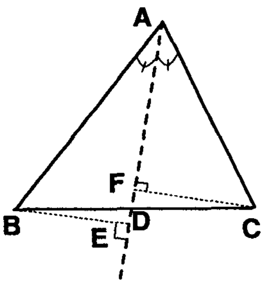
강옥기 · 정순영 · 이환철(2002a)에서 주목할 만한 것들 중의 하나는 정리 1과 정리 2가 연결되어 제시된다는 점이다. 박배훈 · 정창현(1998a)은 정리 1은 253쪽에 정리 2는 282쪽에 제시되어 있는 반면, 강옥기 · 정순영 · 이환철(2002a)은 정리 1이 107쪽에 정리 2는 108쪽에 제시하였다. 그 결과, 강옥기 · 정순영 · 이환철(2002a)은 학생들이 정리들 사이의 관련성을 파악하는데 훨씬 용이할 것으로 생각된다.

한편, 박배훈 · 정창현(1998a)은 정리 1은 변 $\overline{AB}$에 평행하고 점 C를 지나는 보조선을 이용하여 증명하였지만, 정리 2는 각의 이등분선 $\overline{AD}$에 평행하고 점 C를 지나는 보조선을 이용하여 증명하였다. 그리고, 강옥기 · 정순영 · 이환철(2002a)은 정리 1을 각의 이등분선 $\overline{AD}$에 평행하고 점 C를 지나는 보조선을 긋고, 이등분 삼각형의 성질을 이용하여 증명하였고, 정리 2는 각의 이등분선 $\overline{AD}$와 평행하고 점 B를 지나는 보조선을 이용하여 증명하였다.

살펴본 것처럼, 박배훈 · 정창현(1998a, 1998b)이나 강옥기 · 정순영 · 이환철(2002a, 2002b)이 정리 1과 정리 2에 대한 서로 다른 증명 방법을 제시한 것은 학생들에게 다양한 증명의 아이디어를 제시한다는 측면에서는 의의가 있지만, 학생들에게 스스로 증명을 발견하는 기회를 제공한다는 측면에서는 어려움을 유발시킬 수도 있을 것이다.

마지막으로 정리 1에 대한 다른 증명을 하나 더 살펴보자. 김응태 · 박승안 · 오연장 · 신현용(1996)은 정리 1이 예제로서 제시되었으며, 다음과 같은 증명 방법이 기술되어 있다.

꼭지점 B, C에서 $\overleftrightarrow{AD}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자.



<그림 7>

△ABE와 △ACF에서, ∠BAE = ∠CAF, ∠AEB = ∠AFC = 90°

이므로, △ABE ∽ △ACF이다. 따라서

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$ --- ①

마찬가지로, △BDE와 △CDF에서,

$\angle BDE = \angle CDF$, $\angle BED = \angle CFD = 90°$
이므로, $\triangle ADE \backsim \triangle CDF$이다. 따라서

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \text{ --- ②}$$

위의 ①과 ②에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}, \text{즉 } \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}. \square$$

이 증명은 꼭지점 B, C에서 $\angle A$의 이등분선에 수선을 내려 얻어진 삼각형의 닮음을 이용하여 증명하는 방법이다. 정리 1에 대한 증명은 살펴본 것 이외에도 많이 알려져 있지만, 본 연구에서는 중학교 수학교과서에 기술된 것을 중심으로 살펴보았다.

3. 유추를 통한 각의 이등분선 성질 탐구

이미, 정리 1에서 유추를 통해 정리 2를 유추할 수 있음을 보였다. 이제, 정리 1에 대한 증명에서 정리 2에 대한 증명을 유추할 수 있음을 살펴보자. 본 연구에서는 첫째, 각의 이등분선의 끝점을 지나 삼각형의 다른 변에 평행한 보조선을 그어 증명하는 방법, 둘째 삼각형의 한 꼭지점을 지나 대변에 평행한 보조선을 그어 증명하는 방법, 셋째 삼각형의 한 꼭지점을 지나 각의 이등분선에 평행한 선분을 그어 증명하는 방법, 넷째 넓이와 사인을 이용하는 방법 등 네 가지 증명 방법을 소개하고자 한다.

먼저 정리 1에 대한 자세한 증명을 제시하고, 증명에 사용된 개념이나 아이디어를 추출하여, 추출된 아이디어를 정리 2의 증명을 위한 아이디어로 유추하여, 정리 2에 대한 자세한 증명을 소개한다.

(1) 각의 이등분선의 끝점을 지나 삼각형의 다른 변에 평행한 보조선

삼각형 내각의 이등분선에 대한 성질을 증명해 보자.

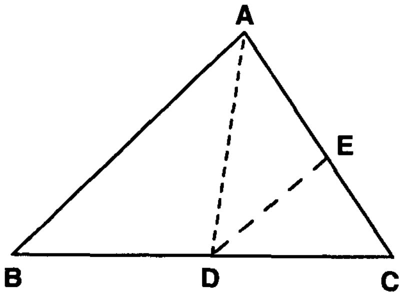
삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 내각의 이등분선 AD를 작도하고, 각의 이등분선의 한 끝점 D를 지나 $\overline{AB}$에 평행한 선분 DE를 작도하자(<그림 8> 참조).

$\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$이므로,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \text{ --- ①}$$

$\triangle CDE$와 $\triangle CBA$는 닮음이므로,

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \text{ --- ②}$$



<그림 8>

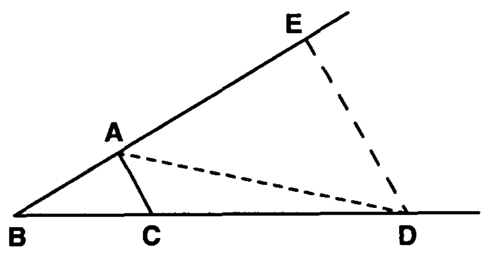
한편, $\overline{AB} \,//\, \overline{DE}$이므로, 평행한 직선에서 엇각의 성질에 의해 $\angle BAD = \angle ADE$. $\overline{AD}$가 각의 이등분선임을 고려하면, 삼각형 EAD는 $\angle EAD = \angle EDA$인 이등변삼각형이다. 그러므로, $\overline{ED} = \overline{EA}$. 얻어진 등식을 ②에 대입하면,

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \text{ --- ③}$$

등식 ①과 ③을 연립하면, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$. $\square$

위에서 살펴본 증명 과정에 사용된 증명의 아이디어를 분석해 보자. 첫째, 각의 이등분선 $\overline{AD}$의 끝점 D를 지나 삼각형 ABC의 다른 변 AB에 평행한 선분 $\overline{DE}$를 보조선으로 작도하였고, 둘째, 보조선의 평행성으로부터 증명하려는 비례식 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$의 요소들을 포함하는 비례식 ①을 얻고, 셋째, $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$의 닮음으로부터 비례식 ②를 얻고, 넷째, 삼각형 EAD가 이등변삼각형이라는 것으로부터 등식을 얻고, 다섯째, 얻어진 세 등식을 연립하여 구하는 비례식을 증명하였다.

이제, 삼각형 ABC에서 꼭지점 A의 외각의 이등분선에 관한 성질을 증명해 보자. 이를 위해, 외각의 이등분선 $\overline{AD}$의 끝점 D를 지나 $\overline{AC}$와 평행한 선분 $\overline{DE}$를 작도하자(<그림 9> 참조).



<그림 9>

우선, $\overline{AC} // \overline{ED}$로부터,

$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$ --- ①

그리고, △BCA와 △BDE가 닮음이므로,

$\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}$ --- ②

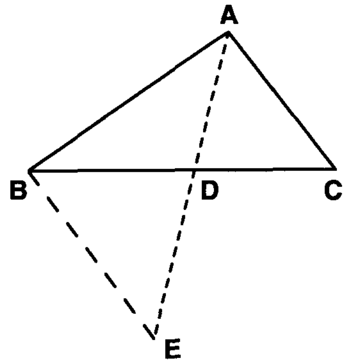
한편, $\overline{AD}$가 각의 이등분선이므로, ∠CAD = ∠EAD 이고, $\overline{AC} // \overline{ED}$이므로 엇각의 성질에 의해 ∠CAD = ∠ADE. 이로부터, 삼각형 EAD는 ∠EAD = ∠EDA인 이등변삼각형이고, $\overline{EA} = \overline{ED}$. 얻어진 등식을 ①에 대입하여, 등식 ①과 ②를 연립하면, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$. □

삼각형에서 외각의 이등분선 성질에 대한 증명을 살펴보면, 삼각형의 내각의 이등분선 성질을 증명할 때 사용했던 아이디어와 절차가 유추되어 사용되었음을 볼 수 있다. 이러한 증명 방법의 유추를 통해, 학생들은 수학 정리들 사이의 관련성을 파악하며, 익숙하지 않은 문제 상황에 자기 주도적으로 접근할 수 있는 가능성을 가지게 된다.

(2) 삼각형의 한 꼭지점을 지나 대변에 평행한 보조선

삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선 $\overline{AD}$, 꼭지점 B를 지나 $\overline{AC}$에 평행하고 $\overline{AD}$의 연장선과 점 E에서 만나는 선분 $\overline{BE}$를 작도했다고 하자(<그림 10> 참조).

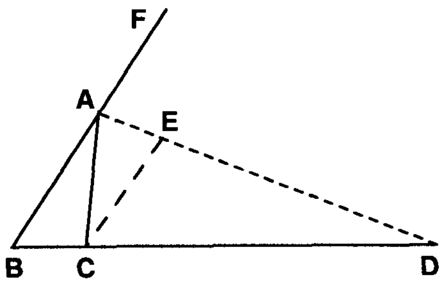
$\overline{BE} // \overline{AC}$이므로 엇각의 성질에 의해, ∠BED = ∠CAD. 그러므로, △BED ∽ △CAD. 이로부터, $\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{BE} : \overline{BD}$. 한편, ∠BEA = ∠BAE이므로, 삼각형 BAE는 이등변 삼각형이고, $\overline{BE} = \overline{AB}$. 그러므로, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$. □



<그림 10>

문제해결 과정을 분석해 보면, 첫째, $\overline{AC}$에 평행한 보조선 $\overline{BE}$에 의해 닮음인 △BED와 △CAD가 얻어지고, 이로부터 증명하려는 비례식의 요소들을 포함하는 비례식을 얻고, 둘째, 평행선의 성질과 각의 이등분선의 정의로부터 삼각형 BAE가 이등변 삼각형임을 보여 선분에 관한 등식을 얻었고, 셋째 첫 번째와 두 번째 과정에서 얻어진 등식들을 연립하여 구하는 비례식을 얻었다. 이 과정을 삼각형의 외각의 이등분선 성질 증명에 유추하여 보자.

삼각형 ABC의 꼭지점 C를 지나 $\overline{AB}$에 평행하고 각의 이등분선 $\overline{AD}$와 점 E에서 만나는 선분 $\overline{CE}$를 작도하자(<그림 11> 참조).



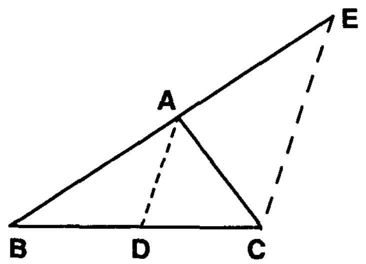
<그림 11>

$\overline{AB} // \overline{CE}$이므로, △DCE ∽ △DBA. 이로부터, $\overline{DC} : \overline{DB} = \overline{CE} : \overline{AB}$. 한편, $\overline{AB} // \overline{CE}$이므로

엇각의 성질에 의해, $\angle FAE = \angle AEC$. 그러므로, 삼각형 CAE는 $\angle CAE = \angle CEA$인 이등변 삼각형이고, $\overline{CE} = \overline{CA}$. 얻어진 등식과 $\overline{DC} : \overline{DB} = \overline{CE} : \overline{AB}$로부터, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$. □

(3) 삼각형의 한 꼭지점을 지나 각의 이등분선에 평행한 보조선

삼각형 ABC의 꼭지점 C를 지나 각의 이등분선 $\overline{AD}$에 평행한 선분 CE를 작도하자(<그림 12> 참조).

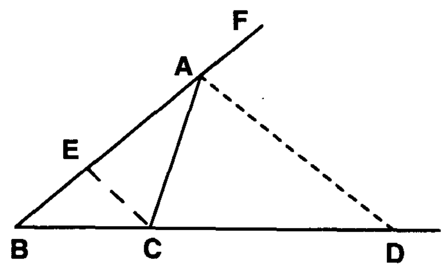


<그림 12>

$\overline{AD} \,//\, \overline{CE}$이므로, $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BA} : \overline{AE}$. 한편, 동위각의 성질에 의해 $\angle BAD = \angle AEC$이고, 엇각의 성질에 의해 $\angle DAC = \angle ACE$. 그러므로, 삼각형 ACE는 $\angle ACE = \angle AEC$인 이등변삼각형이며, $\overline{AC} = \overline{AE}$. 얻어진 등식과 $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BA} : \overline{AE}$로부터, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$. □

증명 과정을 분석해 보면, 첫째, 삼각형의 한 꼭지점 C를 지나 각의 이등분선 $\overline{AD}$에 평행한 선분을 작도했고, 둘째, 선분의 평행으로부터 증명하려는 비례식의 요소들이 포함된 비례식을 얻었고, 셋째, 평행선의 성질을 이용하여 이등변삼각형을 찾아 선분에 관한 등식을 얻었고, 넷째, 둘째와 셋째에서 얻어진 식을 연립하여 구하는 등식을 증명하였다.

이제, 분석된 아이디어를 이용하여 정리 2를 증명해 보자. 삼각형 ABC에서 외각의 이등분선 $\overline{AD}$에 평행하고 꼭지점 C를 지나는 선분 $\overline{CE}$를 작도하자(<그림 13> 참조).

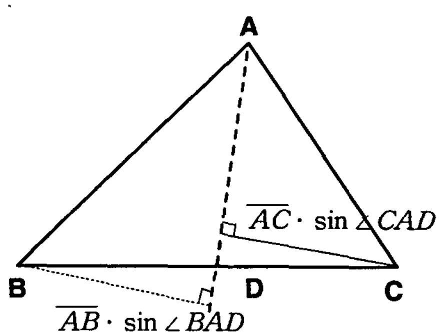


<그림 13>

$\overline{CE} \,//\, \overline{AD}$이므로, $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{BA} : \overline{AE}$. 한편, 동위각의 성질에 의해 $\angle AEC = \angle FAD$이고, 엇각의 성질에 의해 $\angle ACE = \angle CAD$. 그러므로, 삼각형 AEC는 $\angle AEC = \angle ACE$인 이등변삼각형이며, $\overline{AC} = \overline{AE}$. 얻어진 등식과 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{BA} : \overline{AE}$로부터, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$. □

(4) 넓이와 사인을 이용하는 방법

삼각형 ABC에서 내각의 이등분선 $\overline{AD}$를 작도하고 (<그림 14> 참조), $\triangle ABD$의 넓이를 S_1, $\triangle ACD$의 넓이를 S_2라 하자.



<그림 14>

사인 공식에 의해,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\angle CAD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \text{ --- ①}$$

한편, $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$의 밑변을 각각 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$라 하면, 이들의 높이가 같게 되므로,

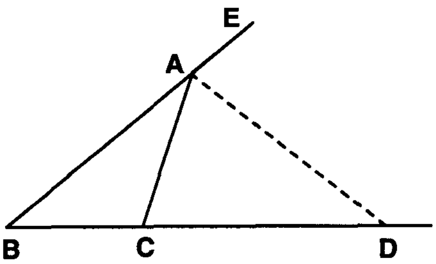
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \text{ --- ②}$$

얻어진 등식 ①과 ②를 연립하면,

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$. □

증명 과정을 분석해 보면, 첫째 $\triangle$ABD의 넓이를 S_1, $\triangle$ACD의 넓이를 S_2라 하고, 사인값을 이용한 삼각형의 넓이 공식을 이용하여 넓이를 각각 구한 후, $S_1 : S_2$를 구했고, 둘째 $\triangle$ABD와 $\triangle$ACD의 밑변을 각각 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$라 하면, 이들의 높이가 같다는 것을 이용하여 $S_1 : S_2$를 구했고, 셋째 첫 번째와 두 번째에서 얻어진 등식을 연립하여 구하는 비례식을 구했다.

이제, 분석된 아이디어를 이용하여 정리 2를 증명해 보자. 삼각형 ABC에서 외각의 이등분선 $\overline{AD}$를 작도하고(<그림 15> 참조), $\triangle$ABD의 넓이를 S_1, $\triangle$ACD의 넓이를 S_2라 하자.



<그림 15>

사인 공식에 의해,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\angle CAD}$$

$$= \frac{\overline{AB}\cdot\sin(180-\angle EAD)}{\overline{AC}\cdot\sin\angle CAD}$$

$$= \frac{\overline{AB}\cdot\sin(180-\angle CAD)}{\overline{AC}\cdot\sin\angle CAD}$$

$$= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \text{ --- ③}$$

한편, $\triangle$ABD와 $\triangle$ACD의 밑변을 각각 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$라 하면, 이들의 높이가 같게 되므로,

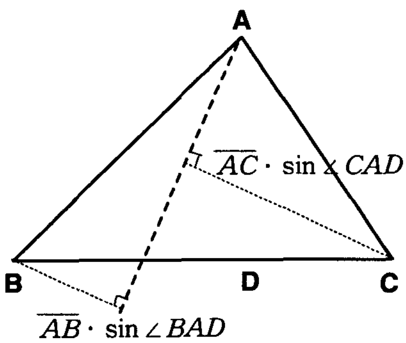
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \text{ --- ④}$$

얻어진 등식 ③과 ④를 연립하면,

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$. □

네 번째 증명 방법은 고등학교 수준에서 다루어 질 수 있는 것으로, 중학교 3학년에서 사인을 이용한 삼각형의 넓이 공식을 소개한 후에 탐구 문제로 제시할 수도 있을 것이다. 한편, 각의 이등분선의 성질은 도형 분야의 많은 문제들을 해결하는 중요한 정리이기 때문에, 중학교에서 이미 배운 것을 고등학교 과정에서 다시 한번 반복하는 것도 수학적 지식의 체계화란 측면에서도 의미가 있을 것이다.

위에서 살펴본 증명 과정에서 한 가지 흥미로운 사실을 발견할 수 있다. 지금까지는 삼각형의 내각, 외각에서 각의 이등분선을 그었을 경우 몇몇 선분들 사이의 비례 관계를 살펴보았는데, 삼각형의 내각, 외각의 꼭지점에서 각의 이등분선이 아닌 일반적인 선분을 그었을 경우 선분들 사이의 비례 관계를 발견할 수 있다. 즉, (4)의 등식 ①에서 $\overline{AD}$가 각의 이등분선이 아니라면(<그림 16> 참조),



<그림 16>

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\angle CAD} = \frac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAD}{\overline{AC}\cdot\sin\angle CAD} \text{ --- ⑤}$$

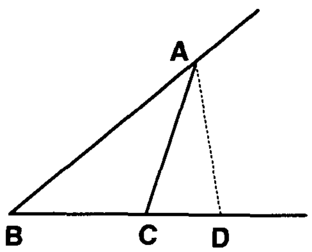
와 같이 쓸 수 있고, 한편 등식 ②는 $\overline{AD}$가 각의 이등분선이 아니어도 성립한다. 그러므로, 등식 ②와 ⑤로부터,

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB}\cdot\sin\angle BAD : \overline{AC}\cdot\sin\angle CAD \text{ --- ⑥}$$

얻어진 등식은 삼각형 내각의 이등분선 성질인

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$의 일반화라고 할 수 있다. 즉, 삼각형의 한 내각의 꼭지점에서 대변에 선분을 그으면, 등식 ⑥이 성립하며, ∠BAD = ∠CAD인 경우에는 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$이 성립한다.

한편, 삼각형의 한 외각의 꼭지점에서 마주보는 변의 연장선에 선분을 그었다고 하면(<그림 17> 참조), 몇몇 선분들 사이의 비례 관계를 유추할 수 있다.



<그림 17>

등식 ③에서

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\angle CAD}$$

$$= \frac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAD}{\overline{AC}\cdot\sin\angle CAD} \text{ --- ⑦}$$

등식 ④는 그대로 성립하므로, 등식 ④와 ⑦로부터

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB}\cdot\sin\angle BAD : \overline{AC}\cdot\sin\angle CAD \text{ --- ⑧}$$

이 성립한다.

결국, 등식 ⑥과 ⑧은 각각 정리 1과 정리 2의 일반화이며, 앞의 2장과 3장에서 살펴본 것과 같은 유추에 근거하여 등식 ⑥과 ⑧ 사이의 관계 탐구나 증명 과정에 대한 효율적인 탐색을 수행할 수 있을 것이다.

4. 결 론

본 연구에서는 일반적인 수준의 중등 학생들에게 수학적 대상을 분석하여 유추를 통해 새로운 추측을 제기하고, 유추를 통해 추측을 증명하며, 얻어진 결론을 일반화할 수 있는 탐구 활동 경험을 제공할 수 있는 교수-학습 자료를 개발하였다. 이를 위해, 중학교 2학년 수학교과서에 제시된 삼각형 내각과 외각의 이등분선 성질을 분석하였는데, 이들은 다음과 같이 기술할 수 있다.

정리 1(삼각형 내각의 이등분선 성질). 삼각형 ABC에서 ∠A의 내각의 이등분선을 $\overline{AD}$라 하면(<그림 1> 참조), $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$가 성립한다.

정리 2(삼각형 외각의 이등분선 성질). 삼각형 ABC에서 ∠A의 외각의 이등분선을 $\overline{AD}$라 하면(<그림 2> 참조), $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$가 성립한다.

본 연구에서는 정리 1에서 유추를 통해 정리 2를 추측할 수 있음을 유추 모델을 이용하여 상세히 기술하였다. 그러나, 다양한 수학교과서를 보면, 정리 1과 정리 2의 내용이 다루어지는 중학교 2학년 수학교과서에서는 이 두 정리 사이의 관계에 대한 기술이 포함되어 있지 않았다. 특히, 두 정리에 대한 증명에서도 서로 다른 접근을 취하고 있기 때문에, 한 정리에 대한 증명을 알았다고 하더라도 이에 대한 유추를 통해 나머지 정리의 증명을 자기 주도적으로 탐색하는 데는 어려움이 발생할 것으로 생각된다.

한편, 본 연구에서는 정리 1과 정리 2의 의미 자체의 관련성 뿐만 아니라, 증명 방법에서의 유사성도 보였다. 즉, 정리 1에 대한 상세한 증명의 아이디어를 분석하고, 이에 대한 유추를 통해 정리 2에 대한 증명을 얻을 수 있음을 보였다.

본 연구에서는 네 가지 증명 방법이 소개되었는데, 첫째 각의 이등분선의 끝점을 지나 삼각형의 다른 변에 평행한 보조선을 그어 증명하는 방법, 둘째 삼각형의 한 꼭지점을 지나 대변에 평행한 보조선을 그어 증명하는 방법, 셋째 삼각형의 한 꼭지점을 지나 각의 이등분선에 평행한 보조선을 그어 증명하는 방법, 넷째 넓이와 사인을 이용하는 방법 등이다. 이들 중에서 처음 세 가지 방법은 중학교 수준의 방법이며, 네 번째의 것은 고등학교 수준의 내용이다. 본 연구에서 고등학교 수준의 증명 방법도 소개한 이유는 삼각형의 각의 이등분선 성질이 문제해결 과정에 자주 활용되기 때문에, 고등학교에서도 삼각형에 대해 배우면서 이 성질을 반복하는 것도 수학적 지식의 체계화라는 측면에서 의미로울 것이기 때문이다. 특히, 삼각형의 내각, 외각의 꼭지점에서 각의 이등분선이 아닌 일반적인 선분을 그었을 경우 정리 1과 정리 2에 대한 일반화된 성질을 발견할 수 있다.

참 고 문 헌

강시중 (1987). 수학교육론, 서울: 교육출판사.

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2002a). 중학교 수학 8-나, 서울: (주) 두산.

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2002b). 중학교 수학 8-나 교사용 지도서, 서울: (주) 두산.

교육부 (1998). 수학과 교육과정(별책 8), 서울: 대한교과서 주식회사.

구광조 · 황선욱 (1996). 중학교 수학 2, 서울: 지학사.

김응태 · 박승안 · 오연장 · 신현용 (1996). 중학교 수학 2. 서울: 한샘출판(주).

박두일 · 신동선 · 강영환 (1998). 중학교 수학 2, 서울: (주) 교학사.

박배훈 · 정창현 (1998a). 중학교 수학 2. 서울: (주) 교학사.

박배훈 · 정창현 (1998b). 중학교 수학 2 교사용 지도서. 서울: (주) 교학사.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

한인기 (2001). 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구, 중등교육연구 13, pp.205-218, 경남: 경상대학교 중등교육연구원.

한인기 · 이상근 (2000). 유추를 활용한 기하 심화학습 자료 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> 5, pp. 165-174, 서울: 한국수학교육학회.

Polya G. (1954). *Induction and analogy in mathematics.* New Jersey: Princeton university press.

<러시아어 참고문헌>

구세프 V.A. (1994). *어떻게 학생들이 수학을 좋아하도록 도울 것인가?* 모스크바: 아반가르드.

스딸야르 A.A. (1974). *수학의 교수학.* 민스크: Высшая школа.

우예모프 A.I. (1964). *유추의 기본 형태와 결론 유출의 규칙들. 과학적 인식의 문제들.* 모스크바: 과학 출판사.

An Investigation of Bisector of Interior and Exterior Angles in Triangle by Using Analogy

Han, Inki

Gyeongsang National University

In this paper we consider some properties of bisector of interior angle(theorem 1) and exterior angle(theorem 2) in triangle by using analogy. As a result of analyzing various mathematics textbooks we have known that they focused not on relation between two theorems, but on describing two theorems. We have seen that theorem 2 is able to be inferred from theorem 1 by using analogy. After proving theorem 1 by some methods we analyze proof process, extract proof ideas, and analogize some ideas for proving theorem 2. From this we are able to find relationships between theorem 1 and 2.

* ZDM classification : U23
* MSC2000 classification : 97U20
* key word : analogy, bisector of angle, analyzing mathematics textbook, proof idea