한국지반공학회논문집 제18권 4호 2002년 8월 pp. 207 ~ 214

비등방경화 구성모델을 이용한 대변형 해석 : I. 정식화

Large Deformation Analysis Using an Anistropic Hardening Constitutive Model : I. Formulation

오 세 붕* Oh, Se-Boong

Abstract

A constitutive model was implemented in ABAQUS code. The constitutive equation can model the behavior for overall range of strain level from small to large deformation, which is based on anisotropic hardening rule and total stress concept. The formulation includes (1) finite strain formulation on the basis of Jaumann rate, (2) implicit stress integration and (3) consistent tangent moduli. Therefore, the mathematical background was established in order that large deformation analysis can be performed accurately and efficiently with the anisotropic constitutive model. Companion paper(Jeon et al., 2002) will contain the large deformation analysis results of examples with the constitutive model using ABAQUS.

요 지

미소변형에서 대변형에 이르는 전체 변형도 영역의 구성모델을 ABAQUS 코드에 구현하였다. 구성모델은 비등방경화규칙에 근거한 전응력 개념의 탄소성 모델이다. 사용된 정식화 및 알고리즘은 (1) Jaumann 응력속도를 이용한 대변형도 조건 정식화 (2) 내재적인 응력적분 (3) 일관된 접선계수를 포함하고 있다. 이를 통하여 비등방경화 구성관계를 적용한 대변형 해석을 정확하고 효율적으로 수행할 수 있는 토대를 구축하였다. 동반논문(전병곤 등, 2002)에서는 예제해석을 통하여 새로운 구성모델과 ABAQUS 코드를 이용한 대변형 해석결과를 기술하였다.

Keywords : ABAQUS, Anistropic hardening rule, Consistent tangent moduli, Implicit stress integration, Large deformation analysis, Nonlinear finite element analysis

1. 서 론

지반재료의 응력-변형도 거동을 관찰하면, 미소변형률 영역에서 대변형률 영역의 거동이 모두 비선형적일 뿐만 아니라 여러 영향인자가 복잡하게 작용한다. 이러한 거동은 실제 지반공학문제에 반영되며, 전체변형률 영역의 거동중 주요한 영향을 끼치는 부분이 대상문제에 의존하여 상이하게 나타난다(오세붕 등 2000). 실험적인 자료 획득에 있어서는 미소변형도 영역의 거동을 측정하는 것이 까다로운 반면, 해석적인 측면에서는 대변형 영역의 해석에 어려움을 겪는 실정이다. 본 연구는 전체변형률 영역의 거동을 획득하고 모델하는 분야에서 대변형 해석과 관련된 부분에 속한다.

대변형도(finite strain) 연속체 역학의 관점에서 탄소성 구성관계는 - 몇 가지 단순화와 한계를 수반하지만 - 응력속도에 따른 정식화를 하는 것이 편리하다. 이러한 정식화 과정에서 응력속도의 객관성(objectivity)을 확보하여야 하는데, Jaumann 속도에 근거한 정식화가 가장 널리 수행되고 있다(Hughes, 1984, Lush et al., 1989).

그리고 응력속도에 근거한 구성관계는 수치적인 적분을 필요로 한다. 이 때 수학적 정확도를 유지하기 위해서는 내재적인 응력적분 알고리즘이 가장 보편적으로 적용되고 있다. 더불어 비선형 지배방정식의 반복

* 정회원, 영남대학교 토목공학과 부교수 (Member, Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., Yeungnam Univ., sebungoh@yu.ac.kr)

적인 해풀이 과정에서 요구되는 수렴도를 확보하기 위하여, 일관된 접선계수를 정식화하는 것이 요구된다(Simo and Taylor, 1985, Ortiz and Popov, 1985, Dodds, 1987, 오세붕과 이승래, 1996a, 1996b, 오세붕, 1999b, Oh and Lee, 2001).

지반재료의 진보적인 탄소성 구성관계는 비등방경화 규칙을 채택하고 있다. 이는 지반재료의 히스테리시스 및 역재하시 비선형성을 모델하기 위하여 비롯되었지만, 과압밀조건 및 Ko조건과 일반적인 비선형성에 적용하기에 편리한 장점을 가지고 있다(Dafalias, 1981, Lee and Oh, 1995). 본 연구에서는 지반재료의 실제 거동을 합리적으로 모델할 수 있는 GUX 모델을 대상으로 수행하였다. GUX 모델은 전응력 개념에 근거한 비등방경화 탄소성 구성모델로 미소변형도에서 파괴에 이르는 전체변형률 거동을 모델할 수 있다(오세붕, 1999a, 오세붕 등 2000).

특히 범용 유한요소해석 코드에 GUX 모델을 구현하여 실제 지반공학문제의 대변형 해석을 수행할 수 있도록, 비선형 연속체역학에 기반하여 내재적 응력적분 및 일관된 접선계수를 정식화하고 정확도 및 수렴도를 확보하는 것이 요구된다. 따라서 이러한 수학적 정식화를 토대로 ABAQUS 코드(Hibbit et al, 2001)의 사용자 서브루틴 UMAT에 GUX 모델을 구현할 수 있다. 동반논문(전병곤 등, 2002)에서는 예제해석으로 성토문제와 말뚝문제에 대하여 대변형 해석을 수행하였다.

2. 대변형도 조건에 대한 탄소성 구성방정식

변형속도 텐서는 통상적으로 탄성량과 소성량으로 구분한다. (즉 $\mathbf{D}=\mathbf{D}^{e}+\mathbf{D}^{p}$), 객관성(objectivity)을 만족하는 탄소성 응력-변형률 관계는 Jaumann 응력속도를 이용하여 다음식과 같이 나타난다 (Hughes, 1984, Lush, 1990).

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^{e} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^{p}\right) \tag{1}$$

이 때 대변형도(finite strain) 조건에서 필요한 통상적인 부호규약에 대하여 다음과 같이 정리한다.

$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} \equiv \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{WT} + \mathbf{TW}$: Cauchy 응력 **T**에 대한 Jaumann 속도

$\dot{\mathbf{T}}$: Cauchy 응력 **T**의 물질도함수(material time derivative)

$\mathbf{C}^{e} = 2\,G\mathbf{I} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$: 4계 등방 탄성텐서

K, G : 탄성 체적 및 전단계수

$\mathbf{1} = \delta_{ij}$: 크로넥커 델타(*Kronecker delta*), 2계 항등텐서

$\mathbf{I}$: 4계 항등텐서

$\mathbf{L} \equiv \text{grad}\ \mathbf{v}$: 속도 **v**의 공간구배(spatial gradient)

$\mathbf{D} \equiv \text{sym}(\mathbf{L})$: 변형속도(deformation rate) 텐서

$\mathbf{W} \equiv \text{skew}(\mathbf{L})$: 스핀(spin) 텐서

remark 1. 객관성(objectivity)은 강체운동에 의하여 변환된 좌표계에서 임의의 텐서가 강체회전에 의하여 적절하게 변환될 때 만족된다. Cauchy 응력의 물질 시간도함수 즉 Cauchy 응력속도는 좌표변환시 응력속도항뿐만 아니라 강체 회전의 속도항을 포함한다. 이로 인하여 Cauchy 응력은 객관성을 만족하여도, Cauchy 응력속도는 객관성을 만족하지 못한다. 따라서 응력-변형률 관계에 나타나는 응력속도는 적절한 객관속도(objective rate)를 적용해야 한다(Hughes, 1984). 이러한 객관 응력속도는 무수히 존재한다. Jaumann 속도는 대표적인 객관속도로 이동경화규칙에 있어서 단순전단조건에 응답하는 응력이 진동하는 단점을 가지고 있으나 본 연구에서는 적용하는 것이 가능하다.

remark 2. 응력속도 및 탄성변형속도와의 관계식 (1)은 속도 탄성론(hypoelasticity)에 근거한 것으로 역학적인 근거에 대한 많은 의심이 되고 있는 형편이지만, 실제로는 가장 널리 이용된다(Simo and Hughes, 1998). 단속도 탄성론은 등방탄성 및 미소 탄성변형(small elastic stretching)조건에서 적용 가능하다.

remark 3. 식 (1)에 포함된 변형속도텐서의 구분 $\mathbf{D}=\mathbf{D}^{e}+\mathbf{D}^{p}$은 미소변형이론으로부터 비롯된 것으로 통상적으로 사용하는 가정이다(Simo and Hughes, 1998).

그리고 소성항 $\mathbf{D}^{p}$는 미소변형 소성론에 근거한 유동규칙(flow rule)에 의하여 정의된다고 가정한다. 따라서 다음과 같이 Cauchy 응력에 의하여 정의할 수 있다.

$$\mathbf{D}^{p} = \dot{\gamma}\mathbf{N}, \tag{2}$$

여기서 $\dot{\gamma}$은 스칼라 양이며 소성변형속도텐서의 크기와 관련이 있다. 소성변형속도텐서의 방향은 관련유동규칙에 따라 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \tag{3}$$

한편 내부변수는 다음 식과 같은 형태로 일반화할 수 있다.

$$\dot{r} = h(r)\dot{\tilde{\varepsilon}}^p \tag{4}$$

remark 4. 여기서 $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p \equiv \sqrt{2/3}\left\|\mathrm{dev}(\mathbf{D}^p)\right\|$로서 통상적인 실내 삼축시험 조건시 $\tilde{\varepsilon} = \frac{2}{3}(\varepsilon_a - \varepsilon_r)$이다. 이는 축차응력 불변수(invariant) $q = \sigma_a - \sigma_r$에 상응하는 변형도 불변수이다. 한편 q는 일축 축대칭조건에서의 축응력에 상응한다고 하여 등가일축응력(equivalent uniaxial stress)이라고도 한다.

비대칭 스핀 텐서 $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$에 대하여 다음 식을 만족하는 회전 $\mathbf{Q}(t)$를 $[t_n, t_{n+1}]$ 구간에서 정의한다.

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q} \tag{5}$$

$$\mathbf{Q}\big|_{t=t_n} = \mathbf{1} \tag{6}$$

이러한 $\mathbf{Q}$에 의하여 변환된 대칭 2계 텐서를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{T}\mathbf{Q} \tag{7}$$

$\mathbf{Q}$에 의하여 변환된 Cauchy 응력에 대한 물질 시간도함수는 다음과 같이 나타난다(Hughes, 1984).

$$\dot{\overline{\mathbf{T}}} = \mathbf{Q}^T \overset{\nabla}{\mathbf{T}} \mathbf{Q} \tag{8}$$

이러한 좌표변환은 응력의 시간적분에 필요한 설정들을 미소변형도 조건과 동일한 수학적 형태로 구현하여 수치적인 정식화에 중요한 도움을 준다.

$\mathbf{Q}$에 의한 변환된 식 (1)~(4)는 다음과 같다.

$$\dot{\overline{\mathbf{T}}} = \mathbf{C}^e : \left(\overline{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{D}}^p\right) \tag{9}$$

$$\overline{\mathbf{D}}^p = \dot{\gamma}\overline{\mathbf{N}} \tag{10}$$

$$\overline{\mathbf{N}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{\mathbf{T}}} \tag{11}$$

$$\dot{r} = h(r)\dot{\tilde{\varepsilon}}^p \tag{12}$$

remark 5. 이러한 변환은 탄성텐서 $\mathbf{C}^e$의 등방성(isotropy) 및 식 (12)에 나타난 함수의 등방성을 요구한다(Gurtin, 1981). 즉 변환된 좌표계에서도 텐서나 함수가 변하지 않는다. 탄성텐서의 등방성은 재료거동이 등방적임을 의미한다. 지반재료의 탄성거동이 등방적이라는 어떠한 실험적/역학적 증거도 없으나 소성변형에 비하여 탄성변형이 중요한 역할을 하지 않는 대부분의 지반재료의 구성모델은 등방 탄성을 가정한다.

3. 내재적인 응력적분

식 (9)~(12)는 증분형태의 구성관계로서 비선형 유한요소해석시 수치적분이 필요하다. n번째 수렴한 후 n+1번째 현 시간단계내의 반복과정에서 식 (9)를 적분하면 다음과 같다.

$$\overline{\mathbf{T}}_{n+1} = \overline{\mathbf{T}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{C}^e : \left(\overline{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{D}}^p\right) dt \tag{13}$$

여기서 식 (6)에 의하여 $\overline{\mathbf{T}}_n = \mathbf{T}_n$이므로 윗 식의 우항은 다음 식으로 정리할 수 있다.

$$\overline{\mathbf{T}}_{n+1} = \overline{\mathbf{T}}^{tr} - \mathbf{C}^e : \int_{t_n}^{t_{n+1}} \overline{\mathbf{D}}^p dt \tag{14}$$

이 때 시도응력은 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{\mathbf{T}}^{tr} = \mathbf{T}_n + \mathbf{C}^e : \int_{t_n}^{t_{n+1}} \overline{\mathbf{D}} dt \tag{15}$$

단 시도응력은 비선형 유한요소해석 절차에서 수렴된 단계의 응력과 반복과정중의 변형도에 의하여 정의되는 기지의 값이다.

따라서 식 (14)에서는 소성 변형속도의 적분만이 필요하다. 이를 위하여 일반 사다리꼴규칙(generalized trapezoidal rule)에 의거하여 수치적분을 수행하면 다음과 같다.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \overline{\mathbf{D}}^p dt \cong \left\{(1-\alpha)\left(\overline{\mathbf{D}}^p\right)_n + \alpha\left(\overline{\mathbf{D}}^p\right)_{n+1}\right\}\Delta t \tag{16}$$

$(\overline{\mathbf{D}}^p)_n$과 $(\overline{\mathbf{D}}^p)_{n+1}$은 각 단계에 상응하는 변환된

소성 변형속도 텐서이고, α는 사다리꼴계수로서 0인 경우에는 외연적분을 의미하고 1인 경우에는 후진 Euler (backward Euler) 형식의 적분을 의미한다. 후진 Euler 절차에 의거하면 식 (14)는 다음과 같이 유도된다.

$$\overline{\mathbf{T}}_{n+1} \cong \overline{\mathbf{T}}^{tr} - \mathbf{C}^e : \Delta t\left(\overline{\mathbf{D}}^p\right)_{n+1} \tag{17}$$

여기서 $\left(\overline{\mathbf{D}}^p\right)_{n+1}$는 식 (10)과 (11)에 의하여 정의되므로 $\overline{\mathbf{T}}_{n+1}$에 의하여 기술되므로, 식 (17)이 내재적인 (implicit) 함수임을 알 수 있다.

remark 6. 식 (13)~(17)는 $\mathbf{Q}(t)$ 변환계에서 나타나는 식 (10)~(11)을 적분한 것으로 미소변형도 조건의 내재적인 적분절차와 그대로 일치하고 있음을 알 수 있다 (Hughes, 1984; 오세붕 1999b). 이러한 적분절차를 구현하기 위하여 필요한 것은 유한요소해석 코드의 구성관계 서브루틴에서 입력과 출력을 적절하게 수학적 과정과 일치시키는 것이다. 본 연구에서는 범용해석코드 ABAQUS에 적합한 수학적 전개를 채택한다.

식 (17)을 Cauchy 응력으로 전개하면 다음과 같다. (Lush et al., 1989, Lush, 1990)

$$\mathbf{Q}_{n+1}^T\mathbf{T}_{n+1}\mathbf{Q}_{n+1} = \overline{\mathbf{T}}^{tr} - \mathbf{C}^e : \left\{\mathbf{Q}_{n+1}^T\Delta t\left(\mathbf{D}^p\right)_{n+1}\mathbf{Q}_{n+1}\right\} \tag{18}$$

따라서

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}^{tr} - \mathbf{C}^e : \left\{\Delta t\left(\mathbf{D}^p\right)_{n+1}\right\} \tag{19}$$

여기서 새로운 시도응력의 정의는 다음과 같다.

$$\mathbf{T}^{tr} \equiv \mathbf{Q}_{n+1}\overline{\mathbf{T}}^{tr}\mathbf{Q}_{n+1}^T = \mathbf{T}_n^Q + \mathbf{C}^e : \Delta\mathbf{E}_{n+1}^Q \tag{20}$$

$$\mathbf{T}_n^Q \equiv \mathbf{Q}_{n+1}\mathbf{T}_n\mathbf{Q}_{n+1}^T \tag{21}$$

$$\Delta\mathbf{E}_{n+1}^Q = \mathbf{Q}_{n+1}\left\{\int_{t_n}^{t_{n+1}}\overline{\mathbf{D}}dt\right\}\mathbf{Q}_{n+1}^T \tag{22}$$

remark 7. 식 (21) 및 (22)에 나타난 $\mathbf{T}_n^Q$와 $\Delta\mathbf{E}_{n+1}^Q$는 변위를 계산하는 유한요소해법에서 응력적분절차의 입력으로 제공된다. 특히 ABAQUS에서는 $\mathbf{Q}_{n+1}$이 Hughes-Winget (1980) 알고리즘에 의하여 결정되고 이에 따른 $\mathbf{T}_n^Q$와 $\Delta\mathbf{E}_{n+1}^Q$를 사용자 서브루틴 UMAT에 입력으로 제공한다. 따라서 식 (19)에 나타난 $\mathbf{T}^{tr}$을 쉽게 계산할 수 있다. UMAT에서의 출력은 Cauchy 응력과 상태변수들로 식 (19)에 나타난 내재적인 적분응력을 구하도록 코딩한다. 단 식 (19)에서 변수 $\mathbf{D}_{n+1}^p$가 Cauchy 응력에 의하여 기술된다.

유동규칙에 의하여 식 (19)는 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}^{tr} - \mathbf{C}^e : \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \tag{23}$$

응력 텐서, 변형도텐서는 각각 $\mathbf{T}_{n+1} = p\mathbf{1} + \mathbf{s}$, $\Delta\mathbf{E}_{n+1}^Q = \frac{1}{3}\Delta\varepsilon_v\mathbf{1} + \Delta\boldsymbol{e}$로 정의하며, 식 (19)에 나타난 시도응력은 다음과 같이 분해된다.

$$p^{tr} \equiv \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{T}^{tr}), \qquad \mathbf{s}^{tr} \equiv \mathbf{T}^{tr} - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{T}^{tr}) \tag{4}$$

이다. 따라서 식 (23)은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{tr} - 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \tag{25}$$

오세붕(1999a)에 의하여 제안된 경계면과 항복면(그림 1)은 일반적인 응력장에 대하여 다음 식으로 나타난다.

$$F = (\mathbf{s}^* - \mathbf{b}) : (\mathbf{s}^* - \mathbf{b}) - R^2 = 0 \tag{26}$$

$$f = (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) - r^2 = 0 \tag{27}$$

이 때 경계면과 항복면 중심응력 텐서 $\mathbf{b}$와 $\boldsymbol{\beta}$는 축차항(deviator term)을 의미한다. 재료의 파괴규준이 등방적인 경우에 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$이다. r은 항복면의 반경이며 R은 - 일정한 크기로 가정하는- 경계면의 반경이다. 한편 상동응력 축차텐서는 $\boldsymbol{\eta}$이다. $\mathbf{s}^*$는 $\mathbf{s}$를 $\boldsymbol{\eta}$로부터 경계면 상에 방사적으로 투사한 응력상태이다. 이러한 경계면과 잠재된 항복면간의 기하학적인 특성이 상동응력과 함께 그림 1에 나타나 있다.

반면 지반재료는 축차변형에 대하여 매우 연약한 거동

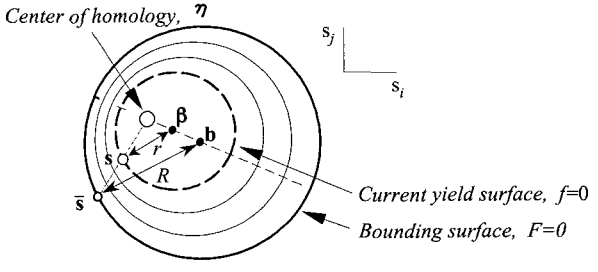

그림 1. 경계면과 항복면

이 나타나므로, 역재하과정에서 항복면의 크기는 소성 축차변형률에 의하여 나타날 수 있다고 가정하였다.. 즉,

$$\tilde{\varepsilon}^p = a\frac{(r/R)^b}{(1-r/R)^c} \tag{28}$$

이 때 계수 a, b 및 c는 경화함수에 사용되는 재료계수들이다. 그리고 $\tilde{\varepsilon}^p$는 $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p$를 하나의 역재하과정내에서 적분한 변형도 척도이다. 식 (28)은 오세붕 등(2000)에 의하면 쌍곡선 관계와 Ramberg-Osgood 곡선을 포함하는 함수로 미소변형도에서 대변형도까지의 지반재료 거동을모델하는 것이 가능하다. 식 (12)에 나타난 함수 $h(r)$은 다음과 같이 유도된다.

$$h(r) = \frac{R(1-r/R)^{c+1}}{ab(1-r/R)(r/R)^{b-1} + ac(r/R)^b} \tag{29}$$

이러한 경화함수의 적분은 다음과 같이 나타난다.

$$\tilde{\varepsilon}^p_{n+1} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left\|\mathbf{e}^p_{n+1}\right\| = \psi(r_{n+1}) \tag{30}$$

여기서

$$\mathbf{e}^p_{n+1} = \mathbf{e}^p_n + \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1}, \qquad \psi(r) = a\frac{(r/R)^b}{(1-r/R)^c} \tag{31}$$

remark 8. 경화함수 및 내부변수의 적분은 식 (12)에 대하여 후진 Euler 적분을 하면 다음과 같이 일반화할 수 있다.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{r}dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} h(r)\dot{\tilde{\varepsilon}}^p dt, \quad r_{n+1} = r_n + h(r_{n+1})\Delta\gamma\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left\|\mathbf{N}_{n+1}\right\| \tag{32}$$

그러나 본 연구의 구성모델은 경화함수가 적분가능하므로-때때로 특정 구성모델은 이러한 특징을 가지고 있다- 이 경우에는 $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \partial\psi(r)/\partial r\,\dot{r}$에 대하여 다음과 같이 해석할 수 있다.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\tilde{\varepsilon}}^p dt = \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{\partial\psi}{\partial r}\dot{r}dt, \quad \sqrt{\tfrac{2}{3}}\Delta\gamma\left\|\mathbf{N}_{n+1}\right\| = \psi(r_{n+1}) - \psi(r_n) \tag{33}$$

$$\tilde{\varepsilon}^p_{n+1} \equiv \int_0^{t_{n+1}} \dot{\tilde{\varepsilon}}^p dt = \psi(r_{n+1}), \quad \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left\|\mathbf{e}^p_n + \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1}\right\| = \psi(r_{n+1}) \tag{34}$$

여기서 역재하가 일어나는 시점은 $t=0$으로 정의하였다. 본 연구의 식 (30)은 이 중 식 (34)를 채택하였다.

표 1. $\mathbf{R}(\mathbf{X}_{n+1})=\mathbf{0}$을 계산하기 위한 알고리즘

1. Initialize $m=0$, $\mathbf{X}^m_{m+1}=\mathbf{0}$
2. Compute $\mathbf{R}^m=\mathbf{R}(\mathbf{X}^m_{m+1})$
3. If $\|\mathbf{R}^m\|/\|\mathbf{R}^0\|$ < Tolerance, return; else
4. Update such $\mathbf{X}^{m+1}_{n+1}=\mathbf{X}^m_{n+1}-\Delta\mathbf{X}^m$ that $\mathbf{R}'(\mathbf{U}^m_{n+1})\Delta\mathbf{X}^m=\mathbf{R}^m$
5. $m\leftarrow m+1$ and go to 2

그리고 이제부터 내부변수와 변형도 텐서는 편의상 $\mathbf{e}^p \equiv \mathbf{e}^p_{n+1}$ 및 $r \equiv r_{n+1}$로 정의한다.

응력적분은 식 (25)와 (27), (30)을 내재적으로 연립하여 풀어야 한다. 따라서 변수벡터 $\mathbf{X}=\{\mathbf{s}^T, \Delta\gamma, r\}^T$에 대한 잔류벡터 $\mathbf{R}=\{\mathbf{r}_1^T, r_2, r_3\}^T$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}^{tr} + 2G\Delta\gamma\mathbf{N} \tag{35}$$

$$r_2 = \sqrt{2/3}\left\|\mathbf{e}^p\right\| - \psi(r) \tag{36}$$

$$r_3 = (\mathbf{s}-\boldsymbol{\beta})\cdot(\mathbf{s}-\boldsymbol{\beta}) - r^2 \tag{37}$$

본 구성관계의 응력적분은 다음의 비선형계를 만족하는 해를 구하여 수행할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}_{n+1}) = \mathbf{0} \tag{38}$$

이제 식 (38)을 선형화하여 Newton법으로 해를 구한다.

$$\mathbf{R}'(\mathbf{X}^m_{n+1})\Delta\mathbf{X}^m = \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{X}^{m+1}_{n+1} = \mathbf{X}^m_{n+1} - \Delta\mathbf{X}^m \tag{39}$$

풀이과정은 표 1과 같이 $\|\mathbf{R}^m\|/\|\mathbf{R}^0\|$가 충분히 작은 수로 규정된 값에 도달할 때까지 반복된다(부록 I 참조).

4. 일관된 접선계수 행렬

지배식의 풀이과정에서 Newton 법의 점근적인 2차 수렴도를 유지하기 위하여 수치적으로 적분된 응력에 일관된 접선계수(consistent tangent modulus)를 구하여 적용해야 한다[Simo & Taylor(1985)]. ABAQUS의 UMAT에 상응하는 접선계수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{C}^k_{n+1} = \frac{\partial\mathbf{T}^k_{n+1}}{\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}} = \mathbf{1}\otimes\frac{\partial p^k_{n+1}}{\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}} + \frac{\partial\mathbf{s}^k_{n+1}}{\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}} \tag{40}$$

$(\bullet)\equiv(\bullet)^k_{n+1}$, $(\bullet)'\equiv\partial(\bullet)^k_{n+1}/\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}$로 정의

할 때, 윗 식의 우변은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p' = (p^{tr})' \tag{41}$$

$$\mathbf{s}' = (\mathbf{s}^{tr})' - 2G\mathbf{N} \otimes \Delta\gamma' - 2G\Delta\gamma\mathbf{N}' \tag{42}$$

식 (20)에서 $(p^{tr})' = K\mathbf{1}$, $(\mathbf{s}^{tr})' = 2G(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})$이므로 식 (40)은 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{C}^{k}_{n+1} = K\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{s}^{k}_{n+1}}{\partial \Delta \mathbf{E}^{Q}_{n+1}} \tag{43}$$

이로부터 $\partial \mathbf{s}^{k}_{n+1} / \partial \triangle \mathbf{E}^{Q}_{n+1}$을 구하는 것이 필요하다는 것을 알 수 있다. 식 (42)에서

$$\mathbf{N}' = 2(\mathbf{s}' - \boldsymbol{\beta}') \tag{44}$$

이고 부록 I의 식 (A1.3)으로부터

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \Delta \mathbf{E}^{Q}_{n+1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial r} \otimes \frac{\partial r}{\partial \Delta \mathbf{E}^{Q}_{n+1}} \tag{45}$$

이다. 식 (44), (45)로부터 식 (42)가 $\mathbf{s}'$, r', $\triangle r'$의 독립적인 텐서로 이루어진 관계식이라는 것을 알 수 있다. 따라서 식 (42)와 더불어 2개의 식이 추가로 필요하다.

즉 식 (30)으로부터

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} \frac{\mathbf{e}^{p}}{\left\| \mathbf{e}^{p} \right\|} : \{\Delta\gamma'\mathbf{N} + \Delta\gamma\mathbf{N}'\} = \psi_{,r}\, r' \tag{46}$$

이다. 또 식 (27)로부터

$$\mathbf{N} : (\mathbf{s}' - \boldsymbol{\beta}') + f_{,r}\, r' = 0 \tag{47}$$

이다. 식 (46)과 (47)는 식 (42)와 마찬가지로 $\mathbf{s}'$, r', $\triangle r'$의 독립적인 변수로 구성되어 있다. 따라서 이 식들을 연립하여 $\mathbf{s}'$(식 (42))를 풀면, 접선계수 $\mathbf{C}^{k}_{n+1}$(식 (43))를 구할 수 있다. 결국 식 (42)는 다음과 같이 유도된다. (부록 II 참조)

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \Delta \mathbf{E}^{Q}_{n+1}} = 2G\hat{\mathbf{E}}^{-1}(\mathbf{I} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) \tag{48}$$

$$\hat{\mathbf{E}} = a_1\mathbf{I} + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{c}_4 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{b}_4 \tag{49}$$

여기서 a_1, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{c}_4$, $\mathbf{b}_4$는 부록 II에 수록되어 있다.

표 2에서는 ABAQUS에서 제공하는 사용자 서브루틴 UMAT에 구현한 구성관계 코드의 알고리즘을 보여준다.

표 2. UMAT의 알고리즘

1. Read $\mathbf{T}^{Q}_{n}$, $\triangle\mathbf{E}^{Q}_{n+1}$ and state variables from INPUT.
2. Calculate $\mathbf{T}^{tr}$ $\mathbf{T}^{tr} = \mathbf{T}^{Q}_{n} + \mathbf{C}^{e} : \triangle\mathbf{E}^{Q}_{n+1}$
3. Check reverse loading if $\mathbf{N} : (\mathbf{C}^{e} : \triangle\mathbf{E}^{Q}_{n+1}) < 0$ then Reset state variables $r_n = 0$, $\mathbf{e}^{p}_{n} = \mathbf{0}$ and $\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0}$ end if
4. Integrate stress by iteration (See Table 1.) such that $\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}^{tr} - \mathbf{C}^{e} : \triangle\gamma\mathbf{N}_{n+1}$
5. Calculate consistent tangent modulus $\mathbf{C}^{k}_{n+1}$ $\mathbf{C}^{k}_{n+1} = K\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{s}^{k}_{n+1}}{\partial \triangle \mathbf{E}^{Q}_{n+1}}$
6. Update state variables r_{n+1}, $\mathbf{e}^{p}_{n+1}$ and $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ $\mathbf{e}^{p}_{n+1} = \mathbf{e}^{p}_{n} + \triangle\gamma\mathbf{N}_{n+1}$

5. 결 론

본연구에서는 지반재료의 비등방경화 구성모델을 ABAQUS 코드에 구현하기 위한 정식화 과정을 기술하였다. 이를 위하여 (1) Hughes-Winget(1980) 알고리즘에 의하여 회전된 계에서 Jaumann 응력속도를 이용하여 대변형도 연속체 역학에 합당하도록 구성관계를 기술하였다. 그리고 (2) 해의 정확도를 확보하기 위하여 내재적 응력적분 기법을 정식화하고 (3) 비선형 지배식의 해 2차적 수렴도를 확보하기 위하여 일관된 접선계수를 정식화하였다.

이러한 정식화 과정은 ABAQUS 코드에서 제공하는 사용자 구성관계 서브루틴 UMAT에 합당하도록 이루어졌다. 그리고 본 논문의 정식화를 UMAT에 구현하여 비등방경화 탄소성 모델 GUX를 이용한 대변형 유한요소해석이 가능하도록 하였다. 이에 동반논문(전병곤 등 2002)에서는 ABAQUS를 이용한 대변형 문제 예제해석을 수행하였다.

감사의 글

본 연구는 과학재단 2002년도 목적기초 연구과제 전체 변형률범위(10^{-4}~10%)에서 풍화토 지반구조물 변형거동 평가를 위한 실험 · 해석 통합시스템 연구 의 일부로 재단의 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. 오세붕, 이승래 (1996a), "일반 등방경화 구성관계에 대한 내재적인 응력적분: I. 정식화," *한국지반공학회 논문집*, 12권, 4호, pp.145-156.
2. 오세붕, 이승래 (1996b), "일반 등방경화 구성관계에 대한 내재적인 응력적분: II. 검증," *한국지반공학회 논문집*, 12권, 6호, pp.87-100.
3. 오세붕 (1999a) 비등방경화 구성모델을 적용한 연약 지반의 비배수 거동 해석 : I. 구성모델, *한국지반공학회 논문집*, 15권, 6호, pp.121-130.
4. 오세붕 (1999b), 비등방경화 구성모델을 적용한 연약 지반의 비배수 거동 해석 : II. 수치해석, *한국지반공학회 논문집*, 15권, 6호, pp.131-142.
5. 오세붕, 권기철, 김동수, 정순용 (2000), "미소변형률 및 대변형률 조건의 거동에 대한 비등방경화 탄소성 구성모델," *한국지반공학회 논문집*, 16권, 1호, pp.65-73.
6. 전병곤, 한성수, 오세붕 (2002), "비등방경화 구성모델을 이용한 대변형 해석 : II. 해석," *한국지반공학회 논문집*, 18권, 4호.
7. Dafalias, Y. F. (1981). "The Concept and Application of Bounding Surface in Plasticity Theory," in J. Hult and J. Lemaitre(eds.), *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, IUTAM Symposium, Senlis, France, 1980, Springer Verlag, Berlin, Germany, pp.56-63
8. Dodds, R. H. (1987). "Numerical techniques for plasticity computations in finite element analysis," *Computers & Structures*, 26, pp.767-779.
9. Gurtin, M. E. (1981) *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press.
10. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. (2001) *ABAQUS/Standard User's Manual*, version 6.2.
11. Hughes, T. J. R. (1984). "Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity," in Nemat-Nasser, S., Asaro, R.J. and Hegemier, G. A. (Eds.), *Theoretical Foundation for Large-Scale Computation of Nonlinear Material Behavior*, Martinus Nijhoff Publishers, Boston, pp.29-57.
12. Hughes, T. J. R. and Winget, J. (1980). "Finite Rotation Effects in Numerical Implementation of Rate Constitutive Equations Arising in Large Deformation Analysis," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, 15, pp.1862-1867.
13. Lee, S. R. and Oh, S. (1995). "An Anisotropic Hardening Constitutive Model Based on Generalized Isotropic Hardening Rule for Modeling Clay Behavior," *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 19, pp.683-703.
14. Lush, A. M., Weber, G. and Anand, L., (1989). "An Implicit Time-Integration Procedure for a Set of Internal Variable Constitutive Equations for Isotropic Elasto-Viscoplasticity," *International Journal of Plasticity*, 5, pp.521-549.
15. Lush, A. M. (1990). *Computational Procedures for Finite Element Analysis of Hot-Working*, Ph.D Thesis, Department of Mechanical Engineering, MIT, Cambridge, MA.
16. Oh, S., and Lee, S. R. (2001). "Formulation of implicit stress integration and consistent tangent modulus for an anisotropic hardening constitutive model," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.255-272.
17. Ortiz, M. and Popov, E. P. (1985). "Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations," *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 21, pp.1561-1576.
18. Simo, J. C. and Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*, Springer.
19. Simo, J. C. and Taylor, R. L. (1985). "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, pp.101-118.

(접수일자 2002. 3. 25, 심사완료일 2002. 8. 12)

부록 I 응력적분에 대한 자코비안 행렬(Jacobian matrix)

실제로 세세한 응력적분 절차는 기본적으로 미소변형도 조건과 일치한다. 따라서 본 연구의 부록 I과 II에 나타난 정식화 과정은 오세붕(1999b)의 정식화와 유사하다. 항복면의 도함수는 응력과 내부변수에 대하여 다음과 같다. 별다른 언급이 없는 한 변수들은 n+1단계에 상응하는 양들이다.

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{N}_{n+1} = f_{,\mathbf{s}} = -f_{,\boldsymbol{\beta}} = 2(\mathbf{s}-\boldsymbol{\beta}), \tag{A1.1}$$

$$f_{,r} = -2r. \tag{A1.2}$$

항복면의 중심은 기하학적인 관계가 다음과 같이 나타난다.

$$\boldsymbol{\beta}(r) = \boldsymbol{\eta} + \frac{\mathbf{b}-\boldsymbol{\eta}}{R} r, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial r} = \frac{\mathbf{b}-\boldsymbol{\eta}}{R}. \tag{A1.3}$$

잔류벡터 **R**의 자코비안 행렬은 식 (38)을 미분하여 다음과 같이 성분을 구성할 수 있다.

I.1 $\mathbf{r}_1$의 도함수

$$\mathbf{r}_{1,\mathbf{s}} = \mathbf{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{s}}, \quad \mathbf{r}_{1,\Delta\gamma} = 2G\mathbf{N}, \quad \mathbf{r}_{1,r} = 2G\Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r}, \tag{A1.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{s}} = 2\mathbf{I}, \qquad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} = -2\boldsymbol{\beta}_{,r}. \tag{A1.5}$$

I.2 r_2의 도함수

$$r_{2,\mathbf{s}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|\mathbf{e}^p\|}{\partial \mathbf{s}}, \quad r_{2,\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|\mathbf{e}^p\|}{\partial \Delta\gamma}, \quad r_{2,r} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|\mathbf{e}^p\|}{\partial r} - \psi_{,r}, \tag{A1.6}$$

$$\frac{\partial \|\mathbf{e}^p\|}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\mathbf{e}^p}{\|\mathbf{e}^p\|} : \frac{\partial \mathbf{e}^p}{\partial \mathbf{s}}, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}^p}{\partial \mathbf{s}} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{s}}, \tag{A1.7}$$

$$\frac{\partial\|\mathbf{e}^p\|}{\partial r}=\frac{\mathbf{e}^p}{\|\mathbf{e}^p\|}:\frac{\partial\mathbf{e}^p}{\partial\Delta\gamma}, \qquad \frac{\partial\mathbf{e}^p}{\partial\Delta\gamma}=\mathbf{N}, \tag{A1.8}$$

$$\frac{\partial\|\mathbf{e}^p\|}{\partial r}=\frac{\mathbf{e}^p}{\|\mathbf{e}^p\|}:\frac{\partial\mathbf{e}^p}{\partial r}, \quad \frac{\partial\mathbf{e}^p}{\partial r}=\Delta\gamma\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial r}. \tag{A1.9}$$

식 (6)으로부터,

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{ab(r/R)^{b-1}+c(1-r/R)^{c-1}\psi}{R(1-r/R)^c}. \tag{A1.10}$$

I.3 r_3의 도함수

$$r_{3,\mathbf{s}}=\mathbf{N}, \quad r_{3,\Delta\gamma}=0, \quad r_{3,r}=f_{,\beta}:\boldsymbol{\beta}_{,r}+f_{,r}. \tag{A1.11}$$

부록 II 일관된 접선계수(Consistent tangent moduli)

식 (42)로부터 다음 식을 구한다.

$$a_1\mathbf{s}'+\mathbf{a}_2\otimes r'+\mathbf{a}_3\otimes\Delta\gamma'=2G(\mathbf{I}-\tfrac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}), \tag{A2.1}$$

여기서

$$a_0=4G(\Delta\gamma),\ a_1=1+a_0,\ \mathbf{a}_2=-a_0\boldsymbol{\beta}_{,r},\ \mathbf{a}_3=2G\mathbf{N}. \tag{A2.2}$$

식 (46)은

$$\mathbf{b}_1:\mathbf{s}'+b_2r'+b_3\Delta\gamma'=0, \tag{A2.3}$$

이고

$$b_0=\frac{2\sqrt{2/3}\Delta\phi}{\|\mathbf{e}^p\|}, \quad \mathbf{b}_1=b_0\mathbf{e}^p,$$

$$b_2=-\psi_{,r}-b_0\mathbf{e}^p:\boldsymbol{\beta}_{,r},\ b_3=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\frac{\mathbf{e}^p}{\|\mathbf{e}^p\|}:\mathbf{N}. \tag{A2.4}$$

이다.

마지막으로 식 (47)은

$$\mathbf{c}_1:\mathbf{s}'+c_2r'=0, \tag{A2.5}$$

이고

$$\mathbf{c}_1=\mathbf{N}, \qquad c_2=f_{,\beta}:\boldsymbol{\beta}_{,r}+f_{,r}. \tag{A2.6}$$

이다.

식 (A2.5)를 풀면,

$$\frac{\partial r}{\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}}=\mathbf{c}_4:\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}}, \tag{A2.7}$$

이며 $\mathbf{c}_4=-\mathbf{c}_1/c_2$이다. 식 (A2.7)을 (A2.3)에 대입하면,

$$\frac{\partial\Delta\gamma}{\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}}=\mathbf{b}_4:\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}} \tag{A2.8}$$

이며 $\mathbf{B}_4=\mathbf{b}_1/b_3-b_2\,\mathbf{c}_4/b_3$이다.

따라서 식 (A2.1)은 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\Delta\mathbf{E}^Q_{n+1}}=2G\hat{\mathbf{E}}^{-1}(\mathbf{I}-\tfrac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) \tag{48 *bis.*}$$

$$\hat{\mathbf{E}}=a_1\mathbf{I}+\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{c}_4+\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{b}_4 \tag{49 *bis.*}$$

이로부터 일관된 접선계수 식 (43)을 구할 수 있다.