

최소 제곱 무요소법을 이용한 선형 탄성 변형 해석

권기찬[†] · 박상훈* · 윤성기**

(2002년 2월 26일 접수, 2002년 8월 8일 심사완료)

The Least-Squares Meshfree Method for Linear Elasticity

Kie-Chan Kwon, Sang-Hoon Park and Sung-Kie Youn

Key Words : Least-Squares(최소 제곱), Meshfree Method(무요소법), Meshless Method(무요소법), Integration Error(적분오차), Elasticity(탄성), Incompressibility(비압축성)

Abstract

The first-order least-squares meshfree method for linear elasticity is presented. The conventional and the compatibility-imposed least-squares formulations are studied on the convergence behavior of the solution and the robustness to integration error. Since the least-squares formulation is a type of mixed formulation and induces positive-definite system matrix, by using shape functions of same order for both primal and dual variables, higher rate of convergence is obtained for dual variables than Galerkin formulation. Numerical examples also show that the presented formulations do not exhibit any volumetric locking for the incompressible materials.

1. 서론

무요소법⁽¹⁻⁵⁾은 불규칙적으로 분포된 절점들만으로 형상 함수를 구성할 수 있는 장점으로 인해 많은 관심을 받아오고 있다. 유한요소법에서 요소의 구성 및 재분할, 적응 기법(adaptive strategy)의 적용 등은 상당히 번거로운 작업들이다. 요소의 정보를 필요로 하지 않는 무요소법은 이런 번거로움을 극복할 수 있을 것으로 기대되고 있다. 그러나 대부분의 Galerkin 무요소법은 적분 항등식을 이용해 얻어진 약화식을 적분하기 위해 적분 격자(integration cell)를 필요로 한다. Galerkin 수식화에서 수치해의 정확성은 적분의 정확성에 크게 영향을 받으므로, 적분 격자는 신중하게 구성되어야 한다. 이런 번거로움은 무요소법의 효용성을 반감시키게 된다.

적분 격자의 사용을 피하기 위해 절점 적분법,

선점법(collocation method) 등이 연구되었으나,⁽⁶⁻⁹⁾ 수치해의 안정성(stability) 문제를 발생시킨다. 이를 개선하기 위한 방법들이 제안되었으며,^(7,9) Chen 등은 보로노이 격자(Voronoi cell)를 이용해 1차 다항식까지의 해를 정확히 적분할 수 있는 방법을 제안하였다.⁽¹⁰⁾ Atluri 등은 Petrov-Galerkin 법을 이용하여 국부적으로 적분을 수행하는 방법을 제안하였다.⁽¹¹⁾ 최근에 저자는 적분 항등식을 사용하지 않는 최소 제곱 수식화를 이용해 적분 오차에 민감하지 않은 무요소법을 제안하였고, 푸아송 방정식의 수치 예제들을 통해 정확한 적분을 제공하지 않는 간단한 적분 방법으로도 정확한 해를 얻을 수 있음을 보였다.^(12,13)

수학적으로 1차 최소 제곱 수식화는 혼합 수식화(mixed formulation)로 간주할 수 있다. 따라서 비압축성 조건하에서 체적 잠김(volumetric locking) 등의 현상이 발생하지 않을 것으로 예상되며, 이 산화를 통해 얻어진 행렬은 항상 양의 정부호(positive definite)인 성질을 가지고 있다. 이로 인해 응력 같은 1차 미분 변수(dual variable)에도 높은 차수(order)의 형상 함수를 사용해, 보다 정확한 해를 얻을 수 있다. 그러나 혼합 Galerkin 수식화의 경우 LBB 조건을 만족시켜야 하므로, 1차 미분

[†] 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail: kkc@skylab.kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3074 FAX : (042)869-3095

* 기아자동차 승용차체설계 3팀

** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

변수에 낮은 차수의 형상 함수를 도입하거나 선택 감차 적분(selective reduced integration) 등의 방법을 사용해야 한다. 그리고 이런 기법들을 그대로 무요소법에 적용하는 것은 명확하지 않으며, 상당히 까다로울 수 있다.

일반적으로 무요소법에서 절점들의 영향 반경(influence radius)이 큰 경우 심각한 체적 잠김 현상은 관찰되지 않으나,⁽²⁾ 수치적으로 많은 계산 노력을 필요로 한다. 그리고 작은 영향 반경을 사용하면 체적 잠김 현상이 심각하게 관찰된다.^(14,15) 이를 개선하기 위한 노력으로, 유한요소법에 사용되던 기법들을 적용하는 연구가 진행되어 왔다. 혼합 Galerkin 수식화에 기초하여, Dolbow 등은 편차 항(deviatoric part)은 적분 격자를 사용해 적분하고, 체적 항(volumetric part)은 보로노이 격자를 구성해 1 점 적분을 하는 선택 감차 적분을 제안하였다.⁽¹⁴⁾ 비슷한 방법으로 Chen 등은 체적 항의 적분을 위해 적분 격자에서 1 점 적분을 사용하는 방식을 제안하였다.⁽¹⁵⁾

본 연구에서는 선형 탄성 문제 해석을 위한 최소 제곱 무요소법을 제시하고자 한다. 먼저 선형 탄성에 대한 일반 수식화와 해의 정확성을 위해 양립성 조건(compatibility condition)을 도입한 수식화를 제안한다. 제안된 수식화들에 기초한 무요소법의 수렴 특성, 적분 오차에 대한 강건성 그리고 비압축성 조건하에서 체적 잠김 현상이 발생하지 않음을 수치 예제를 통해 제시한다.

2. 최소 제곱 무요소법

최소 제곱 무요소법은 최소 제곱 수식화에 무요소 근사화 방법을 적용한다. 본 장에서는 1 차 최소 제곱 수식화^(12,16)와 본 연구에서 사용한 이동 최소 제곱법(moving least-squares method)^(4,17)을 간략히 기술한다.

2.1 1 차 최소 제곱 수식화

해석 영역 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ 와 경계 Γ 에서 다음과 같은 1 차 미분 방정식 및 경계 조건을 생각한다.

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (1a)$$

$$B\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma \quad (1b)$$

여기서 A 는 1 차 선형 미분 연산자로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^d A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2)$$

B 는 경계에서의 대수 연산자이며, \mathbf{f} 와 \mathbf{g} 는 각각 해석 영역과 경계에서 주어진 함수이다. 1 차

미분 방정식이므로 경계 조건은 식 (1b)와 같이 필수 경계 조건만 주어진다.

식 (1b)를 만족시키는 함수 공간을 V 라 하면, 임의의 시도 함수(trial function) $\mathbf{v} \in V$ 에 대해 잔여오차(residual)를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} - \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

그러면 잔여오차의 제곱의 적분은 다음과 같다.

$$I(\mathbf{v}) = \|\mathbf{R}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 = (A\mathbf{v} - \mathbf{f}, A\mathbf{v} - \mathbf{f})_{L^2(\Omega)} \quad (4)$$

$$= \int_{\Omega} (A\mathbf{v} - \mathbf{f})^T (A\mathbf{v} - \mathbf{f}) d\Omega$$

최소 제곱 수식화에서는 2 차 범함수(quadratic functional) $I(\mathbf{v})$ 를 최소화하는 함수 \mathbf{u} 를 찾는다. 따라서 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (5a)$$

여기서 각 항은 아래와 같다.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, A\mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \quad (5b)$$

$$F(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, A\mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \quad (5c)$$

근사 함수 공간을 $V^h \subset V$ 라 하면, 수치해는 아래의 변분식을 만족시키는 $\mathbf{u}^h \in V^h$ 를 찾음으로써 구해진다.

$$B(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = F(\mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (6)$$

잘 정의된(well-posed) 문제에서 연산자 A 는 아래로 유계(bounded below)하므로, $B(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h)$ 로부터 얻어지는 행렬은 항상 대칭이며 양의 정부호이다. 본 연구에서는 필수 경계 조건을 적용하기 위하여 벌칙법(penalty method)을 사용하였다.

일반적인 최소 제곱 수식화의 경우, 근사 함수 공간이 p -차 다항식까지의 완비성(completeness)을 가진다면 다음과 같은 수렴 특성을 갖는다.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^p \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)} \quad (7)$$

여기서 C_1 는 양의 상수이다. 특별히 1 차 미분 연산자 A 가 타원형(strictly elliptic or coercive)의 성질을 만족한다면, 최소 제곱 수식화는 다음과 같이 보다 나은 수렴성을 가진다.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^{p+1} \|\mathbf{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)} \quad (8)$$

여기서 C_2 은 양의 상수이다. 따라서 타원형 수식화의 경우, 주어진 근사 함수 공간에서 최적의 수렴 속도를 얻을 수 있게 된다.

고차 미분 방정식들의 1 차 최소 제곱 수식화를 위해서는, 새로운 변수를 도입해 1 차 미분 방정식

으로 변환해야 한다. 2 차 미분 방정식의 경우, 도입되는 새로운 변수들은 1 차 미분 변수들이며, \mathbf{u} 에 포함된다. 따라서 식 (8)은 1 차 미분 변수들에 대해서도 최적의 수렴 속도를 얻을 수 있음을 의미한다.

2.2 이동 최소 제곱 근사화

선형 독립 기저 함수들을 $\{p_i\}_{i=1}^n$, 절점을 $\{x_j\}_{j=1}^N$, 각 절점에서의 가중함수를 $\{w_j\}_{j=1}^N$ 라 하면, I -번째 절점의 형상함수 ψ_I 는 다음과 같다.

$$\psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) \quad (9)$$

여기서

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x})] \quad (10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P} \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) = w_I(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}_I) \quad (12)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & \dots & p_n(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_N) & \dots & p_n(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

본 연구에서는 다음과 같은 선형 기저 함수와 가중 함수를 사용하였다.

$$\mathbf{p}^T = [1, x, y] \quad (15)$$

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt{4/\pi}(1 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|^2/h_I^2)^4 & \text{if } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| < h_I \\ 0 & \text{if } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \geq h_I \end{cases} \quad (16)$$

여기서 h_I 는 영향 반경으로, 본 연구에서는 절점 간 거리의 1.5 배를 사용하였다.

3. 선형 탄성의 최소 제곱 수식화

1 차 최소 제곱 수식화를 위해서 선형 탄성의 2 차 미분 방정식을 1 차 미분 방정식으로 변환한다. 이때 새로운 변수들이 도입 되는데, 이들은 응력이나 변형률과 비슷한 양인 1 차 미분 변수들이다. 본 장에서는 먼저 미지 변수로 변위와 무차원 응력 성분을 사용하는 일반적인 수식화를 제시한다. 그리고 수치해의 정확성을 개선하기 위해 양립성 조건을 충족시키는 수식화를 제안한다.

수학적으로 1 차 최소 제곱 수식화는 혼합 수식

화라 할 수 있고, 이산화로부터 얻어지는 행렬은 항상 대칭이며, 양의 정부호인 특성을 갖고 있다. 따라서 적절한 1 차 미분 변수들을 도입하면, 비압축성 조건하에서 수치해의 수렴 특성은 유지하면서 체적 잠김 현상을 제거할 수 있는 수식화가 가능할 수 있다. 본 장에서 제시되는 수식화들은 비압축성 조건하에서 어떤 특이성(singularity)도 발생하지 않는다.

3.1 선형 탄성 지배 방정식

최소 제곱 수식화에 앞서 정적 선형 탄성 문제의 지배 방정식을 간략히 기술한다. 변위에 대한 2 차 미분 방정식으로 다음과 같이 요약된다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (17a)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } \Omega \quad (17b)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij} \quad \text{in } \Omega \quad (17c)$$

여기서 σ_{ij} 와 ε_{ij} 는 각각 응력 성분과 변형률 성분이며, u_i 는 변위 성분이다. b_i 는 체적력, E 와 ν 는 각각 영 계수와 푸아송 비, δ_{ij} 는 크로네커 델타를 나타낸다. 식 (17a)는 평형 방정식, 식 (17b)는 변위와 변형률과의 관계식, 식 (17c)는 구성 방정식이다. 경계 조건은 다음과 같이 변위와 응력 경계 조건으로 구성된다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_{u_i} \quad (18a)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_{t_i} \quad (18b)$$

여기서 Γ_{u_i} 는 변위 조건이 주어진 경계, Γ_{t_i} 는 응력 조건이 주어진 경계 그리고 n_j 는 경계에서의 단위 법선 벡터의 성분을 나타낸다.

3.2 일반 수식화

선형 탄성의 일반적인 1 차 최소 제곱 수식화를 위해서 미지 독립 변수로 변위 성분 u_i 와 무차원 응력 성분 $s_{ij} = \sigma_{ij}/E$ 을 도입한다. 이때 미지 함수 $\{u_i, s_{ij}\}$ 에 대한 1 차 최소 제곱 수식화는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - (1+\nu)s_{ij} + \nu s_{\alpha\alpha}\delta_{ij} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (19a)$$

$$s_{ij,j} = -\frac{b_i}{E} \quad \text{in } \Omega \quad (19b)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_{u_i} \quad (20a)$$

$$s_{ij}n_j = \frac{\bar{t}_i}{E} \text{ on } \Gamma_{t_i} \quad (20b)$$

여기서 식 (19)는 1 차 미분 방정식으로, 식 (19a)는 식 (17b)와 식 (17c)에 해당하는 구성 방정식이며, 식 (19b)는 식 (17a)에 해당하는 평형 방정식이다. 식 (20a)와 식 (20b)는 각각 변위와 응력 경계 조건으로, 이들은 1 차 최소 제공 수식화에서는 모두 필수 경계 조건이 된다. 앞 장의 수식화 과정은, 위의 변환된 1 차 미분 방정식들로부터 그대로 따라 갈 수 있다.

참고로 2 차원 평면 변형(plane strain) 문제에 대한 수식화는 다음과 같다.

$$u_{,x} - (1 - \nu^2)p + \nu(1 + \nu)q = 0 \text{ in } \Omega \quad (21a)$$

$$\nu_{,y} + \nu(1 + \nu)p - (1 - \nu^2)q = 0 \text{ in } \Omega \quad (21b)$$

$$u_{,y} + \nu_{,x} - 2(1 + \nu)r = 0 \text{ in } \Omega \quad (21c)$$

$$p_{,x} + r_{,y} = -b_x \text{ in } \Omega \quad (21d)$$

$$r_{,x} + q_{,y} = -b_y \text{ in } \Omega \quad (21e)$$

$$u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u \quad (22a)$$

$$\nu = \bar{\nu} \text{ on } \Gamma_\nu \quad (22b)$$

$$n_x^2 p + n_y^2 q + 2n_x n_y r = \bar{t}_n / E \text{ on } \Gamma_{t_n} \quad (22c)$$

$$t_x n_x p + t_y n_y q + (t_x n_y + t_y n_x) r = \bar{t}_t / E \text{ on } \Gamma_{t_t} \quad (22d)$$

여기서 p, q, r 은 도입된 1 차 미분 변수들로, 각각 s_{xx}, s_{yy}, s_{xy} 를 나타낸다. 그리고 t_i 는 경계에서의 단위 접선 벡터 성분이다.

앞 장의 행렬 형태로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ in } \Omega \quad (23)$$

$$B_1 \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \text{ on } \Gamma_u \quad (24a)$$

$$B_2 \mathbf{u} = \mathbf{g}_2 \text{ on } \Gamma_\nu \quad (24b)$$

$$B_3 \mathbf{u} = \mathbf{g}_3 \text{ on } \Gamma_{t_n} \quad (24c)$$

$$B_4 \mathbf{u} = \mathbf{g}_4 \text{ on } \Gamma_{t_t} \quad (24d)$$

여기서 각 행렬은 아래와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & -1 + \nu^2 & \nu + \nu^2 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & \nu + \nu^2 & -1 + \nu^2 & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 & -2(1 + \nu) \\ 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (25a)$$

$$\mathbf{u}^T = [u \quad \nu \quad p \quad q \quad r] \quad (25b)$$

$$\mathbf{f}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -b_x \quad -b_y] \quad (25c)$$

$$B_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (26a)$$

$$B_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (26b)$$

$$B_3 = [0 \quad 0 \quad n_x^2 \quad n_y^2 \quad 2n_x n_y] \quad (26c)$$

$$B_4 = [0 \quad 0 \quad t_x n_x \quad t_y n_y \quad t_x n_y + t_y n_x] \quad (26d)$$

그리고 식 (24)의 우변들은 식 (22)의 우변들과 같다.

3.3 양립성 조건을 도입한 수식화

수치해의 정확성을 향상시키기 위해 양립성 조건이 포함된 1 차 최소 제공 수식화를 생각할 수 있다. 이를 위해 다음과 같이 정의되는 1 차 미분 변수를 도입한다.

$$\hat{s}_{ij} \equiv \frac{1}{2(1 + \nu)} u_{i,j} + \frac{\nu}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} u_{\alpha,\alpha} \delta_{ij} \quad (27)$$

여기서 \hat{s}_{ij} 는 비대칭이며, 이를 이용하면 앞 절의 무차원 응력 성분 s_{ij} 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$s_{ij} = \hat{s}_{ij} + \hat{s}_{ji} \quad (28)$$

따라서 평형 방정식과 변위와 변형률의 관계를 포함한 구성 방정식은 아래와 같이 된다.

$$\hat{s}_{ij,j} + \hat{s}_{ji,j} + \frac{b_i}{E} = 0 \text{ in } \Omega \quad (29)$$

$$\frac{1}{2} u_{i,j} = (1 + \nu) \hat{s}_{ij} - \nu \hat{s}_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad (30)$$

잘 알려진 St. Venant 형식 또는 Beltrami-Michell 형식의 양립성 방정식은 각각 응력 성분이나 변형률 성분의 2 차 미분으로 이루어져 있다. 따라서 1 차 최소 제공 수식화에는 적합하지 않다. 본 연구에서는 다음과 같은 형식의 양립성 조건을 생각한다.

$$u_{i,jk} = u_{i,kj} \quad (31)$$

새로운 1 차 미분 변수 \hat{s}_{ij} 의 도입은 식 (31)을 \hat{s}_{ij} 만의 1 차 미분으로 표현하는 것을 가능하게 한다. 식 (30)을 미분함으로써, 식 (31)의 좌변과 우변은 아래와 같이 쓰여진다.

$$u_{i,jk} = 2(1 + \nu) \hat{s}_{ij,k} - 2\nu \hat{s}_{\alpha\alpha,k} \delta_{ij} \quad (32a)$$

$$u_{i,kj} = 2(1 + \nu) \hat{s}_{ik,j} - 2\nu \hat{s}_{\alpha\alpha,j} \delta_{ik} \quad (32b)$$

따라서 식 (31)의 양립성 조건은 다음과 같이 정리된다.

$$(1+\nu)\hat{s}_{ij,k}-\nu\hat{s}_{aa,k}\delta_{ij}=(1+\nu)\hat{s}_{ik,j}-\nu\hat{s}_{aa,j}\delta_{ik} \quad (33)$$

여기서 항등식 및 반복 되는 식을 제외하면, 9 개의 일차 독립인(linearly independent) 방정식을 얻을 수 있다. 그리고 다음과 같은 형태의 경계 조건을 추가한다.

$$\mathbf{n} \times \nabla u_i = \mathbf{n} \times \nabla \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_{u_i} \quad (34)$$

위 식은 변위 조건이 주어진 경계에서, 접선 방향으로의 변위 성분 변화율에 대한 조건이다. 좌변은 \hat{s}_{ij} 로 표현이 될 수 있으며, 우변은 주어진 변위 조건으로부터 구해질 수 있다.

양립성 조건이 추가된 1 차 최소 제곱 수식화는 미지 독립 변수 $\{u_i, \hat{s}_{ij}\}$ 에 대해 다음과 같이 요약된다.

$$u_{i,j}-2(1+\nu)\hat{s}_{ij}+2\nu\hat{s}_{aa}\delta_{ij}=0 \quad \text{in } \Omega \quad (35a)$$

$$\hat{s}_{ij,j}+\hat{s}_{ji,j}=-\frac{b_i}{E} \quad \text{in } \Omega \quad (35b)$$

$$(1+\nu)\hat{s}_{ij,k}-(1+\nu)\hat{s}_{ik,j}-\nu\hat{s}_{aa,k}\delta_{ij}+\nu\hat{s}_{aa,j}\delta_{ik}=0 \quad \text{in } \Omega \quad (35c)$$

$$u_i=\bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_{u_i} \quad (36a)$$

$$\mathbf{n} \times \nabla u_i = \mathbf{n} \times \nabla \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_{u_i} \quad (36b)$$

$$s_{ij}n_j = \frac{\bar{t}_i}{E} \quad \text{on } \Gamma_{t_i} \quad (36c)$$

식 (36b)의 좌변은 \hat{s}_{ij} 로 표현되므로, 이는 \hat{s}_{ij} 에 대한 필수 경계 조건이 된다.

2 차원 평면 변형 문제에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$u_{,x}-(1-\nu^2)p+\nu(1+\nu)q=0 \quad \text{in } \Omega \quad (37a)$$

$$v_{,y}+\nu(1+\nu)p-(1-\nu^2)q=0 \quad \text{in } \Omega \quad (37b)$$

$$u_{,y}-2(1+\nu)r=0 \quad \text{in } \Omega \quad (37c)$$

$$v_{,x}-2(1+\nu)s=0 \quad \text{in } \Omega \quad (37d)$$

$$p_{,x}+r_{,y}+s_{,y}=-b_x/E \quad \text{in } \Omega \quad (37e)$$

$$r_{,x}+s_{,x}+q_{,y}=-b_y/E \quad \text{in } \Omega \quad (37f)$$

$$2r_{,x}-(1-\nu)p_{,y}+\nu q_{,y}=0 \quad \text{in } \Omega \quad (37g)$$

$$\nu p_{,x}-(1-\nu)q_{,x}+2s_{,y}=0 \quad \text{in } \Omega \quad (37h)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (38a)$$

$$v = \bar{v} \quad \text{on } \Gamma_v \quad (38b)$$

$$\mathbf{n} \times \nabla u = \mathbf{n} \times \nabla \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (38c)$$

$$\mathbf{n} \times \nabla v = \mathbf{n} \times \nabla \bar{v} \quad \text{on } \Gamma_v \quad (38d)$$

$$n_x^2 p + n_y^2 q + 2n_x n_y (r+s) = \bar{t}_n / E \quad \text{on } \Gamma_{t_n} \quad (38e)$$

$$t_x n_x p + t_y n_y q + (t_x n_y + t_y n_x)(r+s) = \bar{t}_i / E \quad \text{on } \Gamma_{t_i} \quad (38f)$$

여기서 u 와 v 는 변위 성분이며, p, q, r, s 는 1 차 미분 변수들로 다음과 같다.

$$[u \ v \ p \ q \ r] = [u_x \ u_y \ 2\hat{s}_{xx} \ 2\hat{s}_{yy} \ \hat{s}_{xy} \ \hat{s}_{yx}] \quad (39)$$

4. 수치 예제

제시된 수식화에 기반한 최소 제곱 무요소법의 수렴 특성, 적분 오차에 대한 영향 그리고 비압축성 조건에서의 영향 등을 수치 예제를 통해 알아보려 한다. 그리고 비교를 위해 Galerkin 무요소법에 의한 결과도 포함하였다.

수치해의 정확성을 비교하기 위해 다음과 같은 오차 놈들을 사용하였다.

$$\begin{aligned} & (\text{Relative displacement error norm})^2 \\ & = \frac{[\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) d\Omega]}{[\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega]} \end{aligned} \quad (40a)$$

$$\begin{aligned} & (\text{Relative energy error norm})^2 \\ & = \frac{[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^h)^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega]}{[\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega]} \end{aligned} \quad (40b)$$

결과 그림들에서 GALMF, CLSMF, ELSMF 는 각각 Galerkin 무요소법, 일반 최소 제곱 수식화를 이용한 무요소법, 양립성 조건을 도입한 수식화를 이용한 무요소법을 의미한다. 그리고 정확한 적분을 했을 때를 Actlg 로 부정확한 적분 방법을 이용했을 때를 Inactlg 로 표시하였다.

4.1 외팔보 예제

다음과 같이 정해가 주어지는⁽¹⁸⁾ Fig. 1 의 외팔보 문제를 해석해 보았다.

$$u = \frac{-Py}{6EI} \{ (6L-3x)x + (2+\bar{\nu})(y^2 - \frac{1}{4}D^2) \} \quad (41a)$$

$$v = \frac{P}{6EI} \{ 3\bar{\nu}y^2(L-x) + \frac{1}{4}(4+5\bar{\nu})D^2x + (3L-x)x^2 \} \quad (41b)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{I}(L-x)y \quad (42a)$$

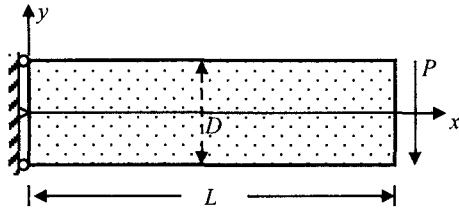


Fig. 1 Cantilever beam problem

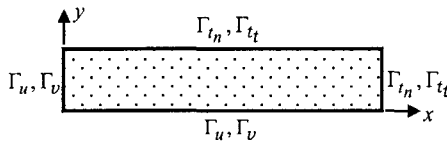


Fig. 2 Boundary condition of beam problem

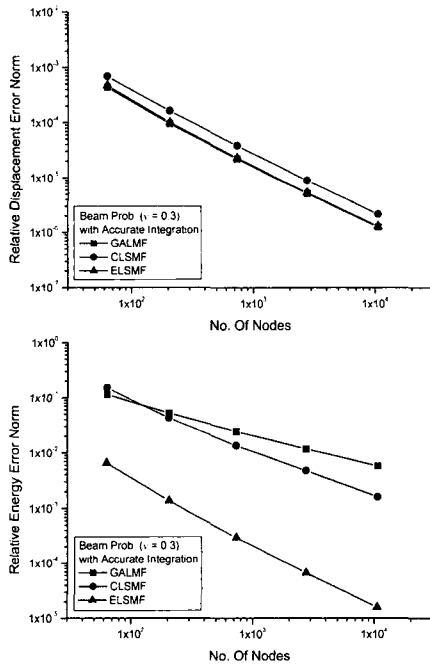


Fig. 3 Error norms of beam problem with accurate integration

$$\sigma_{yy} = 0 \tag{42b}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \tag{42c}$$

여기서 $I = D^3/12$ 는 보의 휨 관성 모멘트이며, 평면 변형 문제의 경우 $\bar{E} = E/(1-\nu^2)$, $\bar{\nu} = \nu/(1-\nu)$ 로 주어진다. $P = 10^4$, $E = 5 \times 10^7$, $L = 10$, $D = 2$ 로 하였으며, 대칭성을 고려해 위 반쪽만을 해석하였다. 경계 조건은 정해로부터 Fig. 2와 같이 주

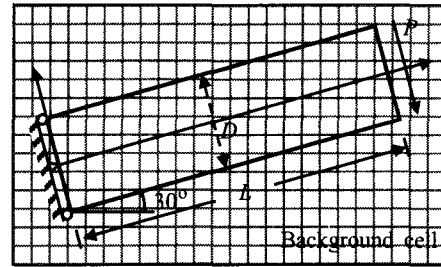


Fig. 4 Inaccurate integration cell with inclined domain

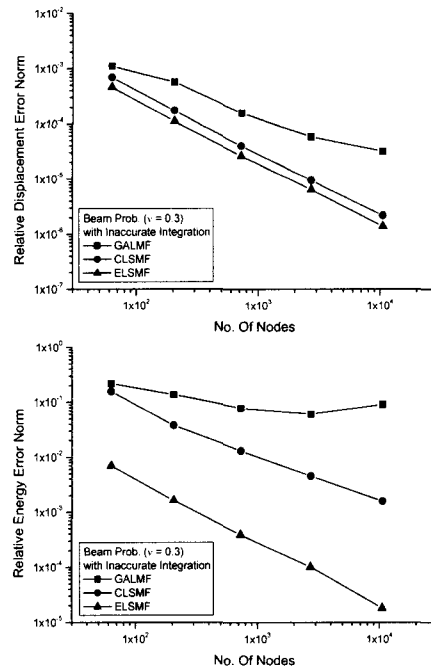


Fig. 5 Error norms of beam problem with inaccurate integration

었다. 그리고 3×21 , 5×41 , 9×81 , 17×161 , 33×321 의 균일한 절점 분포에 대해 해석하였다.

먼저 수렴 특성을 알아보기 위해, 적분 오차가 적은 적분 방식을 사용하였다. 사각형 요소와 똑같은 적분 격자를 사용하고, 각 격자에서는 4×4 가우스 구적법을 이용하였다. 그리고 푸아송 비는 0.3으로 하였다. Fig. 3은 이때의 오차 놈들을 보여준다. Galerkin 무요소법과 두 수식화를 이용한 최소 제곱 무요소법 모두 변위에 대해서 같은 수렴 속도를 보여주며, 이는 사용한 근사 함수 공간으로부터 얻을 수 있는 최적의 수렴 속도이다. 하지만 응력이나 변형률의 오차를 보여주는 에너지 오차 놈의 경우, Galerkin 방법에 비해 최소 제곱

방법들이 높은 수렴 속도를 보여준다. 또한 양립성 조건이 도입된 수식화의 경우 최적의 수렴 속도를 얻을 수 있었으며, 이는 식 (8)과 일치하는 결과이다.

부정확한 적분 방식을 사용했을 때의 영향을 알아보기 위해 Fig. 4 와 같이 보를 30° 회전시킨 후, 절점 분포와 일치되지 않는 적분 격자를 이용하였다. 적분 격자의 변의 길이는 절점간의 거리와 같도록 하였으며, 적분 오차를 크게 하기 위해 2x2 가우스 구적법을 사용했다. 영역 외부에 생성된 적분 점들은 제거하였다. 이때의 결과를 Fig. 5 에 도시하였다. Fig. 3 과 비교했을 때, Galerkin 방법은 해의 정확성이 심각하게 나빠지지만, 최소 제곱 방법들은 좋은 결과를 보여준다.

비압축성 조건하에서의 영향을 살펴 보기 위해, 푸아송 비를 0.3, 0.49, 0.4999, 0.499999 로 변화 시키면서 해석해 보았다. 푸아송 비가 0.5 에 근접할수록 Galerkin 방법은 해의 정확성과 수렴성이 매우 나빠진다(Fig. 6). 이런 체적 잠김 현상은 다른 문헌에서도 찾을 수 있다.^(14,15) 그러나 Fig. 7 과 Fig. 8 에서 볼 수 있듯이 최소 제곱 방법들은 푸아송 비가 0.5 에서도 잘 작동하며, 수렴 특성을 그대로 유지하고 있다. 이는 제시된 최소 제곱 수식화들은 푸아송 비가 0.5 에서도 특이성이 발생하지 않기 때문이다.

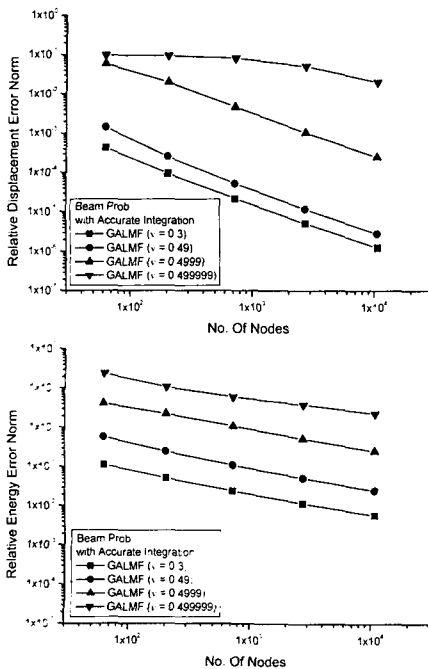


Fig. 6 Error norms using Galerkin meshfree method with different values of Poisson ratio

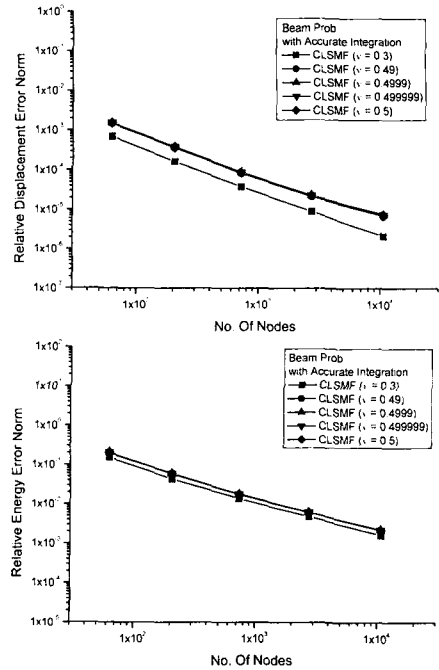


Fig. 7 Error norms using conventional least-squares meshfree method with different values of Poisson ratio

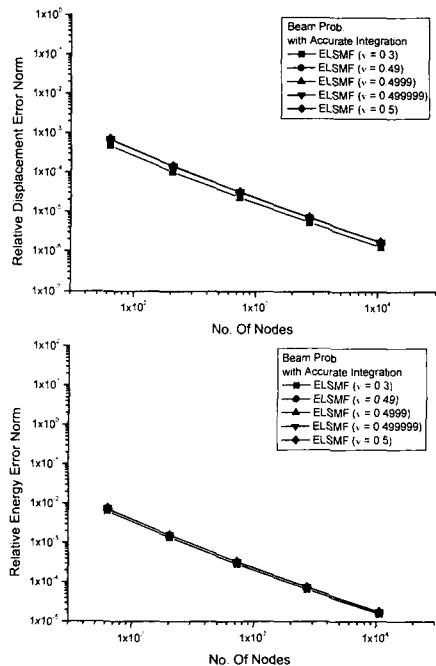


Fig. 8 Error norms using compatibility-imposed least-squares meshfree method with different values of Poisson ratio

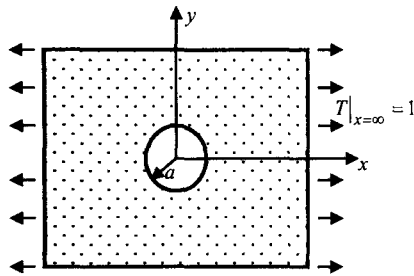


Fig. 9 Infinite plate with a circular hole problem

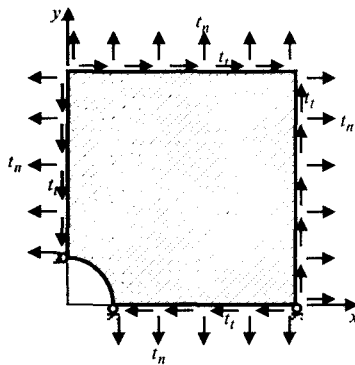


Fig. 10 Quarter model of the plate problem

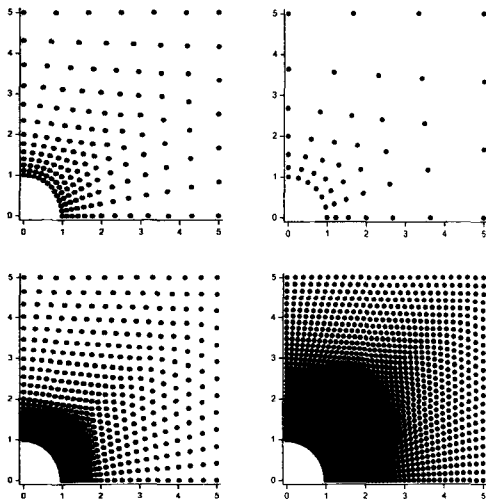


Fig. 11 Nodal distribution of plate problem

4.2 구멍이 있는 무한 평판 예제

Fig. 9 와 같이 반지름이 a 인 구멍이 있는 무한 평면 문제를 해석하였다. x 방향으로 무한대에서 단위 인장 응력을 받고 있을 때, 정해는 다음과 같이 주어진다.⁽¹⁸⁾

Table 1 Quadrature rule for quadtree algorithm

No. of nodes	Quadrature rule
0	2×2
1	3×3
2	3×3
3	4×4
4	4×4

$$u_r = \frac{1}{4\mu} \left[\left\{ \frac{\kappa-1}{2} + \cos 2\theta \right\} + \frac{a^2}{r} \{1 + (1+\kappa)\cos 2\theta\} - \frac{a^4}{r^3} \cos 2\theta \right] \quad (43a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{4\mu} \left\{ (1-\kappa) \frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3} \right\} \sin 2\theta \quad (43b)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right\} + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \quad (45a)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right\} - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \quad (44b)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right\} + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \quad (44c)$$

평면 변형 문제의 경우 $\mu = E/(2+2\nu)$, $\kappa = 3-4\nu$ 이다. 대칭성을 고려하여 $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$ 영역만을 해석한다(Fig. 10). 그리고 $a=1$, $E=50 \times 10^6$ 으로 하였다. 모든 경계에서 정해로부터 구해진 응력 경계 조건을 부가하였다. 그리고 강제 운동을 제거할 3 개의 자유도에 해당하는 변위 조건을 주었다. 그리고 절점의 수를 Fig. 11 과 같이 49, 169, 625, 2401 개로 증가 시키면서 해석하였다.

절점들을 꼭지점으로 하는 사각 적분 격자를 구성하고, 각 격자에서 4×4 가우스 구적법을 사용하였다. 이 방법은 비교적 정확한 적분을 제공하지만, 요소와 비슷한 정도의 격자를 구성해야 하는 번거로움이 있다. 그리고 푸아송 비는 0.3 으로 하였다. 이때의 결과를 Fig. 12 에 실선으로 표시하였다. 변위에 대해서 최소 제곱 방법들이 Galerkin 방법보다 약간 큰 수렴 속도를 주지만, 대체로 앞의 외팔보 문제와 비슷한 경향을 보인다 또한 양립성이 도입된 수식화의 경우 에너지 오차에 대해서도 최적의 수렴성을 관찰할 수 있다.

적분 오차에 대한 영향을 보기 위해 본 예제에서는 다음과 같은 쿼드트리(quadtree) 적분 방법⁽¹²⁾ 을 사용하였다.

- (i) 너무 크지 않은 양의 정수를 N_{max} 라 하자. 본 연구에서는 $N_{max} = 4$ 를 사용하였다.
- (ii) 해석 영역을 포함하는 정사각형을 선택한다.
- (iii) 정사각형 내의 절점의 수가 N_{max} 를 초과하면, 4 개의 같은 크기의 정사각형으로 분할한다. 이를 각 정사각형이 N_{max} 이하의 절점만을 포함할 때 까지 반복한다.
- (iv) 각 정사각형 내의 절점의 개수에 따라 적당한 가우스 구적 공식을 적용하여 적분점을 생성한다. 본 연구에서는 Table 1 과 같은 규칙을 사용하였다.

(v) 해석 영역 밖에 위치한 적분점을 제거한다. 위의 방법은 매우 간단하고 복잡한 형상에 대해서도 쉽게 적용이 가능하지만, 적분의 정확성은 상당히 떨어진다. 특히 해석영역과 쿼드트리 격자의 영역이 일치하지 않는 경계 부근에서는 적분의 부정확성이 더욱 커진다.

쿼드트리 방법을 이용했을 때의 결과를 Fig. 12 에 점선으로 표시하였다. 적분의 정확성에 민감한 Galerkin 방법은 해의 수렴성에 있어서 심각한 문제를 보인다. 그러나 최소 제곱 방법들은 비교적 강건한 결과를 보임을 알 수 있다.

비압축성 조건에서의 영향을 보기 위해, 푸아송 비를 0.4999 로 하여 해석하였다. Fig. 13 에 이때의 오차 놈들을 비교하였다. 여기서 쿼드트리 적분 방식을 이용한 결과는 점선으로 표시하였다. 체적 잠김 현상으로 인해 Galerkin 방법의 경우 해의 정확성이 상당히 나빠짐을 알 수 있다. 그러나 Fig. 12 와 비교할 때 최소 제곱 방법들은 수렴 특성을 그대로 유지하고 있음을 볼 수 있다. 또한 쿼드트리 방법과 같은 부정확한 적분 방법을 사용했을 때 해의 정확성이 크게 나빠지지 않음을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 선형 탄성 문제에 대한 1 차 최소 제곱 수식화 와 이에 기반한 무요소법을 제시하였다. 먼저 변위 성분과 무차원 응력 성분을 미지 독립 변수로 사용하는 일반적인 수식화 와, 해의 정확성을 위해 양립성 조건을 포함하는 수식화를 제안하였다. 이를 위해 새로운 1 차 미분 변수들을 도입하였으며, 이들의 1 차 미분으로 표현할 수 있는 형태의 양립성 조건을 사용하였다.

최소 제곱 무요소법의 장점을 요약하면, 우선 수식화에서 적분 항등식을 적용하지 않으므로, 적

분 오차에 크게 영향을 받지 않는다. 따라서 간단

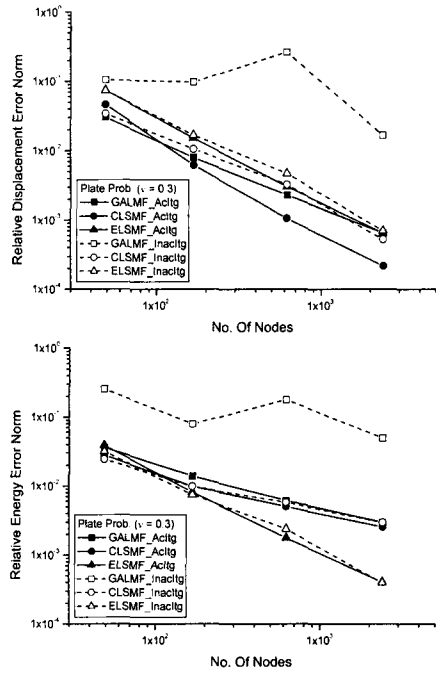


Fig. 12 Error norms of plate problem

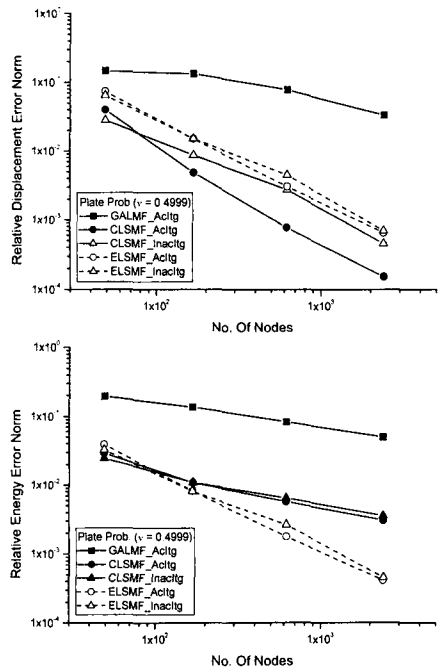


Fig. 13 Error norms of plate problem with Poisson ratio of 0.4999

한 알고리즘으로 구현되는 적분 방법에서도 좋은 결과를 얻을 수 있다. 그리고 수학적으로 1 차 최소 제곱 수식화는 혼합 수식화로 간주할 수 있으며, 최소 제곱 수식화의 이산화로부터 얻어지는 행렬은 양의 정부호이다. 이는 1 차 미분 변수를 포함하는 모든 미지 독립 변수에 대해 같은 차수의 근사화를 사용하는 것을 가능하게 한다. 따라서 1 차 미분 변수인 응력이나 변형률에 대해 보다 나은 정확성 및 수렴성을 얻을 수 있다. 또한 적절한 1 차 미분 변수를 도입함으로써 비압축성 조건에서도 특이성을 발생하지 않는 수식화를 얻을 수 있었다.

선택된 수치 예제들은 이런 특성을 잘 보여준다. 적분의 정확성은 떨어지나 구현이 간단한 적분 방법을 이용하더라도, 최소 제곱 무요소법의 해는 정확성 및 수렴성이 크게 떨어지지 않았다. 그리고 1 차 미분 변수는 Galerkin 방법에 비해 높은 수렴 속도를 보였으며, 양립성 조건을 도입한 수식화는 최적의 수렴성을 보였다. 제시한 방법들은 비압축성 조건하에서도 체적 잠김 현상이 발생하지 않았으며, 수렴 특성이 그대로 유지되었다.

참고문헌

- (1) Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P., 1992, "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements," *Comput. Mech.*, Vol. 10, pp. 307~318.
- (2) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., 1994, "Element-Free Galerkin Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 229~256.
- (3) Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y.F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 20, pp. 1081~1106.
- (4) Duarte, C.A. and Oden, J.T., 1995, "Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems," *Technical Report 95-05*, TICAM, University of Texas at Austin.
- (5) Melenk, J.M. and Babuska, I., 1996, "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 139, pp. 289~314.
- (6) Beissel, S. and Belytschko, T., 1996, "Nodal Integration of the Element-free Galerkin Method," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 139, pp. 49~74.
- (7) Nagashima, T., 1999, "Node-by-node Meshless Approach and its Applications to Structural Analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 39, pp. 341~385.
- (8) Onate, E., Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 1996, "A Finite Point Method in Computational Mechanics. Applications to Convective Transport and Fluid Flow," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 39, pp. 3839~3866.
- (9) Breitkopf, P., Touzot, G. and Villon, P., 2000, "Double Grid Diffuse Collocation Method," *Comput. Mech.*, Vol. 25, pp. 199~206.
- (10) Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S. and You, Y., 2001, "A Stabilized Conforming Nodal Integration for Galerkin Mesh-free Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp. 435~466.
- (11) Atluri, S.N. and Zhu, T., 1998, "A New Meshless Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics," *Comput. Mech.*, Vol. 22, pp. 117~127.
- (12) Park, S.H. and Youn, S.K., 2001, "The Least-Squares Meshfree Method," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 52, pp. 997~1012.
- (13) Park, S.H. and Youn, S.K., 2001, "Least-Squares Meshfree Methods and Integration Error," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 25, No. 10, pp. 1605~1612.
- (14) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, "Volumetric Locking in the Element Free Galerkin Method," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 46, pp. 925~942.
- (15) Chen, J.S., Yoon, S., Wang, H.P. and Liu, W.K., 2000, "An Improved Reproducing Kernel Particle Method for Nearly Incompressible Finite Elasticity," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 181, pp. 117~145.
- (16) Jiang, B.N., 1998, *The Least-Squares Finite Element Method - Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*, Berlin, Springer-Verlag.
- (17) Lancaster, P. and Salkauskas, K., 1981, "Surfaces Generated by Moving Least-Squares Methods," *Mathematics of Computation*, Vol. 37, pp. 141~158.
- (18) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1987, *Theory of Elasticity*, 2nd Ed., New York, McGraw-Hill.