

## 확률적 선형계획문제의 상한과 하한한계 분석

이 상 진\*

### Analysis on Upper and Lower Bounds of Stochastic LP Problems

Sang-Jin Lee\*

#### ■ Abstract ■

Business managers are often required to use LP problems to deal with uncertainty inherent in decision making due to rapid changes in today's business environments. Uncertain parameters can be easily formulated in the two-stage stochastic LP problems. However, since solution methods are complex and time-consuming, a common approach has been to use modified formulations to provide upper and lower bounds on the two-stage stochastic LP problem. One approach is to use an expected value problem, which provides upper and lower bounds. Another approach is to use "wait-and-see" problem to provide upper and lower bounds. The objective of this paper is to propose a modified approach of "wait-and-see" problem to provide an upper bound and to compare the relative error of optimal value with various upper and lower bounds. A computing experiment is implemented to show the relative error of optimal value with various upper and lower bounds and computing times.

Keyword : Two-stage stochastic LP, Upper and lower bounds, Expected value problem, Decomposition of large-scale LP

#### 1. 서 론

의사결정자들은 미래 불확실성을 의사결정에 포

함시키기 위한 노력을 하고 있다. 이러한 노력중의 하나가 미래 불확실한 파라미터를 확률변수로 고려하여 확률적 선형계획문제로 형성하는 것이다

논문접수일 : 2002년 3월 20일    논문게재확정일 : 2002년 9월 4일

\* 국방대학교 부교수(e-mail : sjlee@kndu.ac.kr)

[8].

확률적 선형계획문제에 대한 연구는 몇 분야로 나눌 수 있다. 첫째, 미래 불확실성하에서 최적의 사결정을 위한 실제 적용 문제이다. 포트폴리오 투자문제[9, 17-19], 수요가 불확실한 경우의 입지결정문제[1, 3], 수송 문제[17] 등 많은 실제적 문제들을 확률적 선형계획문제로 형성할 수 있다. 둘째, 확률적 선형계획문제의 해법에 대한 연구이다. 확률적 선형계획문제로 형성하면 문제가 대규모화되어서 기존의 선형계획문제 해법으로는 최적해를 구하기가 어렵다. 최적해를 구하기 위해 분해해법(decomposition method)을 사용하고 있는데 분해해법도 선형[5, 13, 17, 21] 혹은 비선형 기법[2, 15, 18, 20] 등 다양한 해법들이 사용되고 있다. 확률적 선형계획문제의 분해해법은 해결과정이 복잡하고 계산 시간이 상당히 소요되는 등의 문제가 있다. 따라서 실무자들은 문제를 결정적 선형계획문제로 형성하거나 혹은 민감도 분석을 통해 미래 불확실성을 평가하는 경향이 있다[12]. 셋째, 확률적 선형계획문제의 최적값과 결정적 선형계획문제로 다양하게 재형성하여 구한 상한 및 하한한계와의 관계에 대한 연구이다[4, 6, 10, 11, 16]. 분해해법은 복잡하고 시간이 많이 소요되지만 재형성한 결정적인 문제는 간단하고 시간이 많이 소요되지 않는다. 따라서 재형성한 문제들과 확률적 선형계획문제의 최적값간의 오차관계에 대한 연구가 필요하다.

확률적 선형계획문제의 해를 구하는 가장 간단한 방법은 기대값 문제(mean value problem)라 불리는 결정적 선형계획문제로 형성하여 해를 구하는 것이다[10, 16]. 목적함수, 기술계수, 우변상수의 불확실한 파라미터 기대값을 구하여 이를 파라미터로 한 결정적 선형계획문제의 해를 구하는 것이다. 이 문제는 크기가 작아져서 해를 구하기가 아주 용이하지만 최적해가 아닌 경우가 많다.

확률변수의 기대값으로 문제로 형성하는 대신 Madansky(1960)가 제안한 아이디어인 “wait-and-see” 접근방법으로 문제를 형성하고 해를 구할 수 있다. “wait-and-see” 접근방법은 먼저 미래 2단계

에서 실현한 시나리오의 수만큼 독립적인 결정적 선형계획문제로 형성한다. 시나리오 별로 독립적으로 해를 구한 후 모든 시나리오 해의 기대값을 최종 최적해로 결정한다.

이 연구의 첫 번째 목표는 2단계 확률적 선형계획문제의 형성과 성질(property)에 관한 연구를 통해 최적값, 상한한계, 하한한계간의 오차관계를 분석한다. 확률적 선형계획문제, 기대값 문제, “wait-and-see” 문제 각각의 최적값들간의 오차관계와 성질에 대해서는 여러 연구가 있다[4, 6, 10]. 이 논문은 특히 “wait-and-see” 접근방법을 수정한 방법으로 구한 최적값이 상한한계로 사용될 수 있는지를 중점적으로 연구한다. 이 방법은 “wait-and-see” 방법과 달리 개별 시나리오의 1단계 최적해를 그대로 최적해로 인정하고 이를 활용하여 “개별 시나리오 문제의 기대 최적값”을 구하는 것이다. 수정된 방법은 2단계 확률적 선형계획문제의 상한한계를 제공해 줄 수 있을 뿐 아니라 의사결정 대안(alternative) 평가에 유용하다. 시나리오 별로 선형계획문제를 형성하여 구한 1단계 최적해가 의사결정자에게는 매우 중요할 수 있다. 모든 시나리오가 미래에 함께 발생하는 것이 아니라 그 중에서도 하나의 시나리오 즉, 하나의 대안만이 발생할 수 있을 뿐이다. 개별 시나리오의 1단계 최적해를 2단계 발생가능한 모든 시나리오 하에서 평가한 기대 최적값은 대안평가에 유용한 기준이 될 수 있고 또한 1단계 최적해가 어떠한 시나리오 하에서 실행 불가능한 것인지 평가할 수 있다. 따라서 이들 개별 시나리오의 1단계 최적해는 경영의사결정에 있어 실제적 유용성을 제공해 줄 수 있다.

이 연구의 두 번째 목표는 최적값의 상대오차에 대한 관계 이외에 컴퓨터 실행을 통해 2단계 확률적 선형계획문제의 다양한 상한 및 하한한계의 차이를 보여주하고자 한다. 선행 연구들은 확률적 선형계획문제와 기대값 문제의 최적값 간의 관계를 연구하고 있으나 상대오차에 대한 컴퓨팅 실행 결과를 보여주지 못하고 있다. 기대값 문제, “wait-and-see” 문제, 개별 시나리오 문제의 최적해를 2단계

확률적 선형계획문제 최적해로의 대체는 이들 문제의 최적값과 2단계 확률적 문제의 최적값과의 상대오차가 작으면 작을수록 더 가능할 것이다.

## 2. 불확실성을 고려하는 수학적 모형

### 2.1 확률적 선형계획문제

2단계 확률적 선형계획문제(Two-stage Stochastic LP problem : TSLP problem)의 수학적 모형을 위해 다음을 정의해 보자.

- $x_t$ 는 각 시간단계  $t$ 에서 결정해야 할 의사결정 벡터,  $t=1$ 은 현재 1단계를 의미하며, 2는 2단계를 의미
- $\xi$ 는 시간단계 2에서 실현되는 확률벡터(random vector)
- $E_\xi$ 는  $\xi$ 에 대하여 취한 수학적 기대치

위의 정의를 이용하여 2단계 확률적 선형계획문제는 아래와 같이 수학적으로 형성할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Min } c_1x_1 + E_\xi [\text{Min } c_2x_2] \\ & \text{s.t.} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} A_1x_1 & = b_1 \\ B_1x_1 + A_2x_2 & = b_2 \\ x_t & \geq 0; t = 1, 2. \end{aligned}$$

문제 (1)에서  $c_1$ 은 차수가  $n_1 \times 1$ 인 벡터이고,  $b_1$ 은  $m_1 \times 1$ 인 벡터이며,  $A_1$ 은 차수가  $m_1 \times n_1$ 인 행렬로 그 값들이 알려져 있다. 문제 (1)의 확률적 요소에서 확률벡터  $\xi = (b_2(\xi), c_2(\xi), A_2(\xi), B_1(\xi))$ 를 추출해보자.  $\xi$ 에 대하여,  $c_2(\xi)$ 는 차수가  $n_2(\xi) \times 1$  그리고  $b_2(\xi)$ 는  $m_2(\xi) \times 1$ 인 벡터들이며, 행렬  $A_2(\xi)$ 는 차수가  $m_2(\xi) \times 1$ 이고,  $B_1(\xi)$ 은 차수가  $m_2(\xi) \times 1$ 로 모두 확률적(random)이다.

확률벡터  $\xi$ 는 확률밀도함수를 가지고 연속분포를 이루거나 확률질량함수  $p(\xi)$ 를 가지고 이산적으로 분포되거나 두 가지 경우중 하나이다. 그러므

로  $\xi$  값들은 연속선상에 위치하거나 또는 이산확률 값을 가진 유한개의 값 중의 하나이다.

이 연구에서는 연속밀도함수가 아니라 이산확률 변수로 가정하고 문제를 형성한다. 본 연구에서 이산확률변수만을 고려하는 것이 문제를 너무 제한하는 것이 아닌가 하는 의문이 들 수도 있으나 이산확률변수만을 고려해도 연속확률변수를 가진 문제를 해결할 수 있다. 연속밀도함수를 고려한 확률적 선형계획문제의 실제 해법에 있어서도 근사기법(approximation scheme)[5, 23]이나 샘플링방법(sampling method)[9]을 사용하여 문제를 사실상 이산화시켜서 푸는 방법을 사용하고 있다. 또한 실제 적용 문제에 있어서는 많은 문제들이 이산확률만을 고려하고 있다[18]. 그래서 이 연구에서는 유한개의 시나리오  $\xi$ 가 각각 그에 상응하는 확률값  $p(\xi)$ 을 가지고 이산적으로 분포하고 있다고 가정한다. 이와 같이 가정할 때 문제 (1)은 다음과 같은 2단계 확률적 선형계획문제로 재형성할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Min } c_1x_1 + \sum_{k=1}^K p(\xi_k)c_2(\xi_k)x_2(\xi_k) \\ & \text{s.t.} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A_1x_1 & = b_1 \\ B_1(\xi_k)x_1 + A_2(\xi_k)x_2(\xi_k) & = b_2(\xi_k) \\ x_1 \geq 0, x_2(\xi_k) & \geq 0; \text{ for all } k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

확률  $p(\xi_k)$ 은 시간 단계 2에서  $k$ 번째 시나리오가 발생할 값이며 모든  $\xi_k$ 에 대하여  $p(\xi_k)$ 의 합은 항상 1이다(즉,  $\sum_{k=1}^K p(\xi_k) = 1$ ). 여기서  $K$ 는 2단계 시나리오의 개수라 할 수 있다. 1단계 의사결정변수  $x_1$ 이 결정되더라도 미래 어떤 시나리오가 발생할 것이라는 것을 예측하지는 못한다. 그러나 2단계 의사결정변수  $x_2$ 는 2단계 시나리오( $\xi$ )와 1단계 의사결정( $x_1$ )의 영향을 받게 된다. 문제 (2)는 2단계 최적값 기대치와 1단계 최적값을 합한 값을 최소화할 수 있는 1단계 최적해  $x_1^*$ 을 구하는 것이다.

1단계 의사결정변수의 실행가능 집합을  $X = \{x_1 \in R^{n_1} \mid A_1x_1 = b_1, x_1 \geq 0\}$ 으로 두자. 이 연구에서

1단계 해는 항상 존재한다고 가정한다(즉,  $X \neq \emptyset$ ). 문제 (2)는 아래와 같이 동등한 문제 (3)으로 표현할 수 있다.

$$\text{Min}_{x_1 \in X} \varphi(x_1) = c_1 x_1 + Q(x_1) \quad (3)$$

여기서  $Q(x_1) = E_{\xi}[q(x_1, \xi)]$ ,

$$q(x_1, \xi) = \min \{ c_2(\xi) x_2(\xi) \mid A_2(\xi) x_2(\xi) = b_2(\xi) - B_1(\xi) x_1, x_2(\xi) \geq 0 \}.$$

$q(x_1, \xi)$ 는 2단계 하위문제(subproblem)이며  $Q(x_1)$ 는 2단계 하위문제들의 기대값이다. 1단계 의사결정변수가 1단계 제약조건식을 만족시키는 가운데  $\varphi(x_1)$ 을 최소화하여 1단계 의사결정변수  $x_1$ 을 구하는 것은 문제 (2)와 동일하다. 문제 (2)를 문제 (3)으로 표현할 때 2단계 확률적 선형계획문제의 수학적 성질을 더 잘 볼 수 있다. 문제 (3)의 성질에 대해서는 많은 연구가 있었지만 주목해야 할 성질은 2단계 하위문제  $q(x_1, \xi)$ 가 1단계 의사결정변수  $x_1$ 의 볼록 선형절단 함수(convex piecewise linear function)라는 것이다.  $Q(x_1)$ 는 볼록이고 선형 절단면(convex and piecewise linear)이며,  $\varphi(x_1)$ 는  $\xi$ 의 볼록함수이다[22-25].

2단계 확률적 선형계획문제는 2단계 계수들이 확률변수를 가질 수 있기에 본질상 아주 대규모의 문제로 형성될 수밖에 없다. 대규모의 문제를 풀기 위한 분해해법은 실무자들이 사용하는데 복잡하고 최적해를 구하기까지 많은 시간이 소요되고 있다. 따라서 이 문제를 해결하는 한 방안으로 기대값 문제를 적용하고 있다.

## 2.2 기대값 문제

기대값 문제는 2단계 확률적 선형계획문제에서 불확실한 파라미터를 기대값으로 대체하는 것이다. 확률적 선형계획문제 (2)의 확률적 요소에서 확률 벡터는  $\xi = (b_2(\xi), c_2(\xi), A_2(\xi), B_1(\xi))$ 이다. 이들의 기대값을 다음  $E(b_2(\xi)) = b_2(\bar{\xi})$ ,  $E(c_2(\xi)) = c_2(\bar{\xi})$ ,  $E(A_2(\xi)) = A_2(\bar{\xi})$ ,  $E(B_1(\xi))$

$= B_1(\bar{\xi})$ 와 같이 정의하자. 그러면 (2)의 기대값 문제는 다음과 같이 형성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min } c_1 x_1 + c_2(\bar{\xi}) x_2 \\ \text{s.t.} \\ A_1 x_1 &= b_1 \\ B_1(\bar{\xi}) x_1 + A_2(\bar{\xi}) x_2 &= b_2(\bar{\xi}) \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

문제 (4)에서  $c_1$ 은 차수가  $n_1 \times 1$ 인 벡터이고,  $b_1$ 은  $m_1 \times 1$ 인 벡터이며,  $A_1$ 은 차수가  $m_1 \times n_1$ 인 행렬이다.  $c_2(\bar{\xi})$ 는 차수가  $n_2 \times 1$  그리고  $b_2(\bar{\xi})$ 은  $m_2 \times 1$ 인 벡터들이며, 행렬  $A_2(\bar{\xi})$ 는 차수가  $m_2 \times 1$ 이고,  $B_1(\bar{\xi})$ 는  $m_2 \times 1$ 로 각각의 확률변수 기대값은 알려져 있다. 이 문제는 2단계 확률적 선형계획문제 (2)에 비해 의사결정변수의 수는  $n_2 \times (K-1)$ 개 감소하며, 제약조건식은  $m_2 \times (K-1)$ 개 감소하게 된다. 문제의 크기가 작아져서 1단계 최적해  $\bar{x}_1$ 을 구하기가 용이해 진다.

## 2.3 "wait-and-see" 문제

2단계 확률적 선형계획문제는 다음과 같이 동등한 문제로 형성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min } \sum_{k=1}^K p(\xi_k) c_1 x_1(\xi_k) + \\ \sum_{k=1}^K p(\xi_k) c_2(\xi_k) x_2(\xi_k) \\ \text{s.t.} \\ A_1 x_1(\xi_k) &= b_1 \\ B_1(\xi_k) x_1(\xi_k) + A_2(\xi_k) x_2(\xi_k) &= b_2(\xi_k) \\ x_1(\xi_1) = x_1(\xi_2) = \dots = x_1(\xi_K) \\ (\xi_k) \geq 0, x_2(\xi_k) \geq 0, & ; \text{ for all } k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (5)$$

문제 (5)는 문제 (2)에 비해 변수의 수가  $n_1 \times (K-1)$ 개 많아지며 제약조건식의 수가  $n_1 \times (K-1)$ 개가 많아지는 등 문제의 규모가 커진다. 문제 (5)의 1단계 최적해  $x_1(\xi_k)$ 은 k번째 시나리오에서 구한 최적해이지만 문제 (2)의 최적해  $x_1$ 과 일치한다. 이는 문제 (5)에 있는 일치제약식(coupling con-

straint)  $x_1(\xi_1) = x_1(\xi_2) = \dots = x_1(\xi_K)$ 이 1단계 의사결정변수를 모두 동등하게 만드는 효과가 있기 때문이다.

그런데 문제 (5)에서 일치제약식을 완화(relax)하여 이 제약조건식을 제거하여 버리면 문제 (5)는 K개의 독립적인 문제로 형성될 수 있다. 일치제약식을 완화한 문제는 “wait-and-see” 접근법에서 이미 2단계의 시나리오가 실현된 것으로 가정할 때 형성될 수 있는 문제와 같다. K개의 독립된 선형계획문제를 풀면 각 시나리오 하나 하나의 1단계 최적해(즉,  $x_1^*(\xi_k)$ ,  $k=1, \dots, K$ )를 구할 수 있다. “wait-and-see” 문제의 1단계 최적해는 모든 시나리오 최적해의 기대값이다. 즉, 1단계 최적해  $x_1^*(\xi) = \sum_{k=1}^K p(\xi_k) x_1^*(\xi_k)$ 이다.

### 3. 2단계 확률적 선형계획문제의 하한한계와 상한한계

#### 3.1 각 문제의 최적값

“wait-and-see” 문제의 최적값(WSV : Wait-and-See problem’s optimal Value), 기대값 문제의 최적값(MV : Mean value problem’s optimal Value), 2단계 확률적 선형계획문제의 최적값(TSV : TSLP problem’s optimal Value)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} WSV &= E_{\xi}[c_1 x_1^*(\xi_k) + q(x_1^*(\xi_k), \xi)] \\ &= \sum_{k=1}^K p(\xi_k) c_1 x_1^*(\xi_k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^K p(\xi_k) c_2(\xi_k) x_2^*(\xi_k) \end{aligned} \tag{6}$$

$$MV = c_1 \bar{x}_1 + q(\bar{x}_1, E(\xi)) = c_1 \bar{x}_1 + c_2(\bar{\xi}) \bar{x}_2 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} TSV &= c_1 x_1^* + E_{\xi}[q(x_1^*, \xi)] \\ &= c_1 x_1^* + \sum_{k=1}^K p(\xi_k) c_2(\xi_k) x_2^*(\xi_k) \end{aligned} \tag{8}$$

WSV는 다음과 같이 구한다. “wait-and-see” 문제에서 일치제약식을 완화하면 시나리오 개수만큼의 독립된 선형계획문제가 형성된다. K개의 독립된 선형계획문제 최적값들의 기대값이 WSV이다. TSV와 MV는 문제 (3)과 문제 (4)의 목적함수값

이다.

“wait-and-see” 문제는 각 시나리오 최적해의 기대값을 1단계 최적해로 결정한 반면에, 각 시나리오별 선형계획문제는 각 시나리오의 1단계 최적해를 그대로 최적해로 결정하는 것이다. 이 경우 최대 K개 만큼의 최적해를 구할 수 있다. 확률적 선형계획문제는 미래 시나리오 발생에 대한 확률정보만 가진 상황에서 현재 1단계 의사결정을 하는 반면에, 각 시나리오별 선형계획문제는 불확실한 파라미터가 실현되었다고 가정한 다음에 개별 시나리오에 대하여 구하는 최적해이다. 즉, 각 의사결정 대안별 최적해를 구한다고 할 수 있다. 이 경우 구해지는 각 문제의 1단계 최적해는 어떤 2단계 하위문제에 대해서 실행 불가능할 수도 있다. 그러나 미래 어차피 2단계의 여러 시나리오 중 하나만이 실현되기에 각 시나리오별로 1단계 최적해를 평가하는 것도 의미가 있다. 각 시나리오별 최적해로 의사결정을 한 경우, 미래 어떠한 시나리오 하에서 이 결정이 실행불가능한가를 평가할 수 있다. 2단계 하위문제들의 기대 최적값과 1단계 최적값을 합한 값을 “개별 시나리오 문제의 기대 최적값”(EVS : Expected Value of each Scenario problem)이라 하며 EVS는 시나리오 개수인 최대 K개만큼 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} EVS_k &= c_1 x_1^*(\xi_k) + E_{\xi}[q(x_1^*(\xi_k), \xi)] \\ &= c_1 x_1^*(\xi_k) + \sum_{i=1}^K p(\xi_i) c_2(\xi_i) x_2^*(\xi_i), \\ &\quad \text{for all } k=1, \dots, K \end{aligned} \tag{9}$$

EVS<sub>k</sub>를 구하는 절차는 다음과 같다. 먼저 K개의 독립된 선형계획문제의 1단계 최적해를 구한다(즉,  $x_1^*(\xi_k)$ ). 1단계 최적해를 2단계 하위문제의 우변에 대입한 2단계 하위문제 (10)의 최적값을 구한다.

$$\begin{aligned} \min & c_2(\xi_k) x_2(\xi_k) \\ \text{s.t.} & A_2(\xi_k) x_2(\xi_k) = b_2(\xi_k) - B_1(\xi_k) \\ & x_1^*(\xi_k) x_2(\xi_k) \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

하위문제 최적값의 기대값을 계산한다(즉,  $E_{\xi}[q$

$(x_1^*(\xi_k), \xi)]$ . 2단계 기대값과 1단계 최적값을 합한 값이  $EVS_k$ 이다.

1단계 최적해 대신에 “wait-and-see” 문제의 최적해를 2단계 하위문제의 우변에 대입하여 2단계 하위문제들의 기대값을 계산할 수 있다. 2단계 기대값과 1단계 최적값을 합한 값을 “wait-and-see 문제의 기대 최적값”(EWSV : Expected Value of Wait-and-See problem)이라고 하며 다음 (11)과 같다. 여기서  $x_1^*(\xi) = \sum_{k=1}^K p(\xi_k) x_1^*(\xi_k)$ 이다.

$$\begin{aligned} EWSV &= c_1 x_1^*(\xi) + E_{\xi}[q(x_1^*(\xi), \xi)] \\ &= c_1 x_1^*(\xi) + \sum_{k=1}^K p(\xi_k) c_2(\xi_k) x_2^*(\xi_k) \end{aligned} \quad (11)$$

기대값 문제에서 구한 해를 1단계 최적해로 결정하고 미래 불확실한 확률변수를 고려한 경우의 기대 최적값을 구하는 경우를 생각해 볼 수 있다. 이 경우 2단계 기대값과 1단계 최적값을 더한 값을 “기대값 문제의 기대 최적값”(EMV : Expected Value of Mean problem)이라 하며 이는  $EVS_k$ 나 EWSV와 같은 개념이다.

$$\begin{aligned} EMV &= c_1 \bar{x}_1 + E_{\xi}[q(\bar{x}_1, \xi)] \\ &= c_1 \bar{x}_1 + \sum_{k=1}^K p(\xi_k) c_2(\xi_k) x_2^*(\xi_k) \end{aligned} \quad (12)$$

EWSV나 EMV를 구하는 절차는  $EVS_k$ 를 구하는 절차와 유사하다. 단지 2단계 하위문제의 우변 상수를 수정하는데 사용하는 1단계 의사결정변수가 각각 “wait-and-see” 문제의 최적해와 기대값 문제의 최적해라는 차이가 있다. 확률적 선형계획 문제의 최적해( $x_1^*, x_2^*(\xi_k), k=1, \dots, K$ ), 기대값 문제의 최적해( $\bar{x}_1, x_2^*$ ), “wait-and-see” 문제의 최적해( $x_1^*(\xi), x_2^*(\xi_i), i=1, \dots, K$ ), 그리고 개별 시나리오 문제의 최적해( $x_1^*(\xi_k), x_2^*(\xi_k), k=1, \dots, K$ )는 서로 다를 수 있다. 또한 TSV, MV, WSV,  $EVS_k$ , EWSV, EMV도 서로 다를 수 있다.

### 3.2 하한한계와 상한한계

2단계 확률적 선형계획문제의 최적값인 TSV와

MV, WSV,  $EVS_k$ , EWSV, EMV의 관계를 살펴보기 전에 2단계 하위문제  $q(x_1, \xi)$ 의 쌍대문제를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \text{Max } & (\pi(b_2(\xi) - B_1(\xi) x_1) | \\ & \pi A_2(\xi) \leq c_2(\xi)) \end{aligned} \quad (13)$$

2단계 쌍대문제의 실행가능한 해를  $\pi$ 라 하고 이의 집합을  $\Pi$ 라 하자.  $\Pi = \{\pi \mid \pi A_2(\xi) \leq c_2(\xi)\}$ . 1단계 제약조건의 쌍대 해집합을  $\Sigma$ 라 하자.  $\Sigma = \{\sigma \mid \sigma A_1 \leq c_1\}$ . 이 연구에서 2단계 확률적 선형계획문제의 해가 항상 존재한다고 가정하였기에  $\Sigma \neq \emptyset$ 이다. 이제 MV와 WSV의 관계를 살펴보자.

$$\begin{aligned} \text{정리 1 : } E_{\xi} \text{ Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)] \\ \geq \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + \text{Max}_{\pi \in \Pi} [\pi(b_2(\bar{\xi}) - B_1(\bar{\xi}) \bar{x}_1)] \end{aligned}$$

증명 : 만약  $\Pi = \emptyset$ 이면 위 부등식의 우변은  $-\infty$ 가 됨으로 자연히 부등식이 성립된다. 또 만약 부등식의 좌변  $E_{\xi} \text{ Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)] = +\infty$ 이면 부등식은 자동적으로 성립된다. 여기서  $\Pi \neq \emptyset, \sigma \in \Sigma$ 이며  $E_{\xi} \text{ Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)] < \infty$ 라고 가정하자. 어떤  $\xi$ 에 대해서도 쌍대정리에 의해 다음이 성립된다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)] \\ = \text{Max}_{\pi \in \Pi} [\sigma b_1 + \pi(b_2(\xi) - B_1(\xi) x_1(\xi))] \\ \geq \sigma b_1 + \pi(b_2(\xi) - B_1(\xi) x_1(\xi)) \quad \forall \pi \in \Pi \end{aligned}$$

위의 식 양편에서 모든  $\xi$ 에 대하여 기대값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{\xi} \text{ Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)] \\ = E_{\xi} \text{ Max}_{\pi \in \Pi} [\sigma b_1 + \pi(b_2(\xi) - B_1(\xi) x_1(\xi))] \\ \geq E_{\xi} [\sigma b_1 + \pi(b_2(\xi) - B_1(\xi) x_1(\xi))] \quad \forall \pi \in \Pi \end{aligned}$$

위 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} E_{\xi} \text{ Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)] & \geq \text{Max}_{\pi \in \Pi} \\ & [E_{\xi} [\sigma b_1 + \pi(b_2(\xi) - B_1(\xi) x_1(\xi))]] \\ & = \text{Max}_{\pi \in \Pi} [\sigma b_1 + \pi(b_2(\bar{\xi}) - B_1(\bar{\xi}) \bar{x}_1)] \end{aligned}$$

$$= \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + \text{Max}_{\pi \in \Pi} [\pi (b_2(\bar{\xi}) - B_1(\bar{\xi}) \bar{x}_1)]] (\because \text{쌍대정리}) \blacksquare$$

정리 1에 의하여  $E_{\xi} \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)] \geq \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + \text{Max}_{\pi \in \Pi} \pi (b_2(\bar{\xi}) - B_1(\bar{\xi}) \bar{x}_1)]$ 이다. 여기서 부등식의 우변  $\text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + \text{Max}_{\pi \in \Pi} \pi (b_2(\bar{\xi}) - B_1(\bar{\xi}) \bar{x}_1)] = \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + q(x_1, E_{\xi}(\xi))]$ 이므로 WSV  $\geq$  MV이다. 정리 1은 “젠슨의 부등식 정리”(theorem of Jensen’s inequality)와 볼록성(convexity)에 의해서도 증명될 수 있지만 위에서는 쌍대정리를 이용하여 증명하였다. 이제 2단계 확률적 선형계획문제의 “wait-and-see” 문제의 최적값들인 TSV와 WSV의 관계를 살펴보자.

정리 2 :  $\text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + E_{\xi} [q(x_1, \xi)]] \geq E_{\xi} \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)]$ .

증명 : 좌변  $\text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + E_{\xi} [q(x_1, \xi)]]$ 의 최적해를  $x_1^*$ 으로 가정하자.  $x_1^*(\xi)$ 을 “wait-and-see” 문제의 각 개별 시나리오 문제  $\text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)]$ 의 최적해라 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + E_{\xi} [q(x_1, \xi)]] \\ &= c_1 x_1^* + E_{\xi} [q(x_1^*, \xi)] \\ & E_{\xi} \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1(\xi) + q(x_1(\xi), \xi)] \\ &= E_{\xi} [c_1 x_1^*(\xi) + q(x_1^*(\xi), \xi)]. \end{aligned}$$

$c_1 x_1^* + q(x_1^*, \xi) \geq c_1 x_1^*(\xi) + q(x_1^*(\xi), \xi)$ 가 모든  $\xi$ 에 대하여 항상 성립한다.

따라서  $E_{\xi} [c_1 x_1^* + q(x_1^*, \xi)] = c_1 x_1^* + E_{\xi} [q(x_1^*, \xi)] \geq E_{\xi} [c_1 x_1^*(\xi) + q(x_1^*(\xi), \xi)] \blacksquare$

정리 2에 의하여 TSV  $\geq$  WSV이다. 정리1과 정리 2에 의하여 TSV  $\geq$  WSV  $\geq$  MV의 관계가 성립된다. 이제 2단계 확률적 선형계획문제의 최적값인 TSV와 EMV, EVS<sub>k</sub>, EWSV의 관계를 살펴보자.

정리 3 :  $\text{Inf} [c_1 x_1^*(\xi_k) + E_{\xi} [q(x_1^*(\xi_k), \xi)]] \geq \text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + E_{\xi} [q(x_1, \xi)]]$ ,  $k = 1, \dots, K$

증명 :  $c_1 x_1^*(\xi_k) + E_{\xi} [q(x_1^*(\xi_k), \xi)]$ ,  $k = 1, \dots, K$  중에서 최소인 값을  $\text{Inf} [c_1 x_1^*(\xi_k) + E_{\xi} [q(x_1^*(\xi_k), \xi)]]$ 라고 하자.  $\text{Inf} [c_1 x_1^*(\xi_k) + E_{\xi} [q(x_1^*(\xi_k), \xi)]]$ 에서  $x_1^*(\xi_k)$ 는 1단계 실행가능 영역을 만족시키고 있다.(즉,  $x_1^*(\xi_k) \in X$ ) 또한  $\text{Min}_{x_1 \in X} [c_1 x_1 + E_{\xi} [q(x_1, \xi)]]$ 이 볼록함수이므로 젠슨의 부등식 정리에 의해 위 식은 자명하다.  $\blacksquare$

정리 3에 의해  $\text{Inf}_{1 \leq k \leq K} \text{EVS}_k \geq \text{TSV}$ 이다. 다음 EVS<sub>k</sub>와 EWSV의 관계를 살펴 보자.

정리 4 :  $c_1 x_1^*(\xi) + E_{\xi} [q(x_1^*(\xi), \xi)] \geq \text{Inf} [c_1 x_1^*(\xi_k) + E_{\xi} [q(x_1^*(\xi_k), \xi)]]$ ,  $k = 1, \dots, K$

증명 :  $c_1 x_1^*(\xi) + E_{\xi} [q(x_1^*(\xi), \xi)]$ 에서  $x_1^*(\xi)$ 는  $x_1^*(\xi_k)$ 의 선형결합이므로(즉,  $x_1^*(\xi) = \sum_{k=1}^K p(\xi_k) x_1^*(\xi_k)$ )  $x_1^*(\xi)$ 은 1단계 실행가능영역을 만족시킨다.(즉,  $x_1^*(\xi) \in X$ ) 볼록성과 선형결합성에 의해  $\text{Inf} [c_1 x_1^*(\xi_k) + E_{\xi} [q(x_1^*(\xi_k), \xi)]]$ ,  $k = 1, \dots, K$ 은 좌변값보다 항상 작거나 같다.  $\blacksquare$

정리 4에 의해 EWSV  $\geq \text{Inf}_{1 \leq k \leq K} \text{EVS}_k$ 이다. 이제 EMV와 TSV,  $\text{Inf}_{1 \leq k \leq K} \text{EVS}_k$ , EWSV의 관계를 살펴보자. 기대값 문제의 1단계 최적해는 1단계 실행가능 영역을 만족시키고 있다.(즉,  $\bar{x}_1 \in X$ ) 볼록성에 의해 TSV  $\leq$  EMV이다. 그러나 EMV와  $\text{Inf}_{1 \leq k \leq K} \text{EVS}_k$ , EWSV의 관계는 확실하지 않다. 이상의 논의를 요약하면 이들 최적값 간의 관계는 다음과 같다.

$$\text{MV} \leq \text{WSV} \leq \text{TSV} \leq \text{Inf}_{1 \leq k \leq K} \text{EVS}_k \leq \text{EWSV} \tag{14}$$

2단계 확률적 선형계획문제의 최적값인 TSV에 대하여 상한한계는  $\text{Inf} \text{EVS}_k$ , EWSV, EMV이며 하한한계는 WSV와 MV이다. 최적값과 이들 상한한계, 하한한계와의 상대 오차(relative error)를 구할 수 있다. 예를 들어 상한한계인  $\text{Inf} \text{EVS}_k$ 와의 상대오차는 다음과 같다.

$$\text{Inf} \text{EVS}_k \text{ 상대오차} = \frac{\text{TSV} - \text{Inf} \text{EVS}_k}{\text{Inf} \text{EVS}_k}$$

$\text{Inf EVS}_k$  상대오차가 아주 작다면  $k$ 번째 개별 시나리오 문제의 최적해를 2단계 확률적 선형계획 문제의 최적해로 대체하여 사용할 수 있을 것이다.

## 4. 컴퓨터 실행과 실험결과

### 4.1 실험문제와 컴퓨터 실행

실험문제는 확률적 선형계획문제의 실험문제로 자주 사용되는 문제를 사용하였다. PGP1(Power Generation Problem 1)은 불확실한 지역별 전력수요에 대비하여 설치비용과 운영비용을 최소화하기 위해 예비설비 능력을 결정하는 문제이다[10]. PGP2(Power Generation Problem 2)는 PGP1과 유사하지만 1개의 예비설비 능력을 결정하는 것이 아니라 미래 불확실한 수요에 대하여 현재 여러 전력원의 설비능력 확장과 신규확장을 고려하는 문제로 원문제에 약간의 수정이 가해졌다[14]. CEP(Capacity Expansion Problem)는 불확실한 미래 수요에 대비하여 생산능력 확장을 계획하는 문제이다[10]. AAP(Aircraft Allocation Problem)는 각 노선에 있어 불확실한 승객의 수요에 대비하여 여러 종류의 항공기를 노선에 할당하는 문제이다[8]. 실험문제들의 규모, 확률변수와 시나리오의 수는 다음 <표 1>에 나타나 있다.

<표 1> 실험문제의 특성

문 제		PGP1	CEP	PGP2	AAP
1 단계	제 약 조건식	1	9	2	4
	변 수	1	8	4	20
2 단계	제 약 조건식	8	7	7	5
	변 수	24	15	12	10
확 률 변 수		3	3	3	5
시나리오의 수		27	216	576	750

PGP1은 확률변수가 3개이며 확률변수 1개당 실현가능 경우가 3개이기에 전체 시나리오의 수가 27개이다. 기대값 문제로 형성하면 문제의 규모가

제약조건식은 9개, 의사결정변수는 25개로 아주 작은 규모이나 2단계 확률적 선형계획문제로 형성하면 제약조건식은 87개, 의사결정변수는 649개로 문제의 규모가 커진다. CEP는 확률변수가 3개이며 확률변수 1개당 실현가능(realization)한 경우가 6개이기에 전체 시나리오의 수가 216개이다. CEP를 2단계 확률적 선형계획문제로 형성하면 제약조건식은 229개, 의사결정변수는 3,248개로 규모가 커지게 된다. PGP2는 확률변수가 3개이지만 확률변수의 실현가능 경우가 각각 9, 8, 8개로 전체 시나리오의 개수는 576개이다. PGP2를 2단계 확률적 선형계획문제로 형성하면 제약조건식은 582개, 의사결정변수는 6,916개이다. AAP는 확률변수가 5개이지만 확률변수의 실현가능 경우가 각각 5, 2, 5, 5, 3개로 전체 시나리오의 수가 750개이다. 2단계 확률적 선형계획문제는 제약조건식이 3,754개, 의사결정변수가 7,520개이다.

기대값 문제, “wait-and-see” 문제, 2단계 확률적 선형계획문제의 최적해를 구하기 위해 GAMS PC Window Version 2.5의 LP 패키지인 Cplex를 사용하였다[7]. 2단계 확률적 선형계획문제는 분해해법으로 최적해를 구하기 위해 L형 알고리즘을 이용하였다[21]. L형 알고리즘은 2단계 확률적 선형계획문제의 해를 구하는 일반적인 방법으로 사용되어져 왔으며[2, 17] 이 연구가 다른 알고리즘과의 컴퓨팅 실행속도를 비교하는 문제가 아니기 때문에 가장 일반적 알고리즘을 사용하였다. L형 알고리즘의 실행을 위해 필요한 쌍대값 등을 구하고 반복적인 실행에 필요한 절차는 GAMS에서 실행되었다[1, 3].

기대값 문제와 “wait-and-see” 문제의 1단계 최적해를 구한 후 이들 최적해를 근거로 2단계 하위 문제들의 기대 최적값을 구하였다. 해당되는 최적해에 따라 구하여진 값들이  $\text{EWSV}$ ,  $\text{EMV}$ ,  $\text{EVS}_k$  (for all  $k=1, \dots, K$ )이다. 각각의  $\text{EVS}$ 를 구하기 위해서는 각 문제에 있어  $K$ 개만큼의 2단계 하위문제를 평가하는 것이 필요하였다. 문제 AAP의 경우 750개의 시나리오별 문제에 대하여 각각의  $\text{EVS}$ 를 구하여야 한다.



4.2 실험결과

실험문제 각각에 대하여 2단계 확률적 선형계획 문제의 최적값(TSV)을 구하였다. <표 2>에는 각 실험문제의 최적값과 최적해를 구하기까지 L형 알고리즘을 적용한 경우의 반복회수가 나타나 있다.

<표 2> 실험문제의 TSV와 반복회수

문 제	PGP 1	CEP	PGP 2	AAP
최 적 값	24,989.73	355,160	492.77	1566.04
반복회수	7	2	20	18

2단계 확률적 선형계획문제로 형성한 경우, 최적해를 구하기 위해 L형 알고리즘을 적용하면 PGP1은 7회, CEP는 2회, PGP 2는 20회, AAP는 18회의 반복이 필요하다. L형 알고리즘이라는 분해해법을 통해 2단계 확률적 선형계획문제의 해를 구하기 위해서는 그 절차가 복잡하고 많은 컴퓨팅 시간이 요구되고 있다. 예를 들어 PGP 2는 20회를 반복할 때마다 매회 1개의 주문제(master problem)와 576개의 2단계 하위문제의 최적해를 구하여야 하므로 총 11,540번의 선형계획문제를 해결해야만 한다.

다음 <표 3>에는 “wait-and-see” 문제의 최적값(WSV), 기대값 문제의 최적값(MV), “wait-and-see” 문제의 기대 최적값(EWSV), 기대값 문제의 기대 최적값(EMV), 개별 시나리오 문제의 기대 최적값 중 최소값(Inf EVS<sub>k</sub>)들이 첫째 열에 표시되어 있고 두 번째 열에는 TSV와의 상대오차가 나타나 있다.

<표 3>을 보면 PGP 1에서 Inf EVS<sub>k</sub>(k=1, ..., K)는 2단계 확률적 선형계획문제의 최적값 TSV와 일치한다. TSV와의 상대오차가 가장 큰 것은 기대값 문제 최적값인 MV로 상대오차가 0.0745이다. CEP에서 Inf EVS는 TSV와 일치하며 상대오차가 가장 큰 것은 MV로 상대오차가 2.9352이다. PGP 2에서 Inf EVS의 상대오차가 가장 작으며 그 값은 0.002이다. 상대오차가 가장 큰 값은 MV이며 상대오차가 0.15이다. AAP에서 Inf EVS의 상대오차가 0.0221으로 가장 작으며 MV의 상대오차는 0.5098로 가장 크다.

<표 3>에서 2단계 확률적 선형계획문제의 최적값 TSV의 하한한계는 WSV, MV이고 상한한계는 EVS, EMV, EWSV가 됨을 보여주고 있다. 하한한계, TSV, 상한한계 값들의 서열순위는 식 (14)에서 보여주는 바와 일치한다.

문제 PGP 1, CEP, AAP의 기대값 문제나 “wait-and-see” 문제의 최적해를 가지고 EMV, EWSV를 평가하는 경우, 해당하는 2단계 하위문제가 모두 실행 가능하다. 그러나 PGP 2의 경우 기대값 문제나 “wait-and-see” 문제의 해를 가지고 EMV, EWSV를 평가하는 경우 각각 204개 하위문제가 실행 불가능하다. 또한 개별 시나리오 문제의 최적해를 가지고 “개별 시나리오 문제의 기대 최적값”을 평가하는 경우에도 225개의 EVS가 실행 불가능하다.

PGP 2에서 실행가능한 해를 가지고 EMV, EWSV, EVS를 평가하기 위해 우변상수를 변화시켰다. 실행 불가능한 하위문제를 분석하여 모든 시나리오

<표 3> 실험문제의 WSV, MV, EWSV, EMV, Inf EVS와 상대오차

문 제	PGP 1		CEP		PGP 2		AAP	
	값	상대오차	값	상대오차	값	상대오차	값	상대오차
WSV	23,273.57	0.0737	340,049	0.0444	429.16*	0.1482	1,195.84	0.3096
MV	23,256.80	0.0745	90,250	2.9352	428.50*	0.1500	1,037.25	0.5098
EWSV	24,989.96	0.00001	502,549	0.2933	494.93	0.0044	1,844.72	0.1511
EMV	24,989.96	0.00001	366,939	0.0321	498.58	0.0124	1,724.25	0.0918
Inf EVS	24,989.73	0.0000	355,160	0.0000	493.75	0.0020	1,601.40	0.0221

에 있어 최소의 수요량은 충족할 수 있도록 우변상수의 값을 증가시켰다. 이렇게 구한 기대값 문제나 “wait-and-see” 문제의 해는 2단계 하위문제를 모두 실행 가능하게 하였다. 이 경우 MV와 WSV는 각각 491.5와 492.3으로 이 값들은 2단계 확률적 선형계획문제의 하한한계가 되지만 TSV와의 상대오차는 상당히 줄어들게 된다. <표 3>의 EWSV, EMV, Inf EVS 값은 2단계 하위문제가 모두 실행 가능한 경우의 값들이다.

따라서 모든 문제의 상한과 하한한계를 구하는데 있어 2단계 하위문제가 모두 실행가능한지 아닌지를 평가하는 것이 일차적으로 필요하다. 만약 2단계 하위문제의 일부가 실행 불가능하다면 기대값 문제나 “wait-and-see” 문제의 우변상수를 변화시키거나 제약조건식을 추가하는 등 해당 하위문제가 실행 가능하도록 하는 조치가 필요하다.

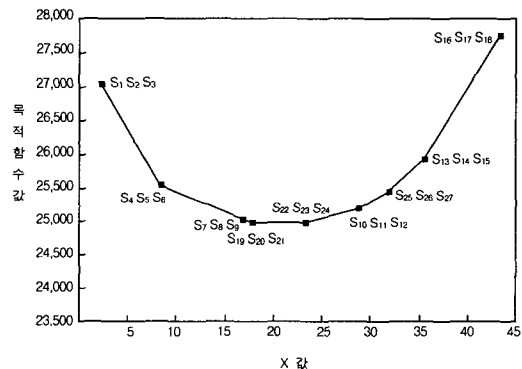
이상을 종합하면 전체적으로 2단계 확률적 선형계획문제 최적값과 상대오차가 가장 큰 것이 기대값 문제의 최적값이며 가장 작은 것은 Inf EVS<sub>k</sub>이다. Inf EVS<sub>k</sub>가 TSV와의 상대오차가 가장 작기 때문에 해당하는 k번째 시나리오의 1단계 최적해를 2단계 확률적 선형계획문제의 최적해로 대체할 수 있는 가능성이 가장 크다.

그러나 EMV나 EWSV는 기대값 문제의 최적해와 “wait-and-see” 문제의 1단계 최적해를 이용하여 K개의 2단계 하위문제들을 1번씩만 평가하면 된다. 하지만 EVS는 최대 K개만큼 존재하기에 각 EVS별로 또 K개의 하위문제들을 평가해야 하므로 계산부담이 더 증가하게 된다. 즉, EVS는 EMV나 EWSV보다 K<sup>2</sup>배의 계산노력이 더 요구된다. 다음 <표 4>는 각 문제별로 EVS의 개수와 이들의 최소값과 최대값을 보여주고 있다.

<표 4> 실험문제별 EVS 최소값, 최대값

문 제	PGP 1	CEP	PGP 2	AAP
EVS 개수	27	216	576	750
최 소 값	24,789.73	355,160	493.75	1,601.40
최 대 값	27,528.76	1,800,000	568.71	2,887.28

PGP1은 최소값과 최대값의 범위의 차이가 상대적으로 가장 작으나 CEP의 경우는 차이가 상대적으로 가장 크다. EVS 값이 시나리오별로 변화하는 형태를 살펴보자. 다음 [그림 1]은 PGP1의 “개별 시나리오 문제”에서 각 시나리오별로 1단계 최적해와 최적값의 관계를 표시한 것이다. PGP1은 1단계 의사결정변수가 1개이기에 시나리오별 최적해 X\*를 수평축으로, 해당되는 시나리오의 최적값을 수직축으로 하였다. 그림은 의사결정변수와 최적값간의 관계를 잘 보여주고 있다. [그림 1]에서 보면 최적해인 X가 22.93에서 EVS의 값이 최소이며 나머지에서는 그 값이 증가하게 된다. 이 해와 값들은 2단계 확률적 선형계획문제의 최적해 및 최적값과 일치한다.



[그림 1] PGP1 문제의 최적해 변화에 따른 EVS

### 5. 결 론

이 연구는 2단계 확률적 선형계획문제의 다양한 상한한계와 하한한계를 제시해줄 수 있는 확률적 선형계획문제의 형성과 성질에 대한 연구를 통해 최적값과 상한 및 하한한계와의 오차관계를 분석하였다. 특히 “wait-and-see” 접근방법을 수정한 개별 시나리오 문제의 최적값을 상한한계로 사용할 수 있는 가능성에 대해 분석하였다.

2단계 확률적 선형계획문제 최적값의 하한한계로는 기대값 문제의 최적값(MV)과 “wait-and-see”

문제의 최적값(WSV)이 있다. 상한한계로는 “기대값 문제의 기대 최적값”(EMV), “wait-and-see 문제의 기대 최적값”(EWSV), “개별 시나리오 문제의 기대 최적값”(EVS)이 있다.

2단계 확률적 선형계획문제는 미래에 어떤 시나리오가 발생할지 모르는 상황에서 모든 발생가능한 시나리오에 대한 확률만을 가지고 현재 1단계 최적해를 결정하였다. 그러나 개별 시나리오 문제의 최적해를 기초로 평가한 “개별 시나리오 문제의 기대 최적값”은 2단계 확률적 선형계획문제의 상한한계를 제공해 줄 수 있을 뿐 아니라 의사결정대안 평가에 유용하다. 모든 시나리오가 미래에 함께 발생하는 것이 아니라 그 중에서 하나의 시나리오 만이 발생하기 때문에 “개별 시나리오 문제의 기대 최적값”(EVS)은 대안평가에 유용한 기준이 될 수 있다. 또한 개별 시나리오 문제의 1단계 최적해가 어떠한 시나리오 하에서 실행 불가능한 것인지를 평가할 수 있기에 미래 우발계획에 효과적으로 대처할 수 있다.

2단계 확률적 선형계획문제의 최적해를 분해해법으로 구하기 위해서는 절차가 복잡할 뿐 아니라 상당한 반복이 필요하여 컴퓨팅 시간이 많이 필요하다. 그러나 2단계 확률적 해를 대체할 수 있는 “기대값 문제”의 최적해, “wait-and-see” 문제의 최적해, “개별 시나리오 문제”의 최적해를 구하는 것은 2단계 확률적 계획문제의 최적해를 구할 수 있는 절차보다 상대적으로 덜 복잡하며 시간도 덜 소요되고 있다.

2단계 확률적 선형계획문제의 최적값과 상한한계로서의 “개별 시나리오 문제의 기대 최적값(EVS)”은 증명을 통해 다른 한계들에 비해 상대오차가 작다는 것을 확인하였다. 또한 실험문제의 컴퓨터 실행을 통해서도 “개별 시나리오 문제의 기대 최적값”(EVS)의 상대오차가 가장 작다는 것을 확인할 수 있었다. EVS는 각 문제에 최대 K개만큼의 시나리오가 있으며 이 모두를 평가하여 최소값을 구해야 하기 때문에 다른 상한한계들 보다 더 많은 계산시간이 소요된다는 단점이 있다. 하지만 “개

별 시나리오 문제의 기대 최적값” 중의 최소값(Inf EVS)은 2단계 확률적 선형계획문제의 최적값과의 상대오차가 가장 작으며 TSV를 계산하는 것보다 계산부담도 작기 때문에 개별 시나리오의 1단계 최적해를 대체해로 사용할 수 있는 가능성이 커진다. 또한 각 개별 시나리오 문제는 경영의사 결정에 있어 하나의 대안이며 EVS와 해당하는 최적해를 계산하는 것은 대안 평가에 중요한 의미가 있다.

### 참고 문헌

- [1] 이상진, “저장능력이 무한대인 장소입지문제에 밴더즈 분해기법과 GAMS의 적용”, 『경영과학』, 제12권, 제2호(1995), pp.63-75.
- [2] 이상진, “A study on solution methods of two-stage stochastic LP problems”, 『한국경영과학회지』, 제22권, 제1호(1997), pp.1-24.
- [3] 이상진, “요가 불확실한 경우의 장소입지 결정 모형 연구”, 『경영과학』, 제15권, 제1호(1998), pp.33-47.
- [4] Avriel, M. and A.C. Williams, “The value of information and stochastic programming,” *Operations Research*, Vol.18(1970), pp.947-954.
- [5] Birge, J.R., and R.J-B. Wets, “Designing approximation schemes for stochastic optimization problems, in particular for stochastic programs with recourse,” *Mathematical Programming Study*, Vol.27(1986), pp.54-102.
- [6] Birge, J.R., “The value of the stochastic solution in stochastic linear programs with fixed recourse,” *Mathematical Programming*, Vol.24(1982), pp.314-325.
- [7] Brooke, A., D. Kendrick, and A. Meeraus, *GAMS: A User's Guide*, The Scientific Press, Redwood City, CA, 1988.
- [8] Dantzig, G.B., *Linear Programming and*

- Extensions*, Princeton University Press, 1963, pp.572-597.
- [9] Dantzig, G.B., and G. Infanger, "Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization," *Technical Report SOL 91-11*, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, CA, 1991.
- [10] Higle, Julia L. and Suvrajeet Sen, *Stochastic Optimization : A Statistical Method for Large Scale Stochastic LP*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1996.
- [11] Huang, C.C., I. Vertinsky, and W.T. Ziemba, "Sharp bounds on the value of perfect information," *Operations Research*, Vol.25(1977), pp.128-139.
- [12] Gondzio, J., and A. Ruszcynski, "A sensitivity method for basis inverse representation in multistage stochastic LP problems," *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol.74(1992), pp.221-242.
- [13] Lasdon, L.S., *Optimization Theory For Large Systems*, The Macmillan Company, 1970.
- [14] Louveaux, F.V. and Y. Smeers, "Optimal investment for electricity generation : A stochastic model and a test problem," in *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*, Y. Ermoliev and R. J-B. Wets, eds., Springer-Verlag, Berlin(1988), pp.445-453.
- [15] Lustig, I.J., J.M. Mulvey, and T.J. Carpenter, "Formulating Stochastic programs for interior point methods," *Operations Research*, Vol.35(1991), pp.757-770.
- [16] Madansky, A., "Inequalities for stochastic linear program problems," *Management Science*, Vol.6(1960), pp.197-204.
- [17] Mulvey, J.M., and A. Ruszcynski, "A new scenario decomposition method for large-scale stochastic optimization," *Operations Research*, Vol.43(1995), pp.477-490.
- [18] Mulvey, J.M., and H. Vladimirou, "Applying the progressive hedging algorithm to stochastic generalized networks," *Annals of Operations Research*, Vol.31(1991), pp.399-424.
- [19] Mulvey, J.M., and H. Vladimirou, "Stochastic network programming for financial planning problems," *Management Science*, Vol. 38(1992), pp.1642-1664.
- [20] Rockafellar, R.T., and R. J-B. Wets, "Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty," *Mathematical Operations Research*, Vol.16(1991), pp.1-23.
- [21] Van Slyke, R., and R.J-B. Wets, "L-shaped linear programs with application to optimal control and stochastic optimization," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.17 (1969), pp.638-663.
- [22] Walkup, D.W., and R.J-B. Wets, "Stochastic programs with recourse," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.15(1967), pp.1299-1314.
- [23] Wets, R.J-B., "Stochastic programming : Solution techniques and approximation schemes," *Mathematical Programming : The State of the Art*, Edited by A.Bachem, M. Grötschel and B.Korte, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [24] Wets, R.J-B., "Programming under uncertainty : The equivalent convex program," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.14(1966), pp.89-105.
- [25] Wets, R.J-B., "Programming under uncertainty : The solution set," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.14(1966), pp. 1143-1151.