

축과 베어링 변형을 고려한 헬리컬 기어의 전달오차 해석

박찬일* · 조도현*
(2002년 4월 6일 접수, 2002년 7월 29일 심사완료)

Transmission Error Analysis of Helical Gears in Consideration of Shaft and Bearing Deformation

Chan IL Park and Do Hyun Cho

Key Words: Transmission Error(전달오차), Helical Gear(헬리컬기어), Shaft(축), Bearing(베어링), Deformation(변형)

Abstract

Transmission error is highly related to gear noise. In order to predict the helical gear noise, transmission error analysis is needed. Up to now, the studies for the transmission error were conducted by the modeling of helical gears only. However, since helical gears are supported by the shaft and bearing, transmission error has the effects of the elements. In this study, the procedure to consider the shaft deformation with bearing stiffness for the transmission error analysis is proposed. To do so, the relationship between gear error and shaft deformation is analytically derived. Shaft deformation with bearing stiffness is analyzed by FEM. It is measured in the experimental test rig by the non-contact displacement sensors. Using the tooth error from tooth modification and the shaft deformation, the effects of shaft on the loaded transmission error are investigated.

기호설명

R_b : 기초원반경, mm
 α_s : 정면압력각, degree
 β_b : 나선각, degree

F_R : 반경방향의 외력, kgf
 F_A : 축방향의 외력, kgf
 L : 톨러의 유효길이, mm
 Z : 전동요소의 수
 α : 접촉각, radian
 K_R : 반경방향 베어링강성, kgf/mm
 K_A : 축방향 베어링강성, kgf/mm
 e_m : 미스얼라인먼트에 의한 치의 오차
 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$: 기어의 x, y, z방향의 회전자유도

† 책임저자, 회원, 강릉대학교 정밀기계공학과

E-mail : pci@kangnung.ac.kr

TEL : (033)640-2392 FAX : (033)640-2244

* 회원, 강릉대학교 대학원 정밀기계공학과

1, 2 : 구동기어, 피동기어

1. 서론

자동차의 변속기에서 나오는 소음은 엔진에 비해 그 음압이 낮아도 고주파수이므로 승객에게 고통을 주고 엔진소음의 저감에 따라 더욱 그 영향이 커진다. 더욱이 최근 소음의 방출 규제가 더욱 엄해지는 경향에 대응하기 위하여 차세대 저소음 자동차 개발에서 기어소음의 저감이 필수적이다.

헬리컬 기어의 전달오차는 기어 소음과 밀접하게 연관되어 있다고 알려져 있다. 이 때문에 기어 소음을 예측하기 위해 전달오차 해석에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 기어상자는 기어뿐만 아니라, 축, 베어링, 하우징으로 이루어져 있고 이 모든 요소가 기어의 전달오차에 영향을 미친다고 볼 수 있다. 그러므로 헬리컬 기어계의 전달오차를 구하기 위해서는 이의 모든 요소의 변형을 고려하는 것이 필요하다. 전달오차와 관련된 연구로 Umezawa는 헬리컬 기어의 회전 지연을 구하였고⁽¹⁾ Barnett등은 스퍼기어의 전달오차를 계산하였다.⁽²⁾ Umeyama등은 헬리컬 기어의 전달오차를 계산하고 치 표면 수정의 영향을 검토하였다.⁽³⁾ Park등은 헬리컬 기어의 치형 방향 오차 및 수정, 리드 방향 오차 및 수정 고려하여 전달오차를 계산하였고,⁽⁴⁻⁷⁾ Joo등도 치형 방향 수정을 고려하여 치합 전달오차를 구하였다.⁽⁸⁾ 축과 베어링의 변형을 고려한 연구로 Saiki등은 헬리컬 기어의 치표면 수정을 고려하고 축의 변형의 실험값과 조립오차를 입력하여 전달오차를 계산하였다.⁽⁹⁾ Conry등은 헬리컬 기어축이 일정한 경우에 축의 변형을 고려하고⁽¹⁰⁾ 이 논문을 발전시켜 Houser 그룹은 LDP 프로그램에서 일정한 직경의 축의 변형과 선형화된 베어링 변형을 고려하여 헬리컬 기어계의 전달오차를 계산하였다.⁽¹¹⁾

이와 같이 지금까지 이러한 전달오차의 연구는 기어 치의 변형과 기어의 치형 방향의 오차 및 수정, 리드 방향의 오차 및 수정 등 주로 기어만을 대상으로 모델링하여 해석하였거나 축의 변형

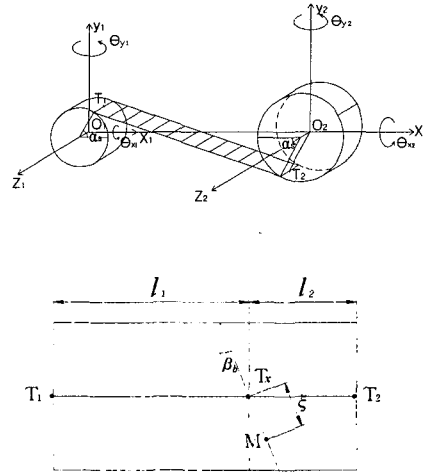


Fig. 1 The coordinate system and the plane of action for the helical gears

과 베어링 변형을 상세히 고려하지 않았다. 그러므로 본 연구에서는 기어 뿐 아니라 축과 베어링의 변형을 고려하여 전달오차를 계산하는 방법을 제안한다. 이를 위하여 축의 변형이 기어 오차와의 관계식을 유도하고 이를 근거로 기어의 전달하중과 변형 관계식을 이용하여 전달오차를 계산한다. 축의 변형은 베어링의 강성을 고려하여 유한요소법을 사용하여 계산하고 비접촉 변위 시스템을 이용하여 축의 변형을 측정하여 축의 해석 결과와 비교한다. 이러한 기법을 사용하여 수치예제로 축의 변형, 전달하중이 전달오차에 미치는 영향을 검토한다.

2. 전달오차 해석

2.1 축의 변형과 치의 오차의 관계

축의 변형은 맞물리는 기어 사이에 미스얼라인먼트를 발생시켜 치 접촉을 편접촉으로 이끈다.

이와 같이 축의 변형에 의해 Fig. 1과 같은 좌표계에서 구동기어가 θ_{x1} 과 θ_{x2} 로 회전되어 있다고 하면 Fig. 1의 작용면상의 점 M에서 축직각 방향의 치의 오차는 다음 식으로 나타내어진다.

$$e_{m1}(x) = \left((\theta_{x1}i + \theta_{y1}j) \times \vec{O_1M} \right) \cdot \frac{\vec{T_1 T_x}}{|\vec{T_1 T_x}|} \quad (1)$$

Where

$$\begin{aligned} \vec{T_1 T_x} &= l_1 (\sin \alpha_s i - \cos \alpha_s j) \\ \vec{O_1M} &= (R_{b1} \cos \alpha_s + l_1 \sin \alpha_s + x l_1 \sin \beta_b \sin \alpha_s) i + (R_{b1} \sin \alpha_s - l_1 \cos \alpha_s - x l_1 \sin \beta_b \cos \alpha_s) j + x \cos \beta_b k \end{aligned}$$

$\vec{T_1 T_x}$ 와 $\vec{O_1M}$ 의 관계식을 식 (1)에 대입하면 축직각 방향의 치의 오차는 다음과 같이 된다.

$$e_{m1}(x) = x \cos \beta_b \sin \alpha_s \theta_{y1} + x \cos \beta_b \cos \alpha_s \theta_{x1} \quad (2)$$

구동기어와 마찬가지로 피동기어도 Fig. 1의 작용평면의 접촉선 상의 점 M에서 축의 변형에 의해 θ_{x2} 와 θ_{y2} 로 회전되어 있다면 이 회전각에 의한 축직각 방향의 치의 오차는 다음 식으로 주어진다.

$$e_{m2}(x) = \left((\theta_{x2}i + \theta_{y2}j) \times \vec{O_2M} \right) \cdot \frac{\vec{T_2 T_x}}{|\vec{T_2 T_x}|} \quad (3)$$

Where

$$\begin{aligned} \vec{T_2 T_x} &= l_2 (-\sin \alpha_s i + \cos \alpha_s j) \\ \vec{O_2M} &= (-R_{b2} \cos \alpha_s - l_2 \sin \alpha_s + x l_2 \sin \beta_b \sin \alpha_s) i + (-R_{b2} \sin \alpha_s + l_2 \cos \alpha_s - x l_2 \sin \beta_b \cos \alpha_s) j + x \cos \beta_b k \end{aligned}$$

$\vec{T_2 T_x}$ 와 $\vec{O_2M}$ 의 관계식을 식 (3)에 대입하면 피동기어의 축직각 방향의 치의 오차는 다음과 같이 된다.

$$e_{m2}(x) = -x \cos \beta_b \sin \alpha_s \theta_{y2} - x \cos \beta_b \cos \alpha_s \theta_{x2} \quad (4)$$

축의 변형에 의한 구동기어와 피동기어 축직각 방향의 오차는 두 오차를 합하여 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} e_m &= e_{m1}(x) + e_{m2}(x) \\ &= x \cos \beta_b \sin \alpha_s (\theta_{y1} - \theta_{y2}) + x \cos \beta_b \cos \alpha_s (\theta_{x1} - \theta_{x2}) \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 전달오차 해석

기어는 각종 설계요인, 제조요인, 조립요인에 의해서 소음이 발생된다. 설계요인으로 기어 강성이 변하고, 제조요인으로 기어 정도가 달라지며, 조립요인에 의해 조립오차가 발생하여 기어 소음을 일으킨다. 이러한 요인들에 의해 기어 사이에는 운동의 불완전한 전달이 이루어지며 이러한 요인을 통칭하여 전달오차라고 한다.

전달오차는 피동기어가 완전한 운동 전달을 위하여 차지해야하는 위치에 대하여 피동기어의 실제 위치 사이의 차이로 정의되며 전달오차 Δ의 계산은 한 개의 접촉선에서 하중분포와 변형 관계에 의해 다음과 같은 적분 방정식으로 나타내어진다.

$$\Delta = \int_{-l}^l K_b(x, \xi) P(\xi) d\xi + K_c(x) P(x) + e(x) \quad (6)$$

여기서 K_b 는 굽힘 영향함수이며 변형의 공통 특성을 결합한 근사식을 사용한다.⁽¹⁾ 각 방향의 공통특성을 구하기 위해 기어치와 치지지부를 파라볼릭 솔리드 요소로 모델링하여 유한요소해석으로 구한다.⁽⁵⁾

K_c 는 접촉 영향함수로 전달오차 해석에서 치의 강성을 좌우하는 비선형 요소이다. 이 영향 함수를 구하기 위해 Weber의 접촉 변형 식⁽¹²⁾을 사용하여 접촉선에 따라 가정된 접촉 변형에 의한 치면의 하중 분포를 구하여 계산한다.

치의 오차 e(x)는 접촉선 각 위치의 구동기어와 피동기어에서 고려된 치형 오차와 리드 방향 오

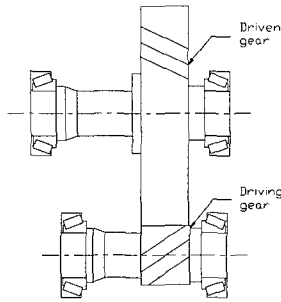


Fig. 2 Helical gear system used in this analysis

Table 1 Gear Data

	driving	driven
Number of teeth	19	89
Face width	50mm	48mm
Normal module	2.5	
Pressure angle	20°	
Helix angle	25°	
Center distance	150mm	
Axial force	-176.71kgf	176.71kgf
Radial force	152.18kgf	-152.18kgf
Tangential force	-378.95kgf	378.95kgf

차와 치형수정, 리드수정의 합을 각각 계산하고 이를 합하여 구한 합성오차와 앞에서 유도한 축의 변형에 의해 치의 오차로 환산된 값을 포함하여 구한다.

3. 베어링 강성을 고려한 축의 변형 해석

3.1 베어링 강성의 계산

본 연구에서는 Fig. 2와 같은 헬리컬 기어계를 지지하는 베어링으로 테이퍼 롤러 베어링을 사용하였다. 이 베어링의 강성은 롤러의 수, 접촉각 등 베어링의 종류 및 예압과 하중에 의해 비선형적으로 변하며 복잡한 계산을 필요로 한다.

이 해석에서는 강성의 초기 평가를 위하여 다

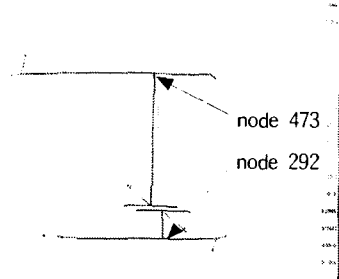


Fig. 3 Deformed shape by FE analysis

Table 2 displacement predicted by FEA

	driving node292	driven node473
Total Translation(mm)	7.6354E-3	7.7804E-3
T1 Translation(mm)	5.7842E-3	-6.0366E-3
T2 Translation(mm)	-3.8563E-3	2.4725E-3
T3 Translation(mm)	3.1577E-3	-4.2405E-3
Total Rotation(rad)	6.8706E-5	2.3329E-4
R1 Rotation(rad)	6.8054E-5	2.3122E-4
R2 Rotation(rad)	5.6238E-6	-1.2363E-5
R3 Rotation(rad)	-7.5833E-6	-2.8380E-5

음과 같이 반경방향 베어링 강성식과 축방향 베어링 강성식을 사용한다.⁽¹⁴⁾

$$K_R = 435.7666 \times F_R^{0.1} Z^{0.9} l^{0.8} \cos \alpha^{1.9} \quad (7)$$

$$K_A = 1859.2708 \times F_A^{0.1} Z^{0.9} l^{0.8} \sin \alpha^{1.9} \quad (8)$$

이 계산에 사용되는 베어링 하중 계산을 위하여 Table 1의 기어 데이터를 사용하였다. 이 하중은 10 kgf·m의 구동토크가 작용할 때 헬리컬 기어에 작용하는 하중이다. 이 기어 하중에서 기어 양쪽의 베어링에 전달되는 반경방향 하중과 축방향 하중을 구하고 이 힘을 강성식 (7)과 (8)에 대입하여 베어링의 강성을 계산하였다.

3.2 축과 베어링 변형의 유한요소 해석

기어계의 변형을 유한요소법으로 해석하기 위해 축은 보요소로, 축의 변형의 효과를 치폭 부위

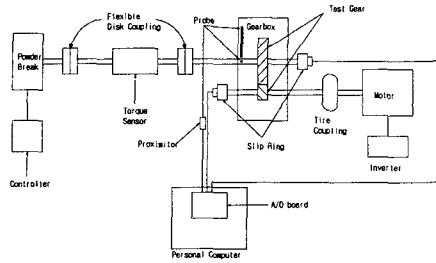


Fig. 4 Schematic diagram of measurement system

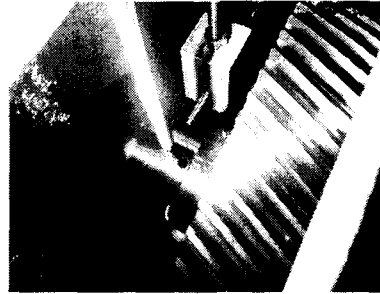


Fig. 5 Displacement sensors mounted

에서 확인하기 위하여 축과 결합되는 기어는 영률을 축보다 1000배 크게하여 강체처럼 거동하게 한 보요소로, 베어링은 반경부분과 축방향으로 나누어서 스프링 요소로 모델링 하였고 축의 재질은 강($E=21000 \text{ kgf} / \text{mm}^2$, $\nu=0.29$)을 사용하였다.

Fig. 3은 MSC Nastran for Windows를 이용하여 기어계의 변형을 해석한 결과이다. Fig. 3에서 구동 기어축과 연결된 노드 292를 포함한 위쪽 방향의 선형 요소가 구동기어이며, 그 위에 수평 방향으로 치폭 길이의 선형요소의 강체보로 나타내었다. 피동 기어축과 연결된 노드 473을 포함한 아래 방향의 선형요소가 피동기어이고 그 끝에 수평 방향으로 치폭 길이의 강체보로 모델링 하였다. 하중은 기어의 피치원의 접촉하는 부분에 주었다. 해석결과는 기어의 맞물리는 지점에서 치폭을 따라서 미스얼라인먼트를 쉽게 관찰 할 수 있게 변형을 과장하여 나타내었다.

축의 변형에 의한 기어의 미스얼라인먼트를 알기 위하여, 기어와 축이 연결되는 부분의 노드에서의 계산된 변위값과 회전각은 Table 2와 같다

Table 2의 결과 값과 하중이 가해지는 방향을 검토해 보면, 하중이 가해지는 방향으로 치지는 것을 알 수 있으며, 치짐은 수 μm 로 아주 미세함을 알 수 있다.

3.3 변형 측정

위의 유한요소해석 결과와 비교해 보기 위해 Bently Nevada사 3300 XL 직경 5mm의 변위센서를 피동기어 축에 수평, 수직으로 두 개를 설치

Table 3 Displacement measured

	Position	Displacement(Volt)
No load	Vertical	-7.3827
	Horizontal	-7.4689
10kgf · m	Vertical	-7.3913
	Horizontal	-7.4266

하고 A/D컨버터로 컴퓨터에 불러들여 Lab View로 결과를 그림으로 볼 수 있도록 프로그램을 작성하여 결과를 보았고 Fig. 4는 이 측정 시스템의 개략도이다.

축의 수평, 수직방향의 변위 측정이 가능하도록 알루미늄으로 지그를 제작하였으며 Fig. 5는 실제로 감속기의 피동기어 축 부위에 설치된 변위 센서들과 자체 제작한 지그의 모습이다.

사용한 변위 센서는 선형 범위가 2 - 14V이기 때문에 정적 무부하일 때 7.3782V, 7.4523V가 되게 하였다. 또한 이 센서는 1 μm 변화가 생기면 7.87mV 변화한다.

변형의 측정 결과는 Table 3과 같고 여기에서 부호에 관계없이 변위센서와 가까워지면 수치가 줄어들어야 하고, 멀어지면 수치는 커져야 한다.

이 결과에서 축의 흔들림 때문에 같은 토크에서도 측정 볼트가 변하므로 그 평균값으로 변위를 산출하였고 토크가 커짐에 따라 수직 방향은 멀어지고 수평 방향은 가까워진다.

이 실험 값과 실험위치와 같은 노드의 유한요소해석 값과 비교해 보면 Table 4와 같다. 여기서

Table 4 Comparison of experiment and FE analysis

	Position	Displacement(mm)
FEM	Vertical	0.003456
	Horizontal	-0.0024447
experiment	Vertical	0.00109
	Horizontal	-0.005375

Table 5 Predicted PPTE

Torque	Rigid shaft	Elastic shaft
10kgf · m	0.3395	0.3328
15kgf · m	0.3656	0.3897

부호는 축과 센서가 가까워지면 -기호를 멀어지면 +의 기호를 사용하였다.

Table 4의 결과에서 보듯이 유한요소해석과 실험 결과 모두 토크를 가하였을 때 수직은 축과 센서가 멀어지고 수평은 축과 센서가 가까워 지는 경향을 보였다.

그러나 유한요소해석의 결과 값이 너무 적기 때문에 실험에서의 측정 결과 값이 유한요소해석 결과 값과 정확히 맞지 않고 경향만 일치함을 확인하였다. 이것은 센서가 잡아낼 수 있는 감도와 정적인 상태의 유한요소해석 결과와 토크를 가하고 실험할 때 고속회전으로 인한 동적인 변위의 측정으로 이어지기 때문이라 사료된다. 그 밖의 축의 흔들림 때문에 오는 오차 등 실험상의 여러 오차 요인에 기인된 것이라 볼 수 있다.

4. 전달오차 해석 결과 및 검토

베어링 강성과 축의 변형을 고려한 전달오차 해석을 위하여 Table 1의 기어 데이터를 이용하였다. 이와 함께, 치형 수정량, 치선 수정 범위, 리드 오차, 리드 크라운링과 Table 2의 유한요소해석으로 구한 기어 축의 변형 값을 입력하여 전달오차를 계산하였다. 축의 변형을 고려하지 않았을 때와 고려했을 때의 경우에 전달오차의 최대값과 최소값의 차이인 PPTE(peak to peak

transmission error)를 비교하였다. 토크가 10kgf · m 일 때는 오히려 축의 변형을 고려할 때 전달오차가 미소하게 작아졌으나 토크가 15kgf · m일 때는 축의 변형이 고려되었을 때의 PPTE가 커졌다. 이것은 사용된 축이 충분한 강성을 가지고 있어서 토크 10kgf · m일 때 축의 변형의 효과가 치의 오차로 0.6 μm의 기여 밖에 하지 않아 생긴 것으로 사료된다. 그러나 토크가 증가함에 따라 그 차이가 커져서 전달오차에 기여가 커지는 것을 알 수 있다. 한 예로 이 모델은 축의 직경이 평균 45mm로 충분한 축 강성을 가지고 있으므로 축의 직경을 20mm로 낮추어 축의 변형 값을 고려한 결과 PPTE가 0.3918로 커졌다. 차후 경량화 목적상 축의 직경을 크게 할 수 없을 때는 이러한 축의 영향은 더욱 커질 것이며 이러한 방법을 사용하여 그 영향을 검토 할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 베어링 강성과 축의 영향이 전달오차와의 관계를 규명하고자 시도하였다. 이를 위하여 축의 변형이 기어 오차로의 변환되는 관계식을 유도하고 이를 근거로 기어의 전달하중과 변형 관계식을 이용하여 전달오차를 계산하였다. 축의 변형은 베어링의 강성을 고려하여 유한요소법을 사용하여 계산하고 비접촉 변위 시스템을 이용하여 축의 변형을 측정하여 비교하였다. 확립된 절차를 사용하여 수치예제를 통하여 전달오차를 해석하였다. 그 결과 강성이 충분한 축에서 기어의 하중이 작을 때는 축의 변형의 영향이 크지 않으나 기어의 하중이 커짐에 따라 축의 변형에 의한 효과가 커져 전달오차에 영향을 미친다. 그러나 강성이 작은 경우에는 작은 기어 하중에도 전달오차에 영향을 미치므로 축의 영향이 전달오차에 미치는 영향의 정도를 파악할 수 있다.

후 기

본 연구는 과학재단 지역대학 우수과학자 지원 연구(과제번호: 2000-1-30400-017-1) 지원으로 수행되었으며 관계자에게 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Umezawa, K., 1974, "The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission(3rd Report, the Static Behaviors of Driven gear)," *Bulletin of the JSME*, Vol. 17, No. 112, pp. 1348~1355.
- (2) Barnett, D.W., and Yildirim, N. 1994, "Loaded Transmission Error Prediction using a Computer Model and its Verification," *Proceedings of the 1994 International Gearing Conference*, pp. 57~61.
- (3) Umeyama, M., Kato, M., Inoue, K., 1998, "Effects of Gear Dimensions and Tooth Surface Modifications on the Loaded Transmission Error of a Helical Gear Pair," *Trans. of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 20, pp. 119~125.
- (4) Park, C.I. and Lee, J.M., 1993, "The Load Transmission and Vibration Characteristics of Automobile Gear," SAE Paper 932917.
- (5) Park, C.I. and Kim, D.S., 2001, "Transmission Error Analysis of the Helical Gear for the Elevator," *Proceedings of the KSME 2001 Spring Annual Meeting C*, pp. 470~475.
- (6) Park, C.I. and Lee, J.M., 1995, "Analysis of Load Transmission Characteristics for Automobile Helical Gear," *Journal of Korea Society of Automotive Engineers*, Vol. 5, NO. 3, pp. 1~9.
- (7) Park, C.I., and Cho, D.H., 2001, "Transmission Error Analysis of Helical Gears in Consideration of Shaft and Bearing Deformation," *Proceeding of the KSAE 2001 Autumn Conference*, pp. 1119~1124.
- (8) Joo, S.H., Roh, O.H., Chung, D.H., Bae, M.H., Park, N.G., 1998, "Modeling of Transmission Error of A Gear Pair with Modified Teeth," *Journal of KSNVE*, Vol. 8, NO. 5, pp. 841~848.
- (9) Saiki, K., and Watanabe, T., 2000, "Transmission Error Analysis of Helical Gear for Any Load Condition," *Proceedings of DETC2000/PTG-14421*, pp. 1~7.
- (10) Conry, T.F., and Seireg, A., 1973, "A Mathematical Programming Technique for the Evaluation of Load Distribution and Optimal Modifications for Gear Systems," *ASME Journal of Engineering for Industry*, Nov., pp. 1115~1122.
- (11) Houser, D.R., "Load Distribution Program User's Manual LDP8.3," The Ohio State University.
- (12) Weber, C., 1949, "The Deformations of Loaded Gears and the Effects on Their Load-Carrying Capacity," *Sponsored research(Germany), British Dept. of Scientific and Industrial Research*, Report No. 3.
- (13) Velex, P., and Maatar, M., 1996, "A Mathematical Model for Analyzing the Influence of Shape Deviations and Mounting Errors on Gear Dynamic Behavior," *Journal of Sound and Vibration*, 191(5), pp. 629~660.
- (14) Gargiulo, E.P., 1980, JR., "A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness," *Machine design*, July 24, pp. 107~110.
- (15) Park, C.I. and Lee, J.M., 2001, "The Experimental Study of Helical Gear Noise on the Effect of Lead Errors," *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. 25, No. 9, pp. 1475~1482.
- (16) Brandlein, Johannes et al., 1999, *Ball and Roller Bearings Theory, Design and Application*, 3rd ed. John Wiley & Sons, NY.
- (17) National Instruments, 2000, *LabVIEW Basic I Hands-On Course*.
- (18) National Instruments, 2000, *LabVIEW Data Acquisition Hands-On Course*.