

Z-Map기반 모의가공을 위한 공구 이동 궤적면의 매개변수형 모델링

박 배 용* · 안 정 호*

(2001년 11월 7일 접수, 2002년 6월 5일 심사완료)

Parametric Modelling of Cutter Swept Surface for Z-Map Based Cutting Simulation

Park, Pae-Yong and Ahn, Jeong-Ho

Key Words: NC(수치제어), Cutter Swept Surface(공구이동궤적면), Z-Map, Intersection(교차)

Abstract

NC cutting simulation is an important factor in the development of products. The geometric modelling of cutter swept surface should be done in NC cutting simulation. A part of cutter swept surface is a ruled surface blended with silhouette curve and cutter path. Finding an intersection point between cutter swept surface and a line is one of major problems in Z-map based cutting simulation. In this paper, cutter swept surface is defined parametrically and its intersection point with Z-map is found in an exact form. Triangular grid Z-map based 3-axis NC cutting simulation is performed.

1. 서 론

다품종 소량생산의 산업 형태에 있어서, NC절삭과정의 모의 가공은 실제 가공 상태를 검증함으로써 값비싼 공구와 재료의 낭비를 줄이고, 제품의 개발 시간을 단축해 주는 효과가 있다. 가공 상태를 검증하는 것은 가공재의 과절삭 및 미절삭 등의 예측을 통하여 가공 정밀도를 향상시킬 수 있으며 공구의 예기치 않은 충돌 방지도

가능하다. 공구곡면(cutter surface) 및 공구 이동 궤적면(cutter swept surface)의 모델링은 모의 가공을 위한 하나의 과정으로서 가공재와 엔드밀의 교차계산을 통하여 실제 가공 상태를 검증하려는데 필요하다. Z-map은 복잡한 형상의 가공모델을 간단한 직선의 형태로 저장하므로 계산이 간단하고 과절삭 및 미절삭량을 정량적으로 구할 수 있으며 격자 간격의 조절을 통해 정밀도의 향상이 가능한 장점을 지니고 있다. Z-map 기반 모의 가공에 있어서 Z-map과 공구곡면 및 공구 이동 궤적면의 교차점 계산은 필수적이다. Z-map은 1978년 Anderson⁽¹⁾에 의해 개발되었고, 그 후 많은 연구자들에 의해 그 종류 및 적용 범위가 확대되었다. 기존의 모의 가공을 위한 공구 이동 궤적면은 Chung & Choi⁽²⁾의 논문에서 여러 가지 경

* 책임저자, 회원, 숭실대학교 기계공학과

E-mail : jhahn@saint.soongsil.ac.kr

TEL : (02)820-0659 FAX : (02)820-0650

* 회원, 숭실대학교 대학원 기계공학과

우가 언급되어 있다. Chung & Choi는 공구 이동 궤적면의 비매개 변수형 모델링을 구현하여 공구 이동 궤적면과 Z-map의 교차점을 구하였다. 비매개 변수형 모델링은 Z-map이 가지는 특성상 X,Y좌표값을 배열의 인덱스로부터 쉽게 구할 수 있는 장점을 가지고 있다. Chung & Choi는 3축 NC절삭 모의 가공을 대상으로 하였다. 본 연구에서는 공구곡면 및 공구 이동 궤적면의 매개변수형 모델링을 구현하였으며 수치해석을 이용하지 않고 공구 이동 궤적면과 Z-map의 교차점계산을 수행하였다. 삼각 격자 Z-map⁽³⁾을 데이터 모델로 공구곡면 및 공구 이동 궤적면과 Z-map의 교차점 계산을 통하여 Z-map기반 모의가공을 구현하였으며 그 결과를 OpenGL 그래픽 라이브러리를 이용하여 나타내었다.

2. 공구 곡면 및 공구 이동 궤적면의 매개 변수형 모델링

엔드밀은 공구 끝의 형상에 따라 평 엔드밀(flat endmill), 볼 엔드밀(ball endmill) 그리고 라운드 엔드밀(round endmill)로 크게 나눌 수 있다. 각각의 경우에 대한 공구곡면(cutter surface) 및 공구 이동 궤적면(cutter swept surface)의 매개변수형 모델을 구한다. 이 때, 평 엔드밀 및 볼 엔드밀은 라운드 엔드밀의 특수한 형태들로 정의될 수 있다. 따라서, 먼저 라운드 엔드밀에 대한 모델링을 실시하고 나머지 엔드밀들의 모델링을 구한다.

2.1 엔드밀의 공구곡면

Fig. 1에서와 같이, 라운드 엔드밀의 형상은 평 엔드밀의 바닥부 가장자리가 라운딩 된 것으로 볼 수 있다. 라운드 엔드밀의 바닥부는 가장자리의 토러스(torus)부와 중심부 바닥 평면의 합으로 모델링 될 수 있다. 즉, 라운딩 된 부분은 토러스부로, 나머지 가운데 부분은 평면의 형태를 지니게 된다. 데이터 모델로 사용한 Z-map의 특성상, Z-map과 공구곡면의 교차점을 계산하는데 있어서, 평면과 직선의 교차점은 높이 값의

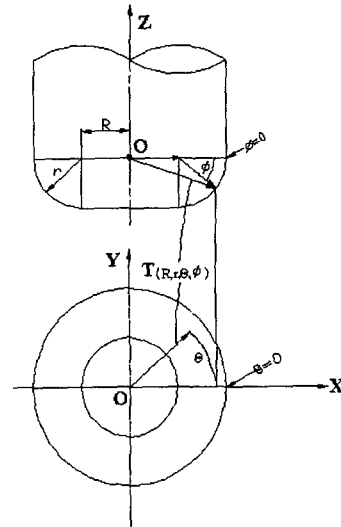


Fig. 1 Geometric definition of cutter surface

차이로 쉽게 계산될 수 있다. 토러스부는 Z-map과의 교차점 계산을 실시해야 한다.

라운드 엔드밀의 토러스부 공구곡면 $T(R, r, \theta, \phi)$ 는 다음과 같은 수식으로 표현된다. 단, 본 논문에서의 공구 좌표계는 Fig. 1과 같이, 토러스부의 중심 O 를 좌표계의 원점으로 한다. 즉, 중심 O 는 볼엔드밀에서는 반구부의 중심이 되고 평엔드밀에서는 평면부의 중심이 된다.

$$T(R, r, \theta, \phi) = \{RC_\theta + rC_\phi C_\theta, RS_\theta + rC_\phi S_\theta, -rS_\phi\} \quad (1)$$

여기서,

R : 토러스 중심까지의 반경, r : 라운드 반경

$R+r$: 공구 반경

$C_\theta : \cos(\theta), S_\theta : \sin(\theta)$

$C_\phi : \cos(\phi), S_\phi : \sin(\phi)$

θ : 원주방향회전각, ϕ : 축방향회전각

볼 엔드밀은 라운드 엔드밀의 공구곡면 수식에서, 토러스 중심까지의 반경 R 이 0이 되고, 라운드 반경 r 이 공구반경이 된다. 따라서, 식 (1)로부터 다음과 같은 수식으로 유도될 수 있다.

$$T(0, r, \theta, \phi) = \{rC_\phi C_\theta, rC_\phi S_\theta, -rS_\phi\} \quad (2)$$

평엔드밀은 라운드 엔드밀의 수식에서 R 이 공구 반경이 되고, 라운드 반경 r 이 0이 되는 경우이다.

$$\mathbf{T}(R, 0, \theta, \phi) = (RC_\theta, RS_\theta, 0) \quad (3)$$

2.2 엔드밀의 공구 이동 궤적면

공구 이동 궤적면은, 단일 직선 공구 경로를 대상으로 할 때, 공구 진행방향의 앞쪽에서 공구를 바라보았을 때 공구곡면에 나타나는 실루엣 곡선(silhouette curve)⁽⁴⁾과 공구경로벡터에 의해 결정된다. 즉, 공구경로벡터와 실루엣 곡선의 보간에 의해 생기는 룰드 곡면(ruled surface)이다.

Fig. 2에서 라운드 엔드밀의 공구 진행 벡터를 \mathbf{a} 라 하면, 이는 단일 공구 경로의 시점 $\mathbf{P}_s(w)$ 과 끝점 $\mathbf{P}_e(w)$ 에 의해 형성되는 벡터이다. Fig. 2의 빗금친 부분이 공구 이동 궤적면을 나타낸다. 라운드 엔드밀의 공구곡면 $\mathbf{T}(R, r, \theta, \phi)$ 의 법선벡터와 \mathbf{a} 의 내적이 0이 되는 경우의 공구곡면상의 점들이 실루엣 곡선($\mathbf{C}(R, r, \theta)$)을 형성하게 된다.⁽⁴⁾

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_e(w) - \mathbf{P}_s(w) = \{a_x, a_y, a_z\}$$

$$\mathbf{C}(R, r, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} RC_\theta + \frac{ra_z C_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}}, \\ RS_\theta + \frac{ra_z S_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}}, \\ -\frac{r\{a_x C_\theta + a_y S_\theta\}}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} \end{array} \right. \quad (4)$$

공구 경로 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{P}(w) = (P_{sx} + wa_x, P_{sy} + wa_y, P_{sz} + wa_z) \quad (5)$$

구해진 실루엣 곡선($\mathbf{C}(R, r, \theta)$)과 공구 경로 벡터($\mathbf{P}(w)$)의 보간에 의해 라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면은 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{S}(R, r, \theta, w) = \mathbf{C}(R, r, \theta) + \mathbf{P}(w) = \left\{ \begin{array}{l} RC_\theta + \frac{ra_z C_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sx} + wa_x, \\ RS_\theta + \frac{ra_z S_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sy} + wa_y, \\ -\frac{r\{a_x C_\theta + a_y S_\theta\}}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sz} + wa_z \end{array} \right. \quad (6)$$

단, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq w \leq 1$ 이다.

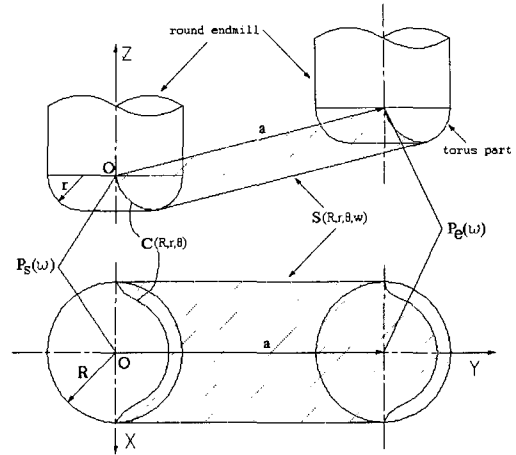


Fig. 2 Cutter swept surface

볼 엔드밀은 공구곡면을 구할 때와 마찬가지로, 라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면의 수식에 $R=0$ 를 대입함으로 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathbf{S}(0, r, \theta, w) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{ra_z C_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sx} + wa_x, \\ \frac{ra_z S_\theta}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sy} + wa_y, \\ -\frac{r\{a_x C_\theta + a_y S_\theta\}}{\sqrt{(a_x C_\theta + a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + P_{sz} + wa_z \end{array} \right. \quad (7)$$

평 엔드밀은 라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면의 수식에 $r=0$ 를 대입함으로써 얻어진다.

$$\mathbf{S}(R, 0, \theta, w) = \left(\begin{array}{c} RC_\theta + P_{sx} + wa_x \\ RS_\theta + P_{sy} + wa_y \\ P_{sz} + wa_z \end{array} \right) \quad (8)$$

3. 공구 이동 궤적면과 Z-map의 교차점 계산

볼 및 평 엔드밀의 공구 이동 궤적면은 라운드 엔드밀의 특수한 경우이므로, 라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면과 Z-map의 교차점을 찾으면, 볼 및 평 엔드밀의 경우도 쉽게 적용할 수 있다. 따라서, 라운드 엔드밀의 경우를 기준으로 교차점을 구해보자.

Z-map은 다음과 같은 벡터로 구성된다.

$$\mathbf{z}(t) = \{z_{sx}, z_{sy}, z_{sz} + t(z_{ez} - z_{sz})\} \quad (9)$$

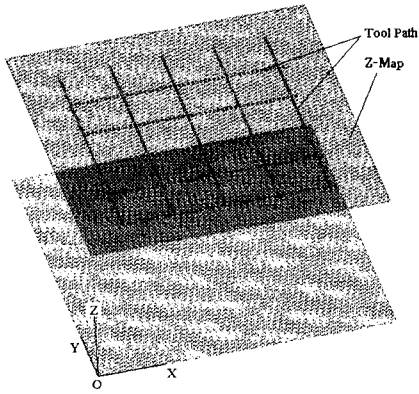


Fig. 3 (a) Z-map data and tool path

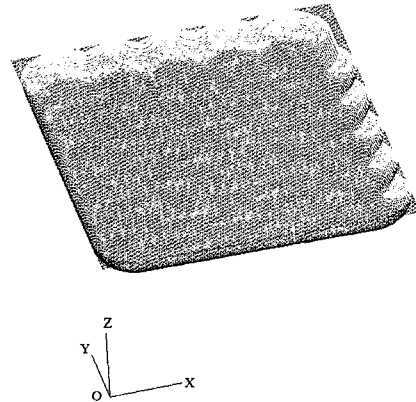


Fig. 3 (b) Z-map data after milling operation with round endmill

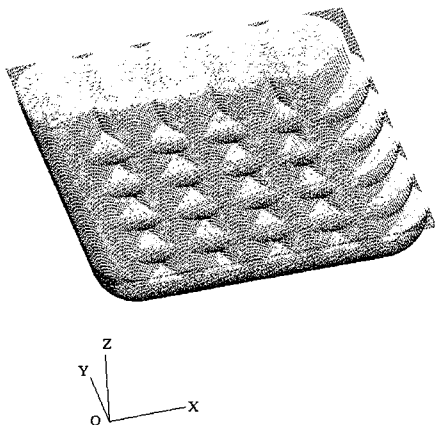


Fig. 3 (c) Z-map data after milling operation with ball endmill

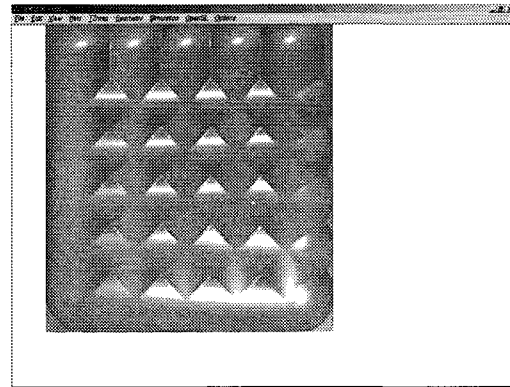


Fig. 3 (d) Rendered image with smoothing and specular light source

라운드 엔드밀의 공구 이동 궤적면과 Z-map의 교차식은 식 (6)과 식 (9)가 서로 같게 되는 경우이므로, 다음과 같은 수식을 갖는다.

$$RC_{\theta} + \frac{ra_z C_{\theta}}{\sqrt{(a_x C_{\theta} + a_y S_{\theta})^2 + a_z^2}} + P_{sx} + wa_x = z_{sx} \quad (10)$$

$$RS_{\theta} + \frac{ra_z S_{\theta}}{\sqrt{(a_x C_{\theta} + a_y S_{\theta})^2 + a_z^2}} + P_{sy} + wa_y = z_{sy} \quad (11)$$

$$-\frac{r\{a_x C_{\theta} + a_y S_{\theta}\}}{\sqrt{(a_x C_{\theta} + a_y S_{\theta})^2 + a_z^2}} + P_{sz} + wa_z = t(z_{ez} - z_{sz}) \quad (12)$$

식 (10),(11),(12)를 간단히 하기 위하여, 공간상에 임의의 방향으로 진행되는 공구경로의 시점 ($P_s(w)$)을 원점으로 평행이동 시키고, 공구 진행 벡터의 방향을 Y축 방향과 일치되도록 회전 변환 시킨다. 이 과정을 통하여 공구 경로 벡터의 X좌표 성분이 0이 된다. 이 때, 회전된 공구 이동궤적면은 공구진행벡터의 회전만으로 얻어질 수 있기 때문에 공구진행벡터를 회전시킨 후 공구면과의 관계에서 회전된 공구이동궤적면을 구하고 원점으로 평행이동 시키면 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$RC_\theta + \frac{ra_z \dot{C}_\theta}{\sqrt{(a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} = z(t) \dot{x} \quad (13)$$

$$RS_\theta + \frac{ra_z \dot{S}_\theta}{\sqrt{(a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + wa_y = z(t) \dot{y} \quad (14)$$

$$-\frac{ra_y \dot{S}_\theta}{\sqrt{(a_y S_\theta)^2 + a_z^2}} + wa_z = z(t) \dot{z} \quad (15)$$

여기서,

$$a_x = P_{ex} - P_{sx} = 0$$

$$a_y = P_{ey} - P_{sy}$$

$$a_z = P_{ez} - P_{sz}$$

$$z(t) \dot{x} = z_{sx} = \dot{z}_{sx}$$

$$z(t) \dot{y} = z_{sy} = \dot{z}_{sy}$$

$$z(t) \dot{z} = z_{sz} + t(z_{ez} - z_{sz}) \text{ 이며,}$$

위 첨자 '는 공구 진행벡터가 Y축과 이루는 각도만큼의 Z축 회전변환과 원점으로 이동변환한 것을 의미한다. 식 (10)에서 C_θ 의 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$k^4 + Ak^3 + Bk^2 + Ck + D = 0 \quad (16)$$

여기서,

$$k = C_\theta = \cos(\theta)$$

$$A = \frac{2(tp_{sx} - z_{sx})}{R} \quad (17)$$

$$B = \frac{a_y^2(tp_{sx} - z_{sx})^2 - R^2(a_y^2 + a_z^2) + r^2 a_z^2}{R^2 a_y^2} \quad (18)$$

$$C = -\frac{2(tp_{sx} - z_{sx})(a_y^2 + a_z^2)}{R a_y^2} \quad (19)$$

$$D = -\frac{(tp_{sx} - z_{sx})^2(a_y^2 + a_z^2)}{R^2 a_y^2} \quad (20)$$

식 (16)은 Ferrari의 4차 방정식 해법⁽¹¹⁾과 Cardano의 3차 방정식 해법⁽¹²⁾을 이용하면 해를 구할 수 있다.(부록 참조) 물론, 구해진 해에서 정확한 해를 찾아내는 검증 과정이 필요하다.

식 (16)에서 구해진 C_θ 를 식 (11)에 대입하면 w 를 구할 수 있다. 이것을 다시 식 (14)에 대입하여 Z-map의 파라미터 t 를 구하면 공구 이동 궤적면과 Z-map의 교차점이 구해진다. 구해진 교차점 데이터를 기존의 데이터에 갱신시키면 모의가공이 완성된다.

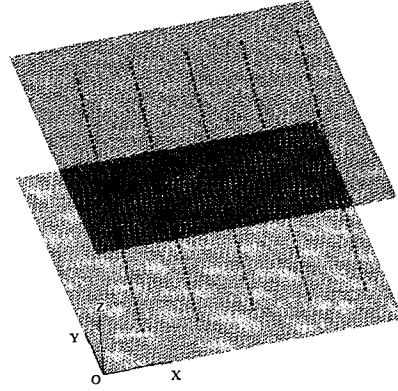


Fig. 4 (a) Z-map data and inclined tool path

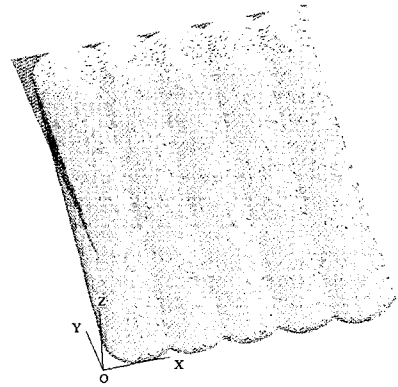


Fig. 4 (b) Z-map data after inclined milling operation with round endmill

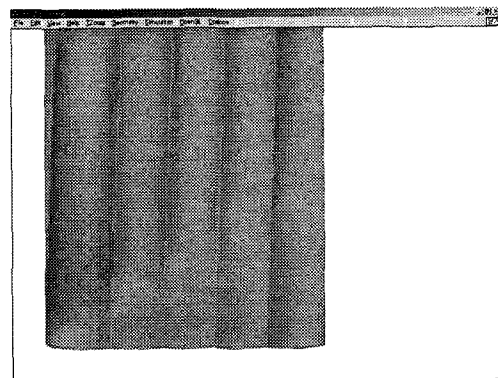


Fig. 4 (c) Rendered image with smoothing about inclined round endmilling operation

4. 적용 및 가시화

본 연구에서는 삼각 격자 Z-map 데이터 모델⁽³⁾을 사용하여 공구 곡면 및 공구 이동 궤적면과의 교차점 계산을 하였다. Fig. 3(a)과 Fig. 4(a)는 X-Y평면과 Z-map데이터 및 공구 이동 경로를 보여준다. 아래의 평면은 X-Y평면을 나타내고, 위 평면은 Z-map의 끝점을 나타낸다. Fig. 3(a)의 공구 경로는 Z값을 일정하게 한 평면 가공이다. Fig. 4(a)의 공구 경로는 경사를 가지는 공구 경로를 나타내었다. X축 및 Z축 방향의 경사를 갖는다. Fig. 3(b)는 Fig.3(a)의 공구경로를 따라 라운드 엔드밀로 절삭하였을 때의 절삭흔을 보여준다. Fig. 3(c)는 동일 공구 경로를 볼엔드밀로 절삭하였을 때의 절삭흔을 보여준다. Fig. 3(d)은 Fig. 3(c)의 절삭흔을 OpenGL을 이용하여 렌더링한 그림이다. Fig. 4(b)은 Fig. 4(a)의 경사가공을 시행했을 때의 절삭흔을 보여주며, Fig. 4(c)는 렌더링한 장면이다.

5. 결론

본 연구에서는, 3축 Z-map기반 NC 모의가공에 있어서 필요한 공구 곡면 및 공구 이동 궤적면의 매개변수형 모델링을 구현하였다. 공구 이동 궤적면은 공구 곡면상의 실루엣 곡선과 공구 경로 벡터에 의해 생성된 룰드곡면으로 볼 수 있으며, 공구 이동 궤적면과 Z-map의 교차점을 계산하였다. 삼각 격자 Z-map을 사용하여 본 연구를 적용하였다. 본 연구는 정밀 가공시의 기하학적 가공오차^(4,5)(cusp height, cutter mark)의 계산에 수치해석을 사용하지 않을 수 있는 토대를 마련하였다.

참고문헌

- (1) Anderson, R.O., 1978, "Detecting and Eliminating Collisions in NC Machining," *Computer-Aided Design*, 10(4), pp. 231~7.
- (2) Y.C. Chung, B.K. Choi, 1996, "Non-parametric Modeling of Cutter Swept Surfaces for Cutting Simulation," *Transactions of the Society of*

- CAD/CAM Engineers*, Vol. 1, pp. 45~55.
- (3) P.Y. Park, J.H. Ahn, 2000, "Z-map Model Using Triangular Grids," *Proceedings of the KSME 2000 Fall Annual Meeting A*, pp. 824~828.
- (4) P.Y. Park, J.H. Ahn, 1996, "Geometric Analysis of Cusp Height," *Proceedings of the SCCE*, pp. 59~64.
- (5) B.H. Kim, C.N. Chu, 1995, "Analysis of the Machinability of a Precision Machining of Molds/Dies by Using Jig and 3-Axis M/C," *Journal of the KSPE* Vol. 12, No. 3, pp. 119~129.
- (6) Jerard, R.B., Drysdale, R.L. and Hauck, K. Schaudt, B. and Magewick, J. 1989, "Methods for Detecting Errors in Sculptured Surface Machining," *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9(1), 26~39.
- (7) B.K. Choi, R.B. Jerard, 1998, *Sculptured Surface Machining Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, pp. 110~112.
- (8) Wang, W.P. and Wang, K.K., 1986, "Geometric Modeling for Swept Volume of Moving Solids," *IEEE Computer Graphics and Applications*, Dec., 6(12), pp. 8~17.
- (9) I.T. Chappel, 1983, "The Use of Vectors to Simulate Material Removed by Numerically Controlled Milling," *Computer-Aided Design*, Vol. 15, No. 3, pp. 156~158.
- (10) Van Hook, T., 1986, "Real-time Shaded NC Milling Display," *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH)*, Aug., 20(4), pp. 15~20.

부 록

공구 이동 궤적면과 Z-Map의 교차점 계산과정

A.1 Ferrari의 4차 방정식 해법
본문의 식 (16)-(20)은 아래와 같다.

$$k^4 + Ak^3 + Bk^2 + Ck + D = 0$$

여기서,

$$k = C_\theta = \cos(\theta)$$

$$A = \frac{2(tp_{sx} - z_{sx})}{R}$$

$$B = \frac{a_y^2(tp_{sx} - z_{sx})^2 - R^2(a_y^2 + a_z^2) + r^2 a_z^2}{R^2 a_y^2}$$

$$C = -\frac{2(tp_{sx} - z_{sx})(a_y^2 + a_z^2)}{R a_y^2}$$

$$D = -\frac{(tp_{sx} - z_{sx})^2(a_y^2 + a_z^2)}{R^2 a_y^2}$$

식 (16)의 양변에 $(lk + m)^2$ 를 더하면

$$k^4 + Ak^3 + (B + l^2)k^2 + (C + 2lm)k + D + m^2 = (lk + m)^2 \quad (A1)$$

왼쪽을 완전제곱꼴로 고치면 다음과 같다.

$$(k^2 + \frac{A}{2}k + \lambda)^2 = k^4 + Ak^3 + (\frac{A^2}{4} + 2\lambda)k^2 + A\lambda k + \lambda^2 \quad (A2)$$

식 (A1)의 좌변과 식 (A2)의 우변을 계수비교하면 다음과 같은 조건을 얻을 수 있다.

$$B + l^2 = \frac{A^2}{4} + 2\lambda, \quad C + 2lm = A\lambda, \quad D + m^2 = \lambda^2 \quad (A3)$$

여기서, l, m 을 소거하면 다음과 같이 λ 에 대한 삼차방정식이 된다.

$$(2\lambda + \frac{A^2}{4} - B)(\lambda^2 - D) = \frac{1}{4}(A\lambda - C)^2 \quad (A4)$$

이 식의 한 실근을 λ 라 하면 다음의 방정식을 얻는다.

$$(k^2 + \frac{A}{2}k + \lambda)^2 = (lk + m)^2 \quad (A5)$$

그러므로, 구하는 해는 다음 2차 방정식의 해가 된다.

$$k^2 + \frac{A}{2}k + \lambda = \pm(lk + m) \quad (A6)$$

A.2 Cardano의 3차 방정식 해법

식 (A4)를 간략히 하면 다음과 같다.

$$\lambda^3 + E\lambda^2 + F\lambda + G = 0 \quad (A7)$$

여기서,

$$E = \frac{-B}{2} \quad (A8)$$

$$F = \frac{AC}{4} - D \quad (A9)$$

$$G = -\frac{D}{2}\left(\frac{A^2}{4} - B\right) - \frac{C^2}{8} \quad (A10)$$

식 (A7)을 2차항이 없는 다항식으로 만들기 위해, $\lambda = s - E/3$ 으로 치환하면

$$s^3 + 3ps + q = 0 \quad (A11)$$

여기서,

$$p = \frac{-9E^2 + 27F}{27}$$

$$q = \frac{2E^3 - 9EF + 27G}{27}$$

$s = u + v$ 로 놓으면,

$$u^3 + v^3 + 3(uv + p)(u + v) + q = 0 \quad (A12)$$

이 된다.

따라서,

$$u^3 + v^3 + q = 0, \quad uv + p = 0 \text{ 이 되는}$$

$u^3 + v^3 + 3(uv + p)(u + v) + q = 0$ 를 택하면 된다.

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 v^3 = -p^3 \quad (A13)$$

이므로 근과 계수와의 관계에 의해 u^3, v^3 은 $\gamma^2 + q\gamma - p^3 = 0$ 의 근이 된다.

따라서,

$$u^3 = \frac{1}{2}(-q + \sqrt{q^2 + 4p^3})$$

$$v^3 = \frac{1}{2}(-q - \sqrt{q^2 + 4p^3}) \quad (A14)$$

이다.

이 때, $q^2 + 4p^3 = \delta$ 로 놓으면, (B-8)식의 근은 다음과 같이 구해진다.

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})}, \quad u = \omega^3 \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})},$$

$$u = \omega^{2^3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})} \quad (A15)$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\delta})}, \quad v = \omega^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\delta})},$$

$$v = \omega^3 \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\delta})} \quad (A16)$$

여기서, $\omega = \sqrt{-1}$ 이고, $uv = -p$ 이므로, (A7)식의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})} \quad (\text{A17})$$

$$\lambda_2 = \omega \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})} + \omega^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})} \quad (\text{A18})$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})} + \omega \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\delta})} \quad (\text{A19})$$

구해진 삼차 방정식의 실근을 식 (A3)과 식 (A6)에 대입하면 식 (16)의 근을 구하게 된다.