

표면미소균열의 극치통계해석을 이용한 피로수명예측

이동우* · 홍순혁* · 조석수** · 주원식†
(2001년 8월 6일 접수 2002년 6월 11일 심사완료)

Prediction of Fatigue Life using Extreme Statistics Analysis

Dong Woo Lee, Soon Hyeok Hong, Seok Swoo Cho and Won Sik Joo

Key Words: Surface Micro-Crack(표면미소균열), Extreme Statistical Analysis(극치통계해석), Plane Bending Fatigue Test(평면굽힘피로시험), Median Rank Method(평균순위법)

Abstract

Fatigue fracture in machine components is produced by surface micro-crack from stress concentration area such as notch and material defect. It is difficult to predict the remaining fatigue life of mechanical components because the surface micro-crack on critical area initiates and grows with statistical distribution. Plane bending fatigue tests were carried out on the plain specimen of Al 2024-T3 and the initiation and growth behavior of surface micro cracks were observed. The statistical distribution of surface length of multiple micro cracks and their maximum length were investigated. The maximum surface crack length distributions were analyzed on the basis of the statistics of extremes in order to examine the prediction of remaining life.

1. 서 론

실제 기계 구조물에서 발생하는 파괴는 노치나 재료 결함과 같은 응력 집중을 받는 장소로부터 발생하여 전파하는 표면미소균열에 의한 것이 대부분이다. 이러한 표면미소균열은 수명 초기에 재료 표면에 불규칙한 분포를 보이면서 발생하게 되고 수명 말기에 서로 인접한 균열 사이에서 서로 합체를 일으키기 때문에 기존의 탄소성파괴역학(elastic-plastic fracture mechanics)에 기초한 피로수명평가법으로 잔존수명을 예측하게 되면 실제 수명과의 사이에 상당한 오차를 발생시킬 것으로 생각된다.⁽¹⁻³⁾ 따라서 이하의 연구자들은 상술의 개념에 기초를 둔 통계적 이론을 피로수명평가에 도입함으로써 상당한 성과를 거두었다.

Kitagawa⁽¹⁾ 등은 일정한 면적내에서 발생하는 표

면미소균열의 데이터를 이용하여 표면미소균열의 피로파괴과정을 Monte Carlo법으로 시뮬레이션하므로써 피로수명의 추정가능성을 제시하였다.

Goto⁽²⁾ 등은 S20C 평활재의 회전굽힘 피로실험을 실시하여 표면미소균열전파속도의 산포 특성과 이것을 기초로 하는 평균전파속도를 표면미소균열전파법칙으로 정리하므로써 거시균열전파기동에서 표면미소균열의 평균전파속도를 추정하였다.

이상과 같은 연구에서는 부재의 잔존수명을 평가하기 위하여 표면미소균열의 분포특성을 이용하거나 표면미소균열의 전파거동을 주로 사용하였다. 그러나 이러한 방법은 균열의 발생과 전파거동외에 균열간의 상대위치나 합체에 의한 균열전파속도의 가속화 현상을 함께 설명하여야 할 것으로 생각된다.

한편 평활재의 피로파괴는 미소균열의 발생 및 전파과정이 피로수명의 전 영역에 걸쳐서 일어나고 그 분포 형태도 아주 랜덤(random)하여 부재를 파단으로 유도하는 주균열을 검출하기란 매우 어려운 실정이며 이에 대한 수명 평가도 확립되어 있지 않다.

* 회원, 동아대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 삼척대학교 기계·정밀기계·자동차공학부

† 책임저자, 회원, 동아대학교 기계산업시스템공학부

E-mail : wsjoo@mail.donga.ac.kr

TEL : (051)200-6844 FAX : (051)200-7656

따라서 본 연구에서는 Al 2024-T3 합금을 이용하여 시험편내의 특정관찰영역내에서 발생한 표면미소균열길이의 통계적 분포 특성과 관찰영역을 균열전파방향과 평행하도록 분할하여 샘플영역에서 채취한 최대표면균열길이의 통계적 분포 특성을 정량적으로 평가한 뒤, 최대표면균열길이와 개수를 기초로 하는 극치통계해석(extreme statistical analysis)을 이용한 잔존수명평가법을 제안하므로써 기존의 평가 방법이 가진 결점을 극복하고자 한다.

2. 실험재료 및 방법

2.1 실험재료 및 시험편

본 연구에서 사용한 재료는 항공기 구조용으로 널리 이용되고 있는 두께 5mm인 Al 2024-T3 합금 판재로써, 그 화학적 성분과 기계적 성질은 Table 1과 2에 각각 나타내었다. 기계적 성질을 구하기 위한 인장시험은 정격하중이 15tonf인 만능재료시험기(INSTRON Model 1337)를 이용하였으며 시험편의 형상은 Fig. 1(a)에 보이고 있다. 피로시험편은 최대굽힘하중과 압연방향을 서로 일치시켜 92 mm×32mm×4.2mm의 크기로 절단하여 Fig. 1(b)와 같이 가공하였으며 응력집중계수는 1.05 이다.

2.2 실험장치 및 방법

2.2.1 표면미소균열분포시험

본 피로시험에 사용한 시험기는 생크형(Schenck type) 평면굽힘 피로시험기(Mori testing machine Co. model 5171)로써, 최대굽힘모멘트는 2kgf-m이고 매분 회전수는 1500rpm이다. 시험은 평균응력을 0으로 하는 하중제어로 수행되었으며 응력진폭 $\Delta\sigma$ 는 305MPa이었다. 반복수가 증가함에 따라 시험편의 중앙부에서 발생하고 전파되는 표면미소균열의 개수와 길이 및 위치는 시험편 중앙에 임의로 설정한 5mm×12mm의 영역내에서 100배의 현미경 사진으로 관찰 및 측정하였다.

Fig. 2는 5mm×12mm의 관찰영역을 동일 간격으로 평행하게 25개 분할한(0.2mm×12mm로 25개 분할)상태를 나타낸 것이다. 이와 같이 샘플 영역(sample area)의 폭을 0.2mm로 설정한 이유는 전반 복수에 대한 표면미소균열의 전파와 합체 거동을 미리 관찰한 결과, 최종파단선이 최대굽힘응력방

Table 1 Chemical compositions of 2024-T3 Al alloys (wt.%)

Cu	Mg	Mn	Fe	Si	Cr	Zn	Ti	Al
4.82	1.67	0.58	0.18	0.07	0.02	0.06	0.15	Bal

Table 2 Mechanical properties of 2024-T3 Al alloys

yield strength σ_{ys} (MPa)	tensile strength σ_{ts} (MPa)	elongation ϵ (%)	young's modulus E (GPa)
380	507	21.6	77.02

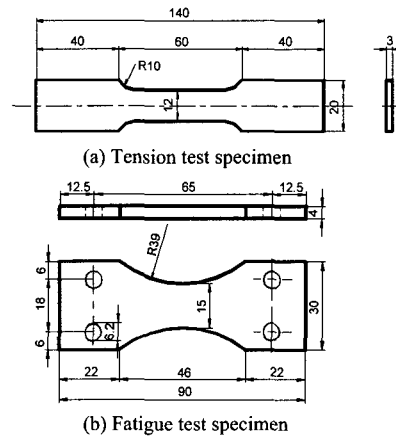


Fig. 1 Geometry and dimensions of test specimen(mm)

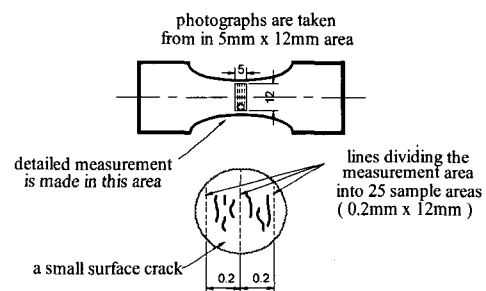


Fig. 2 Sampling method of crack length

향에 수직으로 0.2mm폭 이내에서 발생하였기 때문이다.

2.2.2 피로균열전파시험

피로균열전파시험은 표면미소균열분포시험을 수

행할 때의 응력수준과 동일하게 잡았으며 평활재를 피로파괴시키는 주균열을 시뮬레이션하기 위하여 지름 50 μ m의 드릴로 깊이 50 μ m의 인공미소결함을 시험편 중앙에 도입하였다. 균열전파거동을 관찰하기 위하여 균열길이는 이동식 망원현미경(배율 25배)을 피로시험기 상부에 부착하여 측정하였다. 또한, 인공미소결함시험편의 피로수명은 피로균열전과실험에서 도입된 드릴구멍으로 인하여 평활시험편에 비하여 3.5%정도 밖에 저하되지 않으므로 표면미소균열의 측정 한계를 60 μ m로 설정하여 관찰하였다.

3. 실험결과 및 고찰

3.1 Al 2024-T3 합금의 $\Delta\sigma$ -N곡선

Fig. 3은 Al 2024-T3 합금의 피로한도(fatigue limit)를 결정하기 위하여 응력진폭 $\Delta\sigma$ 와 반복수 N와의 관계를 나타낸 것으로 일반 탄소강과는 달리 명확한 절점(knee point)이 나타나지 않는 비철합금의 전형적인 $\Delta\sigma$ -N곡선임을 알 수 있다.⁽⁴⁾ 즉, 철 및 강철은 $\Delta\sigma$ -N곡선의 절점이 $10^6 \sim 10^7$ 반복수에서 나타나기 때문에 무한수명개념의 피로한도로 사용하고 있으나 본 연구에서 사용하는 Al 2024-T3합금의 경우 2×10^7 반복수에서도 절점이 생기지 않았다. 따라서 피로한도(fatigue limit) σ_w 는 Fig. 3의 $\Delta\sigma$ -N곡선에서 5×10^7 반복수에 대한 시간강도를 설정하여 구하였으며 그 값은 180MPa이었다.

3.2 표면미소균열의 특징

Fig. 4, Fig. 5는 Al 2024-T3 합금의 평활재 표면에 발생한 60 μ m이상의 표면미소균열길이 2a 및

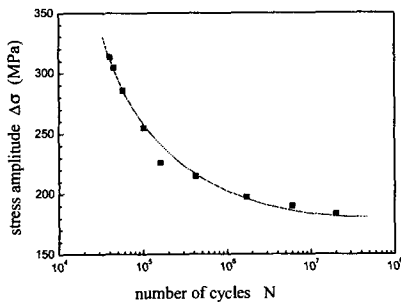


Fig. 3 $\Delta\sigma$ - N curve of Al 2024-T3

최대표면균열길이 $2a_{max}$ 의 분포를 Weibull 확률지⁽⁵⁾에 플롯한 결과를 나타낸 것이다. 이와 같은 분포 상태가 통계학적으로 3모수 Weibull 분포에 따르는지를 알아 보기 위하여 K.S(kolmogorov smimov) 검정⁽⁶⁾을 실시하였다. 즉, 균열길이 데이터를 $x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n$ 의 형태로 점증적으로 배열해 놓은 뒤 실제분포의 누적분포함수와 이론분포의 누적분포함수와의 차이 최대치 D_{max} 는 $N/N_f=0.66$ 에서 0.09211이며 유의수준(위험률) $\alpha = 0.1$ 이고 표본수가 101 개 인 경우의 D_n 이 0.1208을 고려하면 전자가 후자보다 훨씬 더 적은 값을 나타내므로 3모수 Weibull 분포에 따른다고 생각할 수 있다. 각 표본수는 $N/N_f=0.66, 0.83, 0.94$ 에 대하여 표면미소균열길이의 경우는 101, 140, 164 개 이고, 최대표면균열길이는 각 27 개 씩 이다. 이러한 결과를 각 반복수비로 Table 3에 정리하여 각각 나타내었다.

Fig 4, 5에서 3모수 Weibull 분포를 나타내는 각 곡선은 반복수비가 증가함에 따라 오른쪽으로 이동하고 있으며, 이것은 미소균열이 전체적으로 성장하기 때문이라고 생각된다. Al 2024-T3 합금에서 관찰된 표면미소균열길이는 전체 표면미소균열중 99% 이상이 1.5mm 이하의 범위내에 있으며 반복수가 증가함에 따라 균열 크기는 관찰영역의 설정이나 파단반복수 등에 큰 영향을 받게 되므로 피로손상의 누적에 따른 주요 파라미터를 관찰할 필요가 있을 것으로 생각된다. 즉, 반복수에 따른 누적상대두수는 짧은 균열의 경우 그다지 차이가 없지만 긴 균열의 경우 반복수에 크게 의존함을 알 수 있다. 특히, 그러한 경향은 2a에 관한 Weibull분포보다 $2a_{max}$ 의 Weibull분포가 훨씬 더 두드러지게 나타나고 있다. 따라서 $2a_{max}$ 을 이용

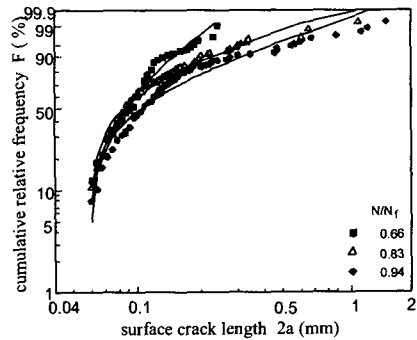


Fig. 4 Weibull distribution of surface crack length 2a

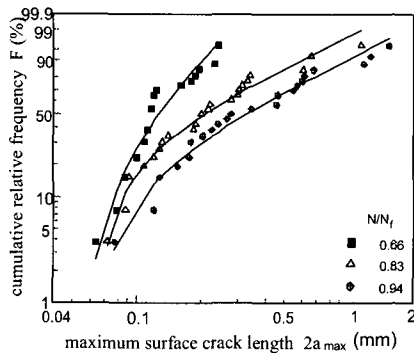


Fig. 5 Weibull distribution of maximum surface crack length 2a

Table 3 Values of the parameters and K-S testing ($\alpha = 0.1$)

	N/N _f	m	η	γ	ρ	D _{max}	D _n
2a	0.66	1.199	0.049	0.052	0.988	0.092	0.121
	0.83	0.656	0.048	0.059	0.985	0.077	0.103
	0.94	0.682	0.078	0.059	0.976	0.086	0.095
2a _{max}	0.66	1.713	0.091	0.053	0.969	0.212	0.238
	0.83	0.94	0.211	0.066	0.989	0.087	0.238
	0.94	0.996	0.379	0.066	0.985	0.074	0.238

하여 피로손상을 평가하는 것이 2a를 이용하는 것보다 누적상대숫수와와의 연관성이나 데이터 관찰이 용이하다는 관점에서 훨씬 더 신뢰성이 있을 것이라고 생각된다.

3.3 피로균열전파특성

Fig. 6은 표면피로균열의 전파과정을 선형적으로 정량화시키기 위해서 Fig. 6의 종축 2a를 로그 스케일로 취한 log 2a와 반복수 N의 관계를 나타내었다. 대부분의 미소피로균열이 전파하는 동안 안정적 선형관계를 유지하고 있으나 N_f가 41600 사이클 이상이 되는 영역에서는 선형적 범위를 벗어나게 된다. 이러한 현상은 급속파괴에 의하여 표면미소균열길이가 갑작스럽게 증대 또는 합체하므로써 일어나게 된다. 그러나 최종파단단계의 피로균열성장거동은 전체피로수명에 미치는 영향이 극히 미약하다고 생각할 수 있으므로 전피로수명이 미소피로균열전파과정에 지배된다고 가정할 수 있다. 따라서 시험편에 발생된 초기균열 길이를 2a₀, 최종균열길이를 2a_r라 하면 log 2a와 반

복수 N사이에 전체적으로 선형적 관계가 성립하며 그 관계식을 수명평가식이라 하며 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$N/N_f = \frac{1}{\log\left(\frac{2a_f}{2a_0}\right)} \times \log\left(\frac{2a}{2a_0}\right) \quad (1)$$

Fig. 7은 초기균열길이 2a₀를 0.03mm로, 최종균열길이 2a_r를 2.97mm(판폭의 20%)라 두었을 때 식 (1)에 기초로 둔 전파 거동과 실험으로 측정된 주균열길이의 전파거동을 비교하기 위하여 균열길이에 대한 반복수비 N/N_f를 나타낸 것이다. 그림 중의 실선은 식 (1)을 기초로 하는 주균열전파거동을 나타낸 것이며 ■은 실험에 의하여 측정된 값이다. 또한 파선은 이것을 기준으로 반복수비에 대하여 ± 10% 오차범위를 나타낸 것으로, 그림 중의 실험값과 식 (1)에 의한 값사이의 평균오차가 4.5%로서 거의 두 값이 일치하고 있으나 최종파단단계에서는 실험값이 실선을 크게 벗어나고 있다. 이러한 결과는 Fig. 6의 균열전파곡선에서 나타난 피로수명 말기의 비선형영역과 관련된 것으로 실선과 3.5%정도의 평균오차를 초래하고 있으므로 전피로수명에 미치는 영향은 극히 미소하다고 생각할 수 있다.

Fig. 8은 식 (1)에 사용되는 상수중 초기 균열길이 2a₀와 최종균열길이 2a_r를 달리 했을 때의 평균오차를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 초기균열길이에 상관없이 식 (1)에 의한 값과 실험값사이의 평균오차를 4%이내로 수렴시키기 위해서는 최종균열길이를 대략 3~4.5 mm(최종균열길이가 될수 있는 판폭의 20~30%)로 주어야 함을 알 수 있다. 이러한 결과는 균열전파시험편에서 발생한 주균열이 약 3~4.5mm를 초과 할 때 부재는 전피로수명의 94~96%를 소비하므로 공학적으로 이러한 부재는 파단된 것으로 생각할 수 있다. 평활재의 피로수명추정하기 위해서 사용되는 2a_r는 하중부하양식에 관계없이 균열전파경로의 15~30%로 잡는 것이 일반적이며 본 연구에서도 피로 수명추정의 정확도를 높이기 위하여 2a_r를 잡은 결과 위의 범위에 수렴되고 있다.⁽⁷⁾ 따라서 실제의 균열전파실험에서 얻은 최종균열길이 6.3mm를 식 (1)에 대입하여 구하게 되면 균열전파곡선의 비선형부분에 의하여 피로

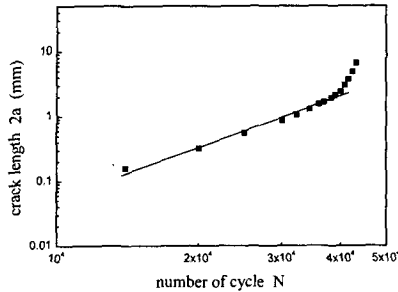


Fig. 6 Relation between crack length $\log(2a)$ and number of cycles N

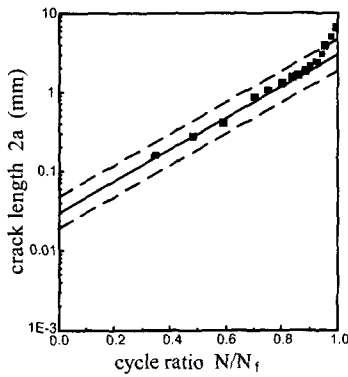


Fig. 7 Relation between crack length $\log(2a)$ and number of cycles N/N_f

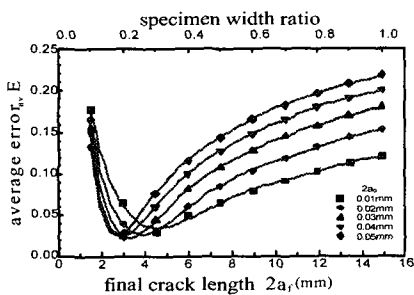


Fig. 8 Average error of N/N_f between fatigue damage model and experiment

수명이 실험값보다 17% 과대평가되므로서 잔존 수명추정시 최종균열길이는 균열전파경로길이에 의존함을 알 수 있다.

4. 극치통계법에 의한 최대균열길이의 추정

일반적으로 실은에서의 표면미소균열은 앞절에서 보는 것처럼 그 발생과 성장에 있어 Weibull 확률 분포를 이루고 있고 부식피로에서는 정규확률 분포⁽⁸⁾를 이루고 있으므로 이러한 통계적 성질이 손상기구 및 정도를 정량적으로 나타내는 파라미터라고 생각된다.

따라서 본 연구에서는 기름 탱크나 파이프등과 같이 부식성환경에서 최대부식피트의 크기를 이용하여 누설시간을 추정하는데 유용한 극치통계 해석(extreme statistical analysis)^(9,10)을 미소균열의 샘플 극값에 도입하여 부재 중의 최대균열길이를 추정하고자 한다.

극치통계해석은 샘플 면적에서 관찰되는 통계 변수의 최대값 분포를 해석하여 대상 면적(통계 변수가 발생한다고 생각하는 전면적)에서 발생할 수 있는 최대값을 예측하는 것으로, 이러한 최대값 분포는 다음 식과 같은 이중지수분포의 Gumble 분포⁽¹¹⁾를 이루게 된다.

$$F(x) = \exp \left[- \exp \left\{ - \frac{(x-\lambda)}{\alpha} \right\} \right] \quad (2)$$

단, x 는 극값으로 이용할 통계 변수, λ 는 위치 파라미터, α 는 척도 파라미터이다. 또한, 정규분포의 표준화 변수와 같은 개념으로 Gumble 분포에서는 기준화 변수 y 를 사용하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = \frac{x-\lambda}{\alpha} \quad (3)$$

따라서 식 (3)은 다음 식과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$F(y) = \exp \left[- \exp(-y) \right] \quad (4)$$

Fig. 9는 상술의 극치통계해석을 미소균열분포 쪽으로 응용하기 위하여 좌표축의 종축 좌측에 평균순위법(median rank method)에 의한 누적도수 $F(y)$ 를, 우측에 재귀기간(return period) T 를 잡았으며 횡축에 최대균열길이 $2a_{max}$ 를 잡아 극치 확률치를 만들었다. 이러한 극치 확률지에서 재귀

기간 T 는 샘플 면적내의 미소균열분포를 이용하여 대상면적내에서의 최대균열길이를 도식적 방법 또는 최소자승법에 의한 회귀 직선에 의하여 추정할 때 사용된다. 즉, 각 샘플면적중의 최대균열 길이를 극치 확률지에 나타내고 그러한 분포의 회귀 직선을 구한 다음 대상면적과 샘플면적과의 비인 재귀 기간 T 를 설정하여 회귀 직선을 T 까지 외삽시키므로써 대상면적 중에서 예상되는 최대균열길이를 구하였다.⁽¹²⁾

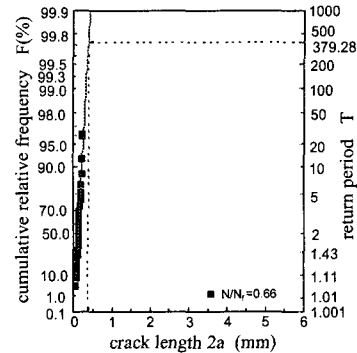
Fig. 9 (a), (b), (c)는 반복수비 $N/N_f = 0.66$, 0.83, 0.94에서 각 샘플의 최대 표면균열분포를 극치 확률지에 나타낸 것이다. 극치통계해석에 사용된 대상면적은 균열이 발생되어 파단에 이를 수 있는 위험 면적으로 설정하였으며 본 연구의 경우 시험편의 라운딩 부분의 면적인 910.3mm^2 로 잡았고, 샘플면적은 가로, 세로를 각각 0.2mm, 12mm로 설정하여 2.4mm^2 으로 하였다. 즉, 재귀기간 T 는 대상면적과 샘플면적의 비인 $910.3/2.4$ 이며 계산 결과 379.3이 되었다. 따라서 대상면적에서 나타날 수 있는 예상최대균열길이는 극치 확률지의 재귀기간 379.3에서 회귀직선으로 수평선을 긋고 다시 아래로 수직선을 내려 최대균열길이축과 만나는 점이다. 이상의 방법으로 구한 반복수비 0.66에서 예상최대균열길이가 0.39 mm를 넘지 않을 확률은 99.7 % 이고, 반복수비 0.83에서 예상최대균열길이가 1.75 mm를 넘지 않을 확률은 99.7 % 이며, 반복수비 0.94에서 예상최대균열길이가 2.4 mm를 넘지 않을 확률은 99.7 %로 예상된다.

따라서 미소 균열이 분포된 각 샘플에서 극치 통계해석에 의해 평가 대상 영역 중의 최대균열 길이를 추정하고, 이 값을 기초로 Fig. 7 및 식 (1)에서 부재의 잔존 수명을 평가할 수 있다.

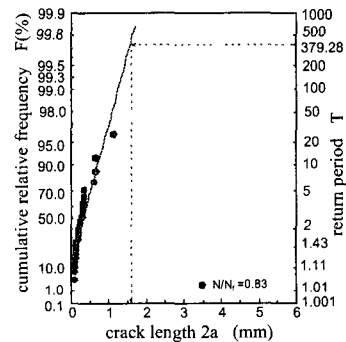
5. 결론

본 연구에서는 Al 2024-T3 합금을 이용하여 5 mm× 12mm 관찰영역내에서 발생한 표면균열길이 $2a$ 와 그 관찰영역을 균열전파방향과 평행하도록 25등분한 샘플영역에서 채취한 최대표면균열길이 $2a_{\max}$ 의 통계적 분포특성을 정량적으로 평가하였다.

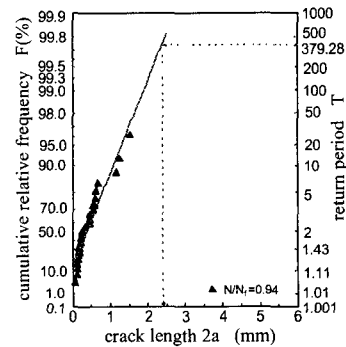
또한 $2a_{\max}$ 의 회귀곡선을 기초로 하는 극치통계 해석을 이용하여 부재의 잔존수명을 평가한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.



(a) $N/N_f = 0.66$



(b) $N/N_f = 0.83$



(c) $N/N_f = 0.94$

Fig. 9 Extreme distribution of maximum surface crack length $2a_{\max}$ with cycle ratio N/N_f

(1) 표면균열길이 $2a$ 와 최대표면균열길이 $2a_{\max}$ 는 3모수 Weibull 분포를 나타내고 반복수비에 대한 $2a$ 분포보다 $2a_{\max}$ 의 분포가 훨씬 더 피로손상을 명확하게 나타내고 있다.

(2) 표면균열길이 $2a$ 와 반복수 N 사이에는 지수 함수적 관계를 나타내나 $\log 2a$ 과 반복수 N 사이에서는 직선적 선형관계가 성립하며 그 관계식을

수명 평가식이라 하여 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$N/N_f = \frac{1}{\log\left(\frac{2a_f}{2a_0}\right)} \times \log\left(\frac{2a}{2a_0}\right)$$

(3) 극치통계해석을 표면미소균열의 샘플 극값에 적용하여 부재 중의 최대표면균열길이를 예측할 수 있었으며, 이러한 균열길이를 기초로 하여 수명평가식에서 부재의 잔존수명을 예측할 수 있었다.

후 기

이 논문은 2000학년도 동아대학교 학술연구조성비(공모과제)에 의하여 연구되었으며, 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Kitagawa, H., Nakasone, Y. and Iida, M., 1985, "Statistical Variation in Growth Rate among Multiple Small Surface Cracks in Fatigue," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 51, No. 461, pp. 179~183.
- (2) Goto, M., Kawagoishi, N., Nisitani, H., Miyagawa, H. and Oda, Y., 1994, "Relation Between Scatter Crack Growth Law," *J. Soc. Mat. Sci., Japan*, Vol. 43, No. 494, pp. 1469~1474.
- (3) Suh, C. M., 1988, "Surface Crack Behavior and the Fatigue Life Prediction of Notched Specimens," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 12, No. 5, pp. 1097~1103.
- (4) Jack.A.Collins, 1993, "Failure of Materials in Mechanical Design," John Willey & sons, pp. 194~228.
- (5) Kim, J. K. and Shim, D. S., 1996, "A Stochastic Analysis of Variation in Fatigue Crack Growth of 7075-T6 Al alloy," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 20, No. 7, pp. 2159~2166.
- (6) 腐食防食協會, 1984, "裝置材料の壽命豫測入門," 丸善株式會社, pp. 174~178.
- (7) Park, S. Y., 1990, "The Notch Effects on the Fatigue Micro-Fracture of the Dual Phase Steels," A Master's Thesis, University of Dong-A, Busan.
- (8) 酒井達雄, 1992, "材料強度の統計的性質," 養賢堂, pp. 125~129.
- (9) Murakami, Y., 1993, "Effects of Small Defects and Nonmetallic Inclusion," Yokendo Ltd., pp. 233~252.
- (10) Kwon, J. D., Jang, S. S. and Jin, Y. J., "Life Prediction and Fatigue Strength Evaluation for Surface Corrosion Materials," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 16, No. 8, pp. 1503~1512.
- (11) Gumbel, E. J., 1957, "Statistics of Extremes," Columbia Univ Press, New York.
- (12) 石川雄一, 1983, "MVLUKEによる極値推定," 防食技術, 32卷, pp. 403~409.