

회전 방향으로 매개 가진되는 외팔보의 동적 해석

임 형 빈* · 정 진 태†
(2002년 1월 9일 접수, 2002년 8월 14일 심사완료)

Dynamic Analysis of a Cantilever Beam with the Parametric Excitation in Rotation

Hyung-Bin Im and Jintai Chung

Key Words : Dynamic Stability(동적안정성), Cantilever Beam(회전외팔보), Multiple Time Scale Perturbation Method(다중시간척도 섭동법), Oscillating Rotary Motion(맥동하는 회전 운동), Stability Diagram(안정성 도표)

Abstract

Dynamic stability of a rotary oscillating cantilever beam is presented in this study. Using the stretch deformation instead of the conventional axial deformation, three linear partial differential equations are derived from Hamilton's principle and transformed into dimensionless forms. Stability diagrams of the first order approximate solutions are obtained by using the multiple scale perturbation method. The stability diagrams show that relatively large unstable regions exist near the combination of the first chordwise bending natural frequency and the first stretch natural frequency. This result is verified by using the generalized- α method.

1. 서론

외팔보 구조물의 형태는 여러 가지 공학적인 예제에서 발견되는 중요한 구조형태이다. 회전방향으로 매개 가진하는(맥동하는 각속도를 가진) 외팔보의 전형적인 예는 하드디스크의 회전형 구동부(rotary actuator)와 차세대 광픽업 장치의 구동부이다. 이런 구조물들은 각속도가 항상 맥동하는 주파수 성분을 갖는다. 그리고 이런 맥동 성분은 매개변수 공진과 같은 동적 불안정성을 야기할 수 있다. 따라서, 이런 장치들은 안정성을 보장할 필요가 있다.

회전하는 외팔보에 대한 연구는 상당수 많은 연구가 있어 왔다. 참고문헌^(1,2)에서 회전 외팔보의 모드 해석에 관한 방법이 연구되었다. 더 나아가 보들의 복잡한 형상과 효과에 대한 연구들은 참고문헌⁽³⁻⁹⁾에서 자세히 설명되었다. 그리고, 병진방향의 맥동 가

속도 운동으로 인해 발생하는 동적 불안정성에 관한 연구는 주로 보 구조물 또는 판 구조물에 대하여 이루어져 왔으며, 참고문헌^(10,11)들이 대표적이다. 이들 대부분은 동적 해석 방법으로 참고문헌⁽¹²⁾에서 제시된 다중시간척도 섭동법(multiple time scale perturbation method)으로 연구되었다.

본 연구에서는 우선 회전외팔보의 진동에 대한 운동방정식을 헤밀턴의 원리(Hamilton's principle)를 이용하여 선형 편미분 방정식 형태의 지배 방정식을 유도하였다. 유도 과정에서 면내(in-plane) 및 면외(out-of-plane) 변위, 그리고 길이 방향의 인장 변위(stretching variable)를 사용하였다. 그런 연후에 각속도 성분을 맥동하는 형태로 바꾸고 나서 무차원화된 형태의 방정식을 얻었다. 이 방정식에 다중시간척도 섭동법을 적용하여 맥동하는 각속도의 무차원수와 주파수의 무차원수에 따른 면내의 동적 불안정 영역(unstable regions)을 나타내는 안정성 도표(stability diagram)를 도시하였다. 일반화된- α 법(generalized- α method)⁽¹³⁾을 이용하여 동적 안정 영역(stable regions)과 불안정 영역(unstable regions)의 시간응답을 살펴 봄으로써 그 안정성 도표의 신뢰성을 입증하였다.

* 회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

† 책임저자, 회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

E-mail : jchung@hanyang.ac.kr

TEL : (031) 400-5287 FAX : (031) 501-4590

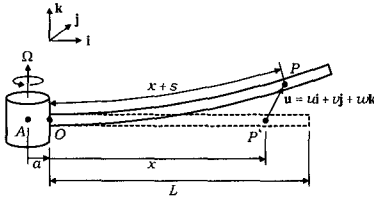


Fig. 1 Configuration of a cantilever beam in rotary oscillating motion

2. 운동방정식 유도

Fig. 1 에서 길이가 L 인 외팔보가 반지름이 a 인 강체축의 O 점에 고정되어 있다. 외팔보는 Euler 보로서 재질은 균일하며 등방성이며 대칭축에 대해 회전각속도 Ω 로 맥동한다. 직교단위벡터 i, j, k 는 축과 함께 회전하며 보의 변형은 점 P^* 가 점 P 로 이동할 때 일반적으로 축방향변위 u , 면내변위 v 그리고 면외변위 w 로 각각 표현된다.

서론에서 언급한 바와 같이 인장변위 s 의 사용은 축방향변위 u 의 사용보다 유리하다. s 와 u, v , 그리고 w 의 관계는 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

$$u = s - h_v - h_w \quad (1)$$

$$h_v = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad h_w = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2)$$

회전 외팔보가 Ω 로 맥동할 때 운동 에너지는 다음 식으로 주어진다.

$$K = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p dx \quad (3)$$

여기서 \mathbf{v}_p 는 속도벡터이며 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v}_p = (\dot{u} - \Omega v) \mathbf{i} + [\dot{v} + \Omega(a+x+u)] \mathbf{j} + \dot{w} \mathbf{k} \quad (4)$$

한편 보의 변형에너지는

$$U = \frac{1}{2} E \int_0^L \left[A \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

이다. 여기서 E 는 영률, I_y, I_z 는 y, z 축에 대한 면적관성모멘트이다.

운동방정식은 다음 식과 같은 해밀턴의 원리를 적용한다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (6)$$

여기서 $\delta K, \delta U$ 는 각각 운동에너지와 변형에너지의 변분이고, δW_{nc} 는 비보존력의 변분을 나타낸다.

해밀턴의 원리를 적용할 때 z 방향의 비보존력을 고려하고 선형화하면 다음과 같은 선형 편미분방정식들을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \rho A \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v \right) - EA \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \\ & = \rho A \Omega^2 (a+x) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} s \right) + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \\ & - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\ & = -\rho A \dot{\Omega} (a+x), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\ & = p_w \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 p_w 는 z 방향에서의 단위길이 당 작용력이고, 식 (7)과 (8)은 서로 연성되어 있는 반면 식 (9)는 다른 방정식과 연성되어 있지 않다. 식 (7)과 (8)로 묘사되는 운동은 면내방향 운동 그리고 식 (9)로 표현되는 운동은 면외방향 운동이다. 식 (7)-(9)에 상응하는 경계조건들은 다음과 같다.

$$s = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{at } x = L \quad (11)$$

3. 이산화

본 논문에서는 편미분 방정식 (7)-(9)로부터 해를 구하는 편의성을 위해서 다음의 몇 가지 무차원수를 정의하였다.

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, & x^* &= \frac{x}{L}, & \delta &= \frac{a}{L}, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{AL^2}{I}}, & T &= \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI}} \end{aligned} \quad (12)$$

그리고 각속도를 맥동성분을 포함한 식으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\Omega = \Omega_s \cos \omega t \quad (13)$$

여기서 Ω_s 는 각속도의 크기를 나타내고 ω 는 각속도의 맥동을 나타내는 가진 주파수이다.

맥동을 나타내는 가진 주파수에 대한 무차원수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega^* = T\omega \quad (14)$$

식 (12)-(14)를 편미분방정식 (7)-(9)에 적용하면 다음과 같은 무차원화된 편미분 방정식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 s^*}{\partial t^{*2}} - 2(\Omega_s) \cos \omega^* t^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} - (\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* \cdot s^* + (\Omega_s) \omega^* \sin \omega^* t^* \cdot v^* \quad (15)$$

$$- \alpha^2 \frac{\partial^2 s^*}{\partial x^{*2}} = (\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* (\delta + x^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} + 2(\Omega_s) \cos \omega^* t^* \frac{\partial s^*}{\partial t^*} - (\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* \cdot v^* \\ - (\Omega_s) \omega^* \sin \omega^* t^* \cdot s^* + \frac{\partial^4 v^*}{\partial x^{*4}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} - (\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \left[\delta(1-x^*) + \frac{1}{2}(1-x^{*2}) \right] \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right\} \\ = (\Omega_s) \omega^* \sin \omega^* t^* (\delta + x^*) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}$$

$$- (\Omega_s)^2 \cos^2 \omega^* t^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \left[\delta(1-x^*) + \frac{1}{2}(1-x^{*2}) \right] \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right\} \quad (17)$$

$$= \frac{\rho_w L^3}{EI}$$

다음의 식들은 고정외팔보의 각 방향의 고유함수와 새로운 무차원 변수 ε 의 정의이다.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x) p_n(t),$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) q_n(t), \quad (18)$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) r_n(t)$$

$$\varepsilon = T\Omega_s \quad (19)$$

식 (15)-(17)에 식 (18)-(19)를 적용하고 무차원을 나타내는 첨자(*)를 생략하고 표현하면 다음과 같은 이산화된 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[M_{mn}^s \ddot{p}_n - 2\varepsilon \cos \omega t G_{mn}^{sv} \dot{q}_n M_{mn}^s \ddot{p}_n \right. \\ \left. - \varepsilon^2 \cos^2 \omega t M_{mn}^s p_n + \varepsilon \omega \sin \omega t G_{mn}^{sv} q_n \right. \\ \left. + \alpha^2 K_{mn}^s p_n \right] = \varepsilon^2 \cos^2 \omega t f_m^s \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[M_{mn}^v \ddot{q}_n + 2\varepsilon \cos \omega t G_{mn}^{vs} \dot{p}_n \right. \\ \left. - \varepsilon^2 \cos^2 \omega t M_{mn}^v q_n - \varepsilon \omega \sin \omega t G_{mn}^{vs} p_n \right. \\ \left. + K_{mn}^v q_n + \varepsilon^2 \cos^2 \omega t K_{mn}^{\Omega} \right] = \varepsilon \omega \sin \omega t f_m^v \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} M_{mn}^s &= \int_0^1 s_m s_n dx, & M_{mn}^v &= \int_0^1 v_m v_n dx, \\ G_{mn}^{sv} &= \int_0^1 s_m v_n dx, & G_{mn}^{vs} &= \int_0^1 v_m s_n dx, \\ K_{mn}^s &= \int_0^1 s_m' s_n' dx, & K_{mn}^v &= \int_0^1 v_m' v_n' dx, \end{aligned} \quad (22)$$

$$K_{mn}^{\Omega} = \int_0^1 \left[\delta(1-x) + \frac{1}{2}(1-x^2) \right] v_m' v_n' dx,$$

$$f_m^s = \int_0^1 (\delta+x) s_m dx, \quad f_m^v = \int_0^1 (\delta+x) v_m dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[M_{mn}^w \ddot{r}_n + K_{mn}^w q_n + \varepsilon^2 \cos^2 \omega t K_{mn}^{\Omega w} \right] = Q_m \quad (23)$$

여기서

$$\begin{aligned}
M_{mn}^w &= \int_0^1 w_m w_n dx, \\
K_{mn}^w &= \int_0^1 w_m'' w_n'' dx, \\
K_{mn}^{\Omega w} &= \int_0^1 \left[\delta(1-x) + \frac{1}{2}(1-x^2) \right] w_m'' w_n'' dx, \\
Q_m &= \int_0^1 w_m \frac{p_w L^3}{EI} dx
\end{aligned} \quad (24)$$

식 (20), (21), (23)에서 $s_n(x), v_n(x), w_n(x)$ 가 각각 고정외팔보의 고유함수이자 서로 직교하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\ddot{p}_m - 2\varepsilon \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}^{sv} \dot{q}_n - \varepsilon^2 \cos^2 \omega t p_m \\
+ \varepsilon \omega \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}^{sv} q_n + \omega_m^{s2} p_m \\
= \varepsilon^2 \cos^2 \omega t q_m
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_m + 2\varepsilon \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}^{vs} \dot{p}_n - \varepsilon^2 \cos^2 \omega t q_m \\
- \varepsilon \omega \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}^{vs} p_n + \omega_m^{v2} q_m \\
+ \varepsilon^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}^{\Omega} q_n = \varepsilon \omega \sin \omega t f_m^v
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_m + \omega_m^{w2} r_m \\
+ \varepsilon^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}^{\Omega w} r_n = Q_m
\end{aligned} \quad (27)$$

여기서

$$\begin{aligned}
\omega_m^{s2} &= \delta_{mn} \alpha^2 K_{mn}^s, \\
\omega_m^{v2} &= \delta_{mn} K_{mn}^v, \\
\omega_m^{w2} &= \delta_{mn} K_{mn}^w
\end{aligned} \quad (28)$$

여기서 δ_{mn} 은 크로넥커 델타변수이다.

4. 동적 안정성 해석 방법

본 논문에서는 면내 방향의 각속도에 맥동 성분을 포함할 경우에 관한 동적 안정성을 해석하기 위해 다중시간척도 섭동법을 사용한다. 식 (25)-(27)에서 면내 방향만을 고려한다. 따라서 식 (25)와 (26)에만 다중시간척도 섭동법을 적용한다.

다중시간척도 섭동법을 적용하기 위해서 식 (25)와 (26)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}
p_m &= p_{m0}(T_0, T_1) + \varepsilon p_{m1}(T_0, T_1) + \dots \\
q_m &= q_{m0}(T_0, T_1) + \varepsilon q_{m1}(T_0, T_1) + \dots
\end{aligned} \quad (29)$$

여기서 T_0, T_1 은 시간척도(time scale)를 나타내며, 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t \quad (30)$$

식 (30)에 의한 시간 미분은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \\
&= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots
\end{aligned} \quad (31)$$

여기서 $D_k = \partial/\partial T_k$ 이다. 식 (29)-(31)을 식 (25)-(26)에 대입하고, $O(\varepsilon^1)$ 까지 고려하면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다. 다음 식 (32), (33)은 ε 의 영차에 관한 식들이다.

$$D_0^2 p_{m0} + \omega_m^{s2} p_{m0} = 0 \quad (32)$$

$$D_0^2 q_{m0} + \omega_m^{v2} q_{m0} = 0 \quad (33)$$

다음의 식 (34), (35)는 ε 의 1차에 관한 식들이다.

$$\begin{aligned}
D_0^2 p_{m1} + \omega_m^{s2} p_{m1} &= -2D_0 D_1 p_{m0} \\
&+ 2 \cos \omega T_0 \sum_n G_{mn}^{sv} D_0 q_{n0} \\
&- \omega \sin \omega T_0 \sum_n G_{mn}^{sv} q_{n0}
\end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 q_{m1} + \omega_m^{v2} q_{m1} &= -2D_0 D_1 q_{m0} \\
&- 2 \cos \omega T_0 \sum_n G_{mn}^{vs} D_0 p_{n0} \\
&+ \omega \sin \omega T_0 \sum_n G_{mn}^{vs} p_{n0} + \omega \sin \omega T_0 f_m^v
\end{aligned} \quad (35)$$

식 (32)와 (33)의 일반해를 구하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p_{m0} = A_m \exp(i\omega_m^s T_0) + \bar{A}_m \exp(-i\omega_m^s T_0) \quad (36)$$

$$q_{m0} = B_m \exp(i\omega_m^v T_0) + \bar{B}_m \exp(-i\omega_m^v T_0) \quad (37)$$

여기서 \bar{A}_m, \bar{B}_m 는 각각 A_m, B_m 의 켈레 복소수를 나타낸다. 식 (36)과 (37)을 식 (34), (35)에 대입하고 그 특이해를 구하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$p_{m1} = \sum_n G_{mn}^{sv} i B_n \left\{ \frac{\omega_n^v + \frac{1}{2}\omega}{\omega_m^{s2} - (\omega_n^v + \omega)^2} \exp[i(\omega_n^v + \omega)T_0] \right. \\ \left. + \frac{\omega_n^v - \frac{1}{2}\omega}{\omega_m^{s2} - (\omega_n^v - \omega)^2} \exp[i(\omega_n^v - \omega)T_0] \right\} + cc \quad (38)$$

$$q_{m1} = \sum_n G_{mn}^{vs} i A_n \left\{ \frac{\omega_n^s + \frac{1}{2}\omega}{(\omega_n^s + \omega)^2 - \omega_m^{v2}} \exp[i(\omega_n^s + \omega)T_0] \right. \\ \left. + \frac{\omega_n^s - \frac{1}{2}\omega}{(\omega_n^s - \omega)^2 - \omega_m^{v2}} \exp[i(\omega_n^s - \omega)T_0] \right\} + cc \quad (39)$$

여기서 cc 는 켈레항들을 나타낸다. 이 근들을 구하는 과정은 참고문헌 (12)에 잘 나타나 있으므로 여기서는 생략한다. 그 과정에서 우리는 A_k, B_l 을 다음과 같이 가정한다.

$$A_k = a_k \exp(-i\lambda T_1) \\ B_l = b_l \exp[i(\bar{\lambda} + \sigma)T_1] \quad (40)$$

여기서 a_k, b_l 그리고 λ 는 복소수이다. 또, $\bar{\lambda}$ 는 λ 의 켈레 복소수이고, σ 는 매개 변수이다. 만약 λ 가 허수부를 가지면 이 시스템의 근들은 발산하게 된다. 따라서, 식 (36)과 (37)의 근들은 불안정하게 된다. λ 에 관한 특성 방정식을 구하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Case: } \omega = \omega_k^s + \omega_l^v + \varepsilon\sigma \\ \lambda^2 + \sigma\lambda + \Lambda_{kl} = 0 \quad (41)$$

여기서

$$\Lambda_{kl} = \frac{(G_{kl}^{sv})^2}{\omega_k^s \omega_l^v} (\omega_k^s - \omega_l^v)^2 \quad (42)$$

여기서 ω_k^s 인장 방향(Stretching mode)의 k 차의 무차원화된 고유진동수이고 ω_l^v 는 면내 굽힘 방향(Bending mode)의 l 차의 무차원화된 고유진동수이다. 식 (41)에서 λ 가 실수근을 가지려면 $\sigma^2 \geq 1/4 \Lambda_{kl}$ 이어야 한다. 여기서 경계치값의 σ 를 구하게 되면 다음과 같은 안정과 불안정을 판별할 수 있는 transition curve를 구할 수 있다.

$$\omega = \omega_k^s + \omega_l^v \pm \varepsilon \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_{kl}} \quad (43)$$

이 식 (43)을 이용해서 λ 가 실수근을 갖는 안정성 영역과 복소수근을 갖는 불안정성 영역을 갖는 안정성 도표를 구할 수 있다.

Table 1 Dimensionless natural frequencies for the chordwise motion when $\varepsilon = 0, \alpha = 70$

	1st	2nd	3rd	4th
Bending mode (ω_l^v)	3.516	22.035	61.697	120.902
Stretching mode (ω_k^s)	109.956	329.867	549.779	769.69

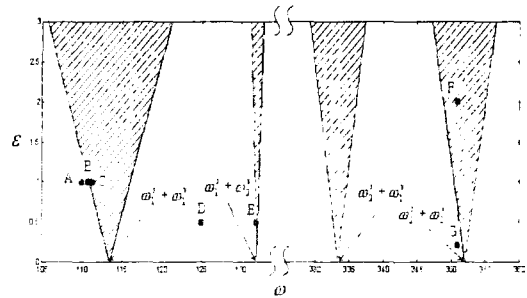


Fig. 2 Stability diagram of a cantilever beam in oscillating rotary motion

5. 안정성 판별 및 시간응답

Table 1에서의 $\varepsilon = 0$ 은 외팔보가 고정되었음을 의미한다. $\alpha = 70$ 의 값은 기하학적인 형상의 최적 조건을 나타내는 값이다. 그리고, 각각의 무차원값들은 인장 방향(Stretching mode)의 무차원 고유진동수 ω_k^s 와 면내 굽힘 방향(Bending mode)의 무차원 고유진동수 ω_l^v 를 나타낸다. 이 고유진동수들은 값을 가지지 않는 무차원의 값들이다. 이 고유진동수들과 앞장에서 수행한 안정성 해석 방법을 이용하여 Fig. 2에서 보는 바와 같은 1차 확장장에 대한 다중시간척도 섭동법에 의해 안정성 도표를 얻었다. 이 안정성 도표는 무차원수 ε 과 ω 에 의해서 결정되어지는 도표이다. 빗금 친 부분은 불안정 영역을 나타낸다. Fig. 2에서 보는 것처럼 $\omega = \omega_k^s + \omega_l^v$ 근처에서 상대적으로 넓은 불안정 영역이 나타난다. 또한 주파수가 고주파수로 갈수록 불안정 영역이 상대적으로 좁아진다는 것을 알 수 있다.

Fig. 3에서 Fig. 9는 Fig. 2에서 표시한 A에서 G 점들에 대한 시간 응답을 나타낸다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 점 A, B, D 그리고 F는 안정 영역에서의 점이고 C, E 그리고 F는 불안정 영역의 점들이다. 점 A는 안정 영역의 경계치 부근의 점이고, 점 B는 거의 경계치의 점이다. 그리고 점 C는 불안정 영역의 경계치 부근을 나타낸다. 점 E는 불안정 영역이긴 하지만 그 영역이 아주 좁은 부분의 점이다. 시간 응답은 초기치를 모두 0으로

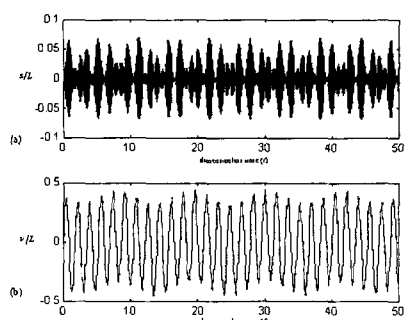


Fig. 3 Deformation time histories at $x = 1$ for point A
(a) the dimensionless stretch deformation s/L ,
(b) the dimensionless chordwise deformation v/L

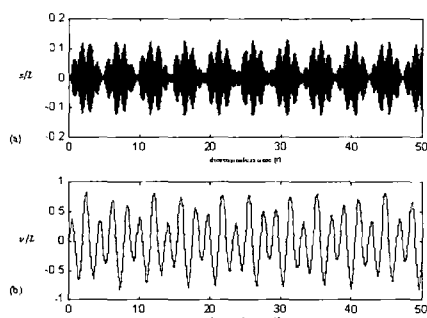


Fig. 4 Deformation time histories at $x = 1$ for point B
(a) the dimensionless stretch deformation s/L ,
(b) the dimensionless chordwise deformation v/L

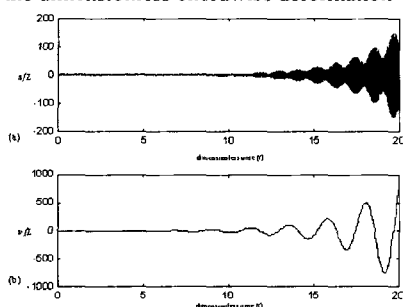


Fig. 5 Deformation time histories at $x = 1$ for point C
(a) the dimensionless stretch deformation s/L ,
(b) the dimensionless chordwise deformation v/L

하였고, Generalized- α 법을 사용하여 얻어진 결과들이다.

Fig. 3 과 Fig. 4 는 안정적인 반응을 보이는 반면 Fig. 5 는 불안정적으로 발산하는 반응을 보인다. 안정 영역의 경계치 부근의 점 A 를 나타낸 Fig. 3 을 보면 변위가 약간의 흔들리는 현상을 나타낸다. 이와 비교해서 경계치의 점인 B 를 나타낸 Fig. 4 를 보면 맥놀이 현상과 비슷한 현상을 나타낸다. 불안정 영역의 경계치의 점인 C 를 나타낸 Fig. 5

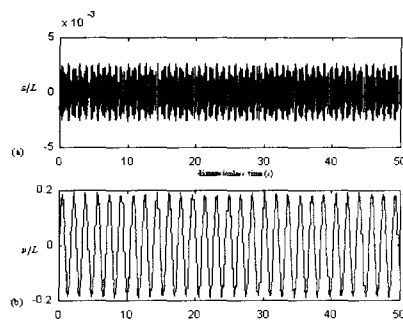


Fig. 6 Deformation time histories at $x = 1$ for point D
(a) the dimensionless stretch deformation s/L ,
(b) the dimensionless chordwise deformation v/L

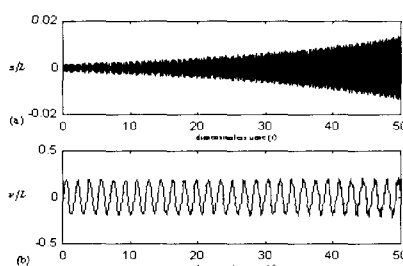


Fig. 7 Deformation time histories at $x = 1$ for point E
(a) the dimensionless stretch deformation s/L ,
(b) the dimensionless chordwise deformation v/L

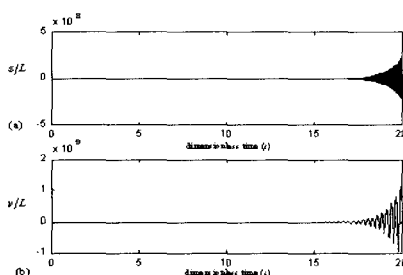


Fig. 8 Deformation time histories at $x = 1$ for point F
(a) the dimensionless stretch deformation s/L ,
(b) the dimensionless chordwise deformation v/L

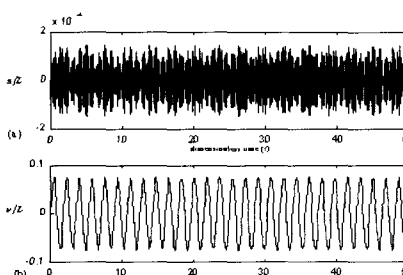


Fig. 9 Deformation time histories at $x = 1$ for point G
(a) the dimensionless stretch deformation s/L ,
(b) the dimensionless chordwise deformation v/L

는 확실히 발산하는 현상을 보이고 있다.

Fig. 3 과 Fig. 6 을 비교하여 보자. 점 A 와 D 는 분명히 둘 다 안정 영역에 속하는 점들이다. 그런데 Fig. 3 에 비해서 Fig. 6 은 변위가 일정하게 흔들리고 그 변위의 크기도 Fig. 3 에 비해 상당히 작게 나타나고 있다. 특히 면내 굽힘 방향을 보면 Fig. 3 은 약간의 불안정한 느낌이 들 정도의 현상을 보인다.

Fig. 7 은 불안정한 반응을 나타내고 있다. 점 E 는 분명히 불안정의 영역에 속해 있다. 그런데 Fig. 5 에 비해서 그 불안정의 정도는 상당히 미미한 편이다. 특히 면내 굽힘 방향의 반응을 보면 거의 안정하다고 할 정도의 반응을 나타낸다. 이는 더욱 연구를 해 보면 알겠지만 2 차의 확장을 하게 될 경우에 이 근방이 불안정 영역의 일부가 될 가능성이 높다.

Fig. 8 과 Fig. 9 는 고주파수일 경우의 안정영역과 불안정영역의 점들을 살펴 보았다. 예상대로 점 F 는 발산하는 현상을 보이고 점 G 는 안정적인 반응을 나타낸다.

6. 결 론

본 논문에서는 회전 방향으로 매개가진하는 외팔보의 구조물에 대한 동적 안정성 해석을 수행하였다. 안정성 해석은 회전 외팔보를 헤밀턴의 원리를 이용해 운동 방정식을 유도하였다. 운동 방정식을 보면 면내 굽힘 방향과 길이 방향은 서로 연관이 되어 있지만, 면의 방향은 연관되어 있지 않음을 알 수 있다. 각속도를 조화함수의 형태로 바꾸고 나서 무차원화시킨 방정식을 구한 후에 다중시간척도 섭동법을 이용하여 안정성 도표를 구하였다.

안정성 도표를 보면 첫번째 길이 방향 무차원 고유 진동수와 첫번째 면내 방향 굽힘의 무차원 고유진동수의 합이 값 근처에서 상대적으로 넓은 불안정 영역이 나타났다. 도표에서 보듯이 불안정 영역들은 주파수가 높을수록 불안정 영역이 상대적으로 적어짐을 알 수 있다. 이 안정성 도표의 신뢰성은 일반화된- α 법에 의한 시간 응답에 의해 입증되었다.

추후에 2 차의 확장과 면의 방향의 안정성 도표를 얻는다면 하드디스크의 회전형의 구동부나 차세대 광픽업 장치의 설계에 확실한 참고 자료가 될 것이라고 확신한다.

참고문헌

- (1) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (2) Bauer, H. F., 1980, "Vibration of a Rotating Uniform Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 72, pp. 177~189.
- (3) Yoo, H. H. and Shin, S. H., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, pp. 807~828.
- (4) Yoo, H. H., Ryan, R. R., and Scott, R. A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motion," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, pp. 261~278.
- (5) Chung, J. and Yoo, H. H., 2001, "Dynamic Analysis of a Rotating Cantilever Beam by Using the Finite Element Method," *Journal of Sound and Vibration*, Accepted for publication.
- (6) Park, J. H. and Kim, J.H., 1999, "Dynamic Analysis of Rotating Curved Beam with a Tip Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, pp. 1017~1034.
- (7) Fallahi, B. and Lai, S. H.-Y., 1994, "An Improved Numerical Scheme for Characterizing Dynamic Behavior of High-Speed Rotating Elastic Beam Structures," *Computer & Structures*, Vol. 50, pp. 749~755.
- (8) Lai, Steven H. Y., 1991, "Nonlinear Finite Element Modeling of a High Speed Rotating Timoshenko Beam Structure," *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 36, pp. 849~861.
- (9) Chen, C. I., Mucino, V. H. and Spyarakos, C. C., 1994, "Flexible Rotating Beam: Comparative Modeling of Isotropic and Composite Material Including Geometric Non-linearity," Vol. 178, pp. 591~605.
- (10) Beal, T., 1965, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts," *J. AIAA*, Vol. 3, pp. 486~494.
- (11) Hyun, S. H. and Yoo, H. H., 1999, "Dynamic Modeling and Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, pp. 543~558.
- (12) Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric Excitations of Linear Systems Having Many Degrees of Freedom," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 62, pp. 375~381.
- (13) Chung, J. and Hulbert, G. M., 1993, "A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: the Generalized- α Method," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 371~375.